

Гидроаэромеханика

Составитель асс. каф БНГС СамГТУ, магистр Никитин В.И.

Занятие 2.

2.1 ВВОДНЫЕ ПОНЯТИЯ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

Механика – наука о движении и взаимодействии материальных объектов. Под движением понимается механическое движение, то есть изменение положения тел или частей тела в пространстве с течением времени. Теоретическая механика, имеет дело не с самими материальными объектами, а с их «моделями». Такими моделями являются *материальные точки, системы материальных точек, абсолютно твердые тела*, деформируемые *сплошными среды*. рассмотрим последнюю категорию из перечисленных. Для лучшего понимания объекта исследования, лучше всего сравнить модель сплошной среды с другими моделями. *Материальной точкой* принято считать объект, размером которого можно пренебречь при решении определённой задачи. Совокупность материальных точек называют *системой материальных точек*. *Абсолютно твёрдым телом* называется тело, расстояние между любыми двумя точками которого является постоянным. При этом, для материальных точек упрощением является возможность пренебречь его размерами, но не массой. Для абсолютно твёрдых тел пренебрежение его деформацией является основным допущением. Для механики сплошной среды же свойственно не рассматривать молекулярную структуру среды. Сама же модель сплошной среды значительно отличается от системы материальных точек и от твёрдого, недеформируемого тела. Данный вывод легко сделать,

представляя себе течение жидкостей из повседневной жизни. Лучше всего модель сплошной среды описывает *гипотеза сплошности*. Дальнейшим логическим продолжением рассказа о сплошных средах являются свойства материальных объектов её представляющих в реальной жизни, то есть жидкостей и газов. Механика жидкости встречается практически во всех областях нашей физической жизни. Жидкости и газы зачастую описываются одними и теми же законами и математическими уравнениями, но физические свойства их одинаковыми не являются.

Подход к изучению движения деформируемых сред заключается в переходе от реальных деформируемых сред к их идеализированному представлению и соответствующему математическому описанию. Будем в дальнейшем понимать под материальным телом, независимо от его агрегатного состояния, систему материальных частиц, которая заключена в некоторой области пространства D , имеющей объем V и ограниченной поверхностью S .

Реальными материальными частицами, составляющими материальное тело, являются атомы и молекулы. Они находятся в непрерывном хаотическом движении и взаимодействуют между собой за счет сил электромагнитного происхождения. Характер хаотического движения и взаимодействия молекул различен для тел, находящихся в различных агрегатных состояниях. Число материальных частиц (молекул) N в практически малых объемах тела огромно (в 1 см^3 твердого тела содержится порядка 10^{24} молекул), а электромагнитные силы взаимодействия между ними не всегда

известны. Поэтому изучение движения деформируемых сред невозможно, если рассматривать тело как совокупность реальных материальных частиц. При описании движения каждой молекулы как абсолютно твердого тела для 1 см³ вещества потребовалось бы не менее $6 \times N = 6 \times 10^{24}$ дифференциальных уравнений первого порядка и такое же число начальных условий. Однако необязательно знать движение каждой материальной частицы — на практике нужно знать некоторые средние, суммарные характеристики. Это положение определяет два основных подхода к изучению движения деформируемых сред: *статистический* и *феноменологический*.

Статистический подход (развиваемый в физике) базируется на методах статистической механики. Это — вероятностные методы, применение средних характеристик по большому ансамблю частиц, введение дополнительных гипотез о свойствах молекул и об их взаимодействии с целью упрощения модели. Однако при сложном строении молекул использование статистических методов затруднено, так как недостаток информации не позволяет сформулировать гипотезу о взаимодействии молекул, а получаемые уравнения чрезмерно сложны.

Феноменологический подход (от греческого слова *phainomenon* — явление) базируется на общих, полученных из опыта закономерностях и гипотезах, которые принимаются за истинные и используются для построения последующих уравнений и выводов. В основу феноменологического подхода положены понятие *материального континуума* и соответствующая этому понятию *гипотеза сплошности*.

Гипотеза сплошности.

Сплошная среда представляет собой материальный континуум, то есть непрерывное множество материальных точек с непрерывным (в общем случае – кусочно-непрерывным) распределением по нему кинематических, динамических, термодинамических и иных физико-химических характеристик рассматриваемой среды.

С физической точки зрения принятие модели сплошной среды означает, что при макроскопическом описании всякий «бесконечно малый» объем содержит достаточно большое число молекул. Например, кубик воздуха с ребром 10^{-3} мм. Содержит $27 \cdot 10^6$ молекул. Отсюда видно, что предлагаемая идеализация не будет применимой лишь при очень больших разрежениях.

Материальный континуум (сплошная среда) есть состоящая из большого числа малых частиц фиктивная субстанция, которая непрерывно, сплошным образом заполняет область пространства D , отведенную данному телу, независимо от его агрегатного состояния. Следует отметить, что под частицей, составляющей материальный континуум, понимается часть тела, малая по отношению к геометрическим размерам тела, но большая по сравнению с размерами молекул. Таким образом, в рамках феноменологического подхода абстрагируются от реального атомно-молекулярного строения тел и переходят к идеализированному представлению вещества в виде материального континуума. Такая идеализация реального дискретного вещества позволяет использовать при исследовании движения деформируемых тел математический

аппарат дифференциального и интегрального исчисления непрерывных функций.

В соответствии с *феноменологическим* подходом к изучению процессов движения деформируемых сред вводятся ряд понятий, качественно определяющих эти процессы, система физических величин, характеризующих их количественно, и между ними на основании опыта устанавливаются взаимосвязи.

Во-первых, вводятся система характеристических функций, определяющих движение частиц сплошной среды (вектор перемещения и, вектор скорости, тензоры деформаций и скоростей деформаций, поворота и скоростей поворота, и система параметров, определяющих внутреннее состояние среды (плотность, удельная внутренняя энергия, энтропия, абсолютная температура, давление, тензор напряжений и т.д.).

Во-вторых, между введенными физическими величинами устанавливаются взаимосвязи, выражаемые определенными уравнениями и соотношениями, которые основаны на полученных из опыта данных и используются для математического описания поведения деформируемых сред. К их числу относятся уравнения, выражающие такие фундаментальные законы природы, как закон сохранения массы (уравнение неразрывности), закон сохранения импульса (уравнения движения), закон сохранения энергии, или первое начало термодинамики (уравнение энергии), и второе начало термодинамики, а также конечные соотношения, отражающие физикомеханические свойства изучаемых сплошных сред.

В-третьих, устанавливаются начальные и граничные условия, при которых все характеристические функции могут быть найдены математическими методами.

Механика сплошных сред строится в рамках *феноменологического подхода* при ограничениях и упрощениях, определяемых гипотезами механики сплошных сред.

Первая гипотеза механики сплошных сред — *гипотеза сплошности* — связана с понятием материального континуума.

Вторая гипотеза механики сплошных сред связана с понятием пространства. Под пространством понимается бесконечно большая совокупность точек, однозначно задаваемых с помощью чисел, называемых координатами, которые определяют положение произвольной точки относительно некоторой точки, принятой за начало координат.

Мерность пространства обусловлена числом координат, которыми определяется положение точек в пространстве. Например, бесконечно большая совокупность точек в обычном физическом пространстве составляет трехмерное пространство, так как положение произвольной точки в декартовой прямоугольной системе координат задается тремя координатами x, y, z . Совокупность точек на плоскости составляет двумерное пространство, положение произвольной точки задается двумя координатами x, y . Двумерным является и пространство, составленное совокупностью точек, образующих сферическую поверхность, здесь положение точки

может быть однозначно определено двумя координатами: углами (долгота) и (широта), при фиксированном радиусе сферы.

Предполагается, что пространство, в котором рассматривается движение деформируемых сред, является евклидовым. *Евклидовы пространства* — это такие пространства, в которых можно ввести единую для всех точек декартову прямоугольную систему координат (x, y, z) , а расстояние между двумя произвольными точками 1 и 2 определить по формуле

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Следовательно, обычное физическое трехмерное пространство и двумерное пространство на плоскости являются евклидовыми. Это

не относится к двумерному пространству на поверхности сферы, так как нельзя определить расстояние между двумя произвольными точками по приведенной выше формуле, не выходя за пределы этого пространства.

Третья гипотеза механики сплошных сред — гипотеза абсолютного времени. Согласно этой гипотезе, время течет одинаково независимо от выбора системы отсчета, в которой рассматривается движение деформируемой среды. Данная гипотеза является хорошей идеализацией при решении большинства практических задач, в условиях которых скорости движения тел не достигают таких значений, чтобы возникала необходимость учета релятивистских эффектов.

Явления, рассматриваемые в механике сплошных сред, в частности, в механике жидкости и газа, носят макроскопический

характер. Это позволяет абстрагироваться от молекулярного строения вещества и рассматривать физические тела как сплошные среды. Отметим еще раз, что понятие «сплошная среда» представляет собой модель реальных сред. Использование такой модели в механике жидкости и газа и ряде других областей оправдывается тем, что полученные на ее основе результаты подтверждаются экспериментально и всесторонней апробацией на практике. В качестве примеров можно указать на расчеты течений в трубопроводах различного назначения, истечения жидкостей и газов через сопла, фильтрации через пористые среды и т.д.

2.2. Силы и напряжения в жидкостях и газах.

Движение сплошной среды, как и абсолютно твердого тела, происходит под действием сил. Но если в теоретической механике, как правило, рассматриваются сосредоточенные силы, то в механике сплошной среды, главным образом, имеют дело с распределенными силами. По характеру действия, вне зависимости от конкретной физической природы, в механике сплошной среды различают два класса сил: *массовые* и *поверхностные*.

Массовыми силами называют силы, величина которых пропорциональна массе среды, на которую они действуют. Примерами массовых сил могут служить гравитационные и электромагнитные силы, силы инерции. *Поверхностными* силами называют силы, величина которых пропорциональна площади поверхности, на которую они действуют. Примерами поверхностных сил могут служить силы давления и трения.

Причины, которые вызывают движение и внутренние напряжения в средах - это силы, которые можно разделить на *внутренние* и *внешние*. *Внешние силы*, по отношению к системе – те, которые вызваны другими системами, а *внутренние* – частями

системы. В недеформированном теле расположение молекул соответствует состоянию его теплового равновесия. При этом все его части находятся друг с другом и в механическом равновесии. Это значит, что если выделить внутри тела какой-нибудь объем, то равнодействующая всех сил, действующих на этот объем со стороны других частей, равна нулю.

При деформировании же расположение молекул меняется и тело выводится из состояния равновесия, в котором оно находилось первоначально. В результате в нем возникают силы, стремящиеся вернуть тело в состояние равновесия. Эти возникающие при деформировании внутренние силы называются внутренними напряжениями. Если тело не деформировано, то внутренние напряжения в нем отсутствуют.

Выделим в сплошной среде элементарную площадку ΔS с нормалью \vec{n} , на эту площадку действует внешняя сила $\Delta \vec{F}$, находящейся со стороны площадки по направлению нормали (Рис 2.1.а).

На рис 2.1.б. показано разложение действующей силы на нормальную $\Delta \vec{F}_n$ и касательную $\Delta \vec{F}_\tau$ составляющую. Напряжение приложенной силы в точке определяется как предел отношения

$$\vec{p} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S}. \quad (2.1)$$

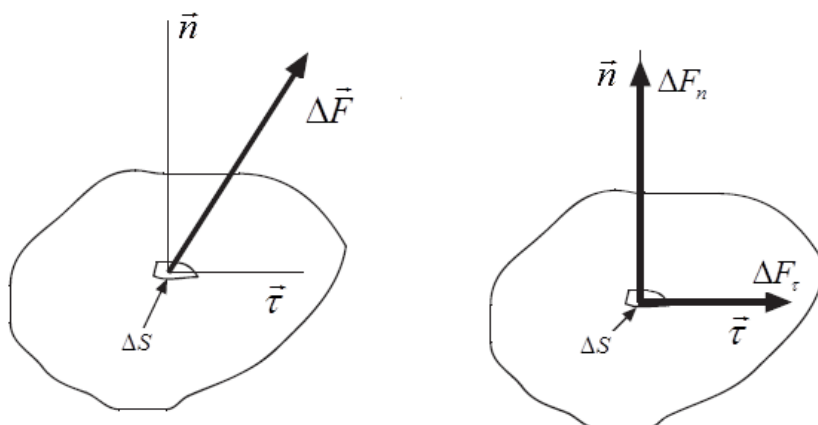


Рис 2.1. Разложение вектора напряжений на составляющие
 При этом нормальные напряжения в точке определяются как

$$p_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta S}, \quad (2.2)$$

а касательные,

$$\tau = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F_\tau}{\Delta S}. \quad (2.3)$$

Если перенести данные рассуждения на трёхмерный случай и рассмотреть элементарный объём (параллелепипед), с действующими в нём напряжениями, то на каждой площадке параллелепипеда получим следующее разложение напряжений (Рис. 2.2.).

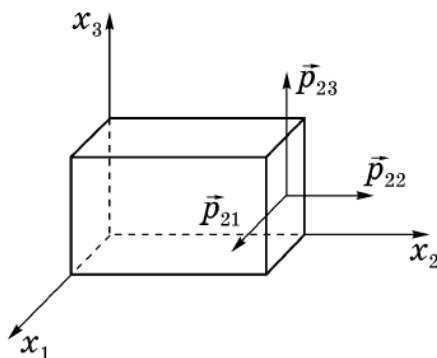


Рис.2.2. Разложение тензора напряжений на компоненты.

Компоненты p_{ij} образуют тензор второго ранга, названный *тензором напряжений*, которому можно поставить в соответствие матрицу

$$p_{ij} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -p_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Компоненты с одинаковыми индексами p_{ii} называются *нормальными напряжениями*, а компоненты p_{ik} ($i \neq k$) – *касательными напряжениями*, или *напряжениями сдвига*.

Многие определяющие соотношения в механике отражают связь тензора напряжений и тензора скоростей деформации, чем однозначно описывают свойства материала. Характерной чертой

движения сплошной среды является ее *деформация*, т. е. изменение расстояния между отдельными точками среды. Компоненты тензора скоростей деформаций могут быть заданы следующим выражением:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right). \quad (2.5)$$

2.3. Давление.

Воздействие силы ΔF_n на элементарную площадь ΔS , заданное выражением

$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta S}, \quad (2.6)$$

назовём давлением. Причём это относится только к нормальной компоненте воздействующей силы и соответствует p_{ii} компонентам тензора напряжений. Измеряется давление в H / m^2 или $Па$. Чаще всего в задачах встречаются $kПа$ или $MПа$, так как давление в $1 Па$ является достаточно маленьким. Большое количество единиц для измерения давления указано в приложении 4.

Абсолютное давление - величина измеренная относительно давления равного абсолютному нулю. Другими словами давление относительно абсолютного вакуума. *Барометрическое давление* — это абсолютное давление земной атмосферы. Свое название этот тип давления получил от измерительного прибора барометра, который как известно определяет атмосферное давление в определенный момент времени при определено температуре и на определенной высоте над уровнем моря. Относительно этого давления определяются *избыточное давление* и *вакуум*. Манометрическим давлением называется разность между абсолютным давлением и барометрическим. *Избыточное давление* - положительная разность между измеряемым давлением и барометрическим. То есть избыточное давление это величина на которую измеряемое давлением больше барометрического. *Вакуум* или по-другому *вакуумметрическое давление* это величина на которую измеряемое давление меньше барометрического. Если избыточное давление

обозначается в положительных единицах, то вакуум в отрицательных (или подразумевает отрицательный знак, когда имеется в виду вакуум). Таким образом, абсолютное давление определяется, как

$$P_{абс} = P_{изб} + P_{атм}; \quad (2.7)$$

$$P_{абс} = P_{атм} + P_{вак}.$$

Атмосферное давление изменяется с высотой относительно уровня моря, значения приведены в Приложении 6. Атмосферное давление на уровне моря 101.3 кПа , чаще упрощают, как 100 кПа . Также его принято измерять миллиметрами ртутного или водного столба. Для вычисления давления столба жидкости используют формулу

$$p = \rho gh, \quad (2.8)$$

где ρ - плотность жидкости, а h - высота столбика. На рис. 1.3. наглядно проиллюстрированы виды давлений, и их связь с атмосферным давлением.

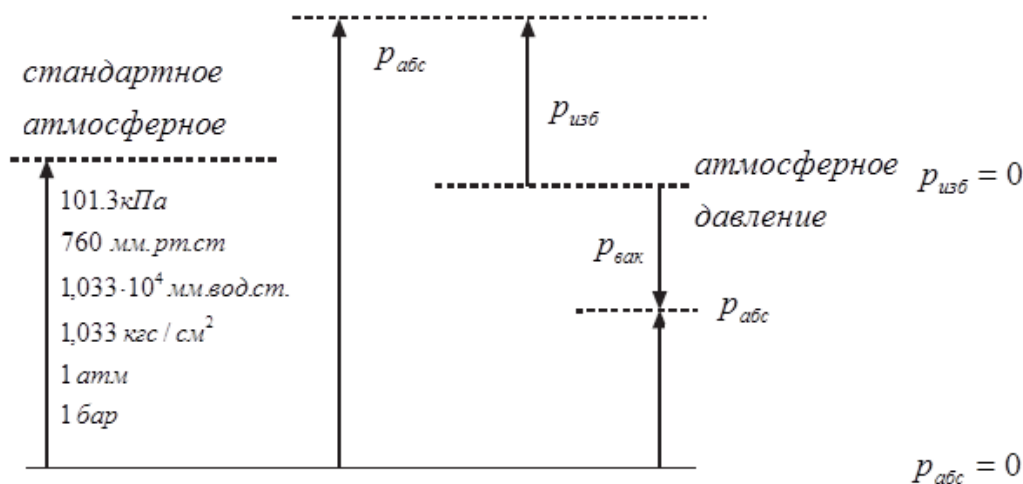


Рис.1.3. Шкала давлений

2.4. Температура.

Чаще всего температуру измеряют по шкале Цельсия, Фаренгейта и Кельвина. Понятие абсолютной температуры было введено лордом У. Томсоном (Кельвином), в связи с чем, шкалу абсолютной температуры называют шкалой Кельвина или термодинамической

температурной шкалой. Единица абсолютной температуры — кельвин $[K]$. Абсолютный ноль определён как $0 K$, что равно $-273.15^\circ C$. Для перевода температуры из шкалы Цельсия в шкалу Кельвина используют следующее правило:

$$\text{_____ } K = \text{_____ } ^\circ C + 273.15. \quad (2.9)$$

Переход из шкалы Фаренгейта к шкале Цельсия следует пользоваться следующим выражением, оно более сложное чем предыдущее:

$$\text{_____ } ^\circ C = 5/9(\text{_____ } ^\circ F - 32), \quad (2.10)$$

и обратный переход:

$$\text{_____ } ^\circ F = 9/5 \cdot \text{_____ } ^\circ C + 32. \quad (2.11)$$

По умолчанию, термодинамические формулы, подразумевают использование температуры по шкале Кельвина. *Нормальными (стандартными) условиями*, принятыми по соглашению температура и давление, являются физические условия, с которыми обычно соотносят свойства веществ (пишут – при нормальных условиях...).

$T_0 = 0^\circ C = 273.15 K$, $p_0 = 760 \text{ мм.рт.ст.} = 101325 \text{ Па}$, при этих условиях, молярный объём газа $V_0 = 0.022414 \text{ м}^3 / \text{моль}$.

2.5. Свойства жидкостей и газов.

Свойства жидкостей и газов во многом отличаются, однако в ряде механических явлений их поведение определяется одинаковыми параметрами и идентичными уравнениями. В механике с большой степенью точности жидкости и газы рассматриваются как сплошные, непрерывно распределенные.

При изучении движения жидкостей и газов, необходимо учитывать их свойства, которые не всегда являются константами вещества. Рассмотрим в разделе основные свойства жидкостей.

Рассмотрим элементарный объём ΔV массой Δm , тогда плотностью будет называться предел

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}. \quad (2.12)$$

В общем случае плотность является функцией от координат и времени

$$\rho = \rho(x, y, z, t), \quad (2.13)$$

но в ряде задач, плотность жидкости считают постоянной и тогда записывают $\rho = const$. В конечном виде, выражение (2.12) принимает вид:

$$\rho = \frac{m}{V}. \quad (2.14)$$

Таким образом, плотность определяется как отношение массы вещества к объёму им занимаемому. Очевидно, что плотность измеряется в $[кг/м^3]$.

Удельный вес – физическая характеристика вещества, равная отношению элемента веса dP к его объёму dV :

$$\gamma = \frac{dP}{dV}, \quad (2.15)$$

где вес P определяется как $P = mg$, тогда, для однородного вещества (тела):

$$\gamma = \frac{P}{V} = \rho g, \quad (2.16)$$

где $g = 9.80665 \text{ м/с}^2$ - ускорение свободного падения.

Удельная плотность вещества S определяется как отношение плотности вещества к плотности воды, следовательно

$$\rho = S\rho_*, \quad \gamma = S\gamma_* \quad (2.17)$$

Пример.

Определить удельный вес и удельную плотность нефти, если её плотность 867 кг/м^3 .

Решение.

$$\gamma = \frac{P}{V} = \rho g = 867 \cdot 9.81 \approx 8505 \text{ Ё / м}^3;$$

$$S = \frac{867}{1000} = 0.867.$$

Объём занимаемый газом зависит от давления и температуры. Газ является *сжимаемой* средой, т.е. его плотность не является постоянной. В жидкости объём ей занимаемый слабо зависит от давления и температуры и сжимаемостью жидкости часто пренебрегают. В таком случае говорят что жидкость *несжимаема*, т.е. $\rho = const$.

Если же даже маленькое изменение плотности, а следовательно и объёма имеет роль в решении задачи, то используют объёмный модуль упругости (модуль объёмного сжатия) B :

$$B = -V \left. \frac{\Delta p}{\Delta V} \right|_{T=const} = \rho \left. \frac{\Delta p}{\Delta \rho} \right|_{T=const} \quad (2.18)$$

Для воды при 20°C , $B = 2100 \text{ МПа}$, то есть, чтобы изменить объём занимаемой жидкостью на 1% необходимо приложить 21 МПа . Из этих соображений чаще всего жидкости принимают несжимаемыми.

Объёмный модуль упругости также используется для определения скорости звука c в среде:

$$c = \sqrt{B / \rho}. \quad (2.19)$$

Таким образом, для воды при 20°C скорость звука $c = 1450 \text{ м/с}$.

Рассмотрим уравнение Клапейрона (Меделеева-Клапейрона), которое, устанавливает зависимость между давлением p , молярным объёмом V_M и абсолютной температурой T идеального газа:

$$pV_M = RT. \quad (2.20)$$

R – Универсальная газовая постоянная (Менделеев, 1874г.) — константа, равная работе расширения одного моля идеального газа в изобарном процессе при увеличении температуры на 1 K .
 $R = 8.3144598 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{K})$.

На основании закона Клапейрона, плотность любого газа ρ при температуре T и давлении p может быть рассчитана по формуле:

$$\rho = \rho_0 \frac{T_0 p}{T p_0} = \frac{M}{22.4} \frac{273 p}{T p_0}, \quad (2.21)$$

где $\rho_0 = M/22.4 \text{ кг}/\text{м}^3$ - плотность газа при нормальных условиях, M - молярная масса газа $\text{кг}/\text{кмоль}$. T - температура в K ., p_0 - давление, соответствующее нормальным условиям.

Ещё одним важным свойством для жидкостей является поверхностное натяжение. Свойство поверхности жидкости сокращаться можно истолковать как существование сил, стремящихся сократить эту поверхность. Этот эффект влияет при изучении теории фильтрации и взаимодействия веществ на границах разделов фаз. Поверхностное натяжение σ позволяет образовывать капельки жидкости и обусловлено силами молекулярного притяжения. Равнодействующая сил, действующих на все молекулы, находящиеся на границе свободной поверхности, и есть сила поверхностного натяжения. В целом она действует так, что стремится сократить поверхность жидкости. *Капиллярное давление* - разность давлений по обе стороны искривлённой поверхности раздела двух жидкостей или жидкости и газа. Рассмотрим свободную выпуклую поверхность, например, капля аэрозоля в газовой фазе (Рис.2.4.).

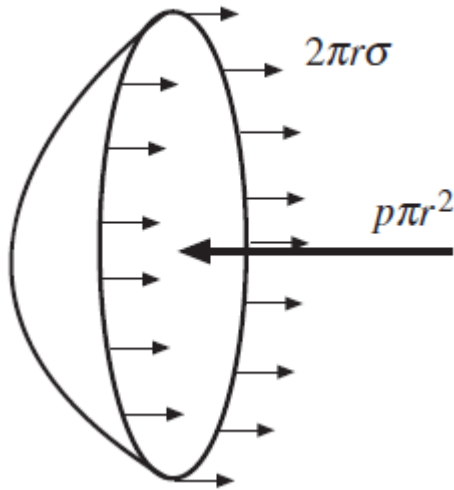


Рис.2.4. Выпуклая свободная поверхность

Для выпуклой сферической поверхности получим капиллярное давление:

$$p = \frac{2\sigma}{r}. \quad (2.20)$$

Так как сила внутри капли уравнивается. В случае мыльного пузырька давление, которое испытывает находящийся внутри него газ, равно

$$p = \frac{4\sigma}{r}. \quad (2.21)$$

так как у пузырька две поверхности – наружная и внутренняя, каждая из которых создает капиллярное давления. Капиллярные явления хорошо наблюдаются в капиллярных трубках.

Одним из важнейших свойств реальных жидкостей и газов является *вязкость*. Подробно это свойство рассматривается в следующем пункте.

Вопросы и задания.

1. Какие модели реальных объектов вы знаете?
2. В чем заключается гипотеза сплошности?
3. Чем модель сплошной среды отличается от модели абсолютно твёрдого тела?
4. Что такое сила?

5. В чем разница между сосредоточенными и распределёнными силами?
6. Какие два класса сил различают в механике сплошной среды? Опишите их, приведите примеры.
7. Что такое деформации и напряжения? Как они связаны?
8. Тензор напряжений. В чём необходимость использования тензорных величин в механике сплошной среды?
9. Объясните с точки зрения механики сплошных сред понятие «давление»?
10. В чём различие касательных и нормальных напряжений в среде?
11. Какие виды давления вы знаете?
12. Что понимаются под нормальными или стандартными условиями?
13. Опишите основные свойства жидкостей и газов.
14. При исследовании бурового раствора на рычажных весах показатель 1,07. Какую физическую величину показывают данный прибор?
15. Сравните свойство сжимаемости у жидкостей и газов.