Гидроаэромеханика

Составитель асс. каф БНГС СамГТУ, магистр Никитин В.И.

Занятие 1. АНАЛИЗ РАЗМЕРНОСТЕЙ

1.1. Исторический очерк.

Анализ размерностей возник как результат естественного распространения на физические явления понятий геометрического подобия, отношения и пропорции, знакомых еще грекам. Так, Дж. Фурье (1768—1830) упоминал, что греки знали размерности площади и объема. Сам Фурье впервые установил, что существуют определенные основные единицы измерения, относительно которых каждая физическая величина имеет определенные размерности, которые надо записывать как показатели степеней основных единиц измерения.

Еще Г. Галилей (1564—1642) с помощью анализа размерностей впервые пришел к выводу, что величина безопасной нагрузки на единицу объема обратно пропорциональна длине, и предвосхитил многие другие классические результаты в механике. Затем анализ размерностей применяли Э.Д. Мариотт (1620—1684) и И. Ньютон (1643—1727). Дж.У. Рэлей (1842—1919) всегда ссылался на подобие и динамическое сходство. Позже анализ размерностей с успехом использовали в разных областях науки.

Идеи, лежащие в основе анализа размерностей, по сути очевидны и просты и покоятся на физических законах (связи между физическими величинами), они не зависят от произвола в выборе основных единиц измерения. Из этой идеи на основе простых рассуждений и применения простого математического аппарата можно вывести важное следствие: функции, выражающие физические закономерности, должны обладать некоторым фундаментальным свойством, которое в математике называется обобщенной однородностью или симметрией. Это свойство позволяет записать искомые закономерности в безразмерном виде, инвариантном относительно выбора систем единиц измерения, с меньшим числом аргументов (уже безразмерных) и тем самым упростить их (закономерностей) нахождение.

1.2. Основные термины.

Первичная величина - физическая величина, которая вводится для данного класса явлений безотносительно к другим величинам и численное значение которой определяется посредством прямого измерения (при этом единица измерения выбирается произвольно).

Вторичная величина - физическая величина, которая выражается через первичные по определению (на основе физических представлений, законов, т.е. определяющих уравнений).

Единица измерения - физическая величина, принятая по соглашению в качестве основы (стандарта) для сравнения всех однородных (т.е. имеющих одну и ту же физическую природу) величин. Единицы измерения физических величин подразделяются на *основные* и *производные*.

Основная единица измерения - единица измерения *первичной величины*, то есть единица измерения вводимая из опыта с помощью природных или искусственных эталонов. Так, например, для изучения механических движений известными способами вводятся первичные, или основные, единицы измерения, такие, как длина, время и масса, причем здесь имеется определенный произвол. Так, для описания тех же механических явлений можно принять эталоны для силы, длины и времени.

Производная единица измерения - единица измерения *вторичной величины*, выражаемая через основные единицы с помощью *формулы размерности*. Определение физической величины всегда указывает способ ее измерения, по крайней мере мысленный. Так, плотность, согласно определению, представляет собой отношение массы к величине заключающего ее объема.

Система единиц - совокупность основных единиц измерения, построенная на основе определенных единиц для величин, принятых в качестве первичных. Система единиц включает в себя количество единиц достаточное для измерения параметров (характеристик) рассматриваемого класса явлений. В различных областях науки и техники выгодно и удобно выбирать в качестве первичных единиц измерения свои местные системы первичных единиц измерения. Поэтому возникает задача о переходе из одной системы единиц к другой. Так, для измерения характеристик механических явлений до сих пор употребительна в теоретических исследованиях система CGS (СГС: сантиметр-грамм-секунда). В этой системе в качестве первичных единиц измерения приняты сантиметр, грамм и секунда. Производными в системе CGS являются $см./с.$ (скорость), $г./см^3.$(плотность).

Другой системой единиц измерения является система MKS, в которой в качестве основных приняты метр, килограмм-сила (кгс) и секунда. Здесь единица силы (кгс) представляет собой силу, сообщающую массе, равной массе эталона килограмма, ускорение, равное 9,80665 $м./с^2$. С 1960 года употребляется также Международная система единиц СИ (System International d'Unites), в которой основными единицами измерения являются метр, килограмм-масса и секунда.

Можно усмотреть, что системы единиц CGS и СИ принадлежат к одному и тому же классу систем, система MKS — к другому. *Классом систем единиц измерения* называется совокупность систем единиц измерения, различающихся между собой только величиной, но не физической природой основных единиц измерения.

Таким образом, мы видим, что единицы измерения не являются застывшей системой — всякий новый успех в развитии техники измерений, равно как и открытие новых явлений, может вести к переопределению основных единиц измерения. Неоднократно предлагались другие системы, использование которых оказывалось удобным для определенного круга задач. Так, в астрономии удобно вводить единицу длины, называемую астрономической единицей (а.е.), которая является внесистемной единицей длины и равна среднему расстоянию от Земли до Солнца:

$$1\text{а.е.} = 1{,}49\,597\,870 \cdot 10^8\,км. \quad (\pm 2\,км.)$$

Таким образом, не существует лучшей или основной системы единиц измерения.

Выражение производной единицы измерения через основные единицы измерения называется ее *размерностью*. *Размерность* выражает качественную сущность физической величины, измеренной с помощью данной системы единиц измерения, и получается автоматически из определения этой величины. Для обозначения размерности физических величин вводят символы. В системе CGS и СИ символы единиц измерения для основных физических величин будут: L для единицы длины, T для единицы времени и M для единицы массы. Размерность некоторой физической величины f принято по предложению Максвелла обозначать через [f]. Важно подчеркнуть, что размерность определяется классом систем единиц измерения и в разных классах систем измерения размерность одной и той же физической величины будет различна. Так, например, размерность силы F в классе MLT будет $\left[F\right]=MLT^{-2}$, а в классе MKS $\left[F\right]=K$. Таким образом *функция размерности* для какой либо физической величины φ представляет собой степенной одночлен, например в системе СГС или СИ функция размерности будет иметь вид:

$$\left[\varphi\right]=M^{\alpha}L^{\beta}T^{\gamma}, \qquad (1.1)$$

где аргументы L, T, M выступают как положительные числа, которые можно перемножать или делить. Величины, численное значение которых одинаково во всех системах единиц измерения внутри данного класса, называются *безразмерными*, то есть для таких величин показатели $\alpha=\beta=\gamma=0.$. Очевидно, что размерность безразмерной величины равна единице, а показатель степени равен 0. Все остальные величины называются размерными. *Размерная величина* - величина, численное значение которой зависит от выбора основных единиц измерения, показатель степени не равен нулю.

Говорят, что набор величин $x_1, x_2, \dots x_k$ имеет *независимые размерности*, если размерность ни одной из этих величин нельзя представить в виде произведения степеней размерностей остальных величин. Например, размерности плотности $[\rho] = ML^{-3}$, ускорения $[a] = LT^{-2}$ и силы $\left[F\right] = MLT^{-2}$ *независимы*; размерности длины $[l] = L$, скорости $[v] = LT^{-1}$ и ускорения $[a] = LT^{-2}$ *зависимы*, так как между размерностями этих последних величин имеет место соотношение $[l][a] = [v^2]$.

Механика жидкости и газа использует физические величины. Есть основные величины, через которые выражаются все остальные. Например, сила может быть выражена из второго закона Ньютона

$$F = ma. \tag{1.2}$$

Проанализируем размерность параметров, входящих в это выражение в системе $M(\textit{масса}), L(\textit{длина}), T(\textit{время})$:

$$[F] = \left[M\frac{L}{T^2}\right]. \tag{1.3}$$

Таким образом, видно, что сила может быть записана через массу, длину и время. Единицей силы принято считать Ньютон,

$$[H] = \left[\textit{кг}\frac{\textit{м}}{c^2}\right]. \tag{1.4}$$

В системе СИ, массу всегда измеряют в килограммах, а силу в Ньютонах. Вес тела измеряется тоже в Ньютонах

$$P = mg. \tag{1.5}$$

Ускорение свободного падения принято считать $g = 9.81\ \textit{м}/c^2$. Вообще, эта величина не является константой. На поверхности Земли она принимает значения от $9.77\ \textit{м}/c^2$ на высокой горе и до $9.83\ \textit{м}/c^2$ в океанской впадине.

Наиболее часто используемые приставки СИ (десятичные приставки), указаны в таблице 1.1. Приложения 1. Десятичные приставки служат для сокращения количества нулей в численных значениях физических величин. Основные величины указаны в таблице 1.2. (Приложение 1), в Приложении 2 указаны производные единицы, используемые в механике жидкости и газа.

В нефтегазовой отрасли часто используются американские нефтепромысловые единицы измерения. Однако при проведении инженерных расчётов по всему миру часто используются единицы метрической системы. Переводные коэффициенты для этих двух систем представлены Приложении 3.

Анализ размерностей - метод нахождения связи между физическими величинами, существенными для исследуемого процесса или явления, основанный на анализе размерностей величин. Основное положение метода – любое уравнение должно быть размерно однородным.

Метод размерностей - метод определения числа и структуры безразмерных степенных комплексов, построенных из величин, существенных для данного процесса, на основе сопоставления размерностей этих величин.

1.3. Теория подобия. $\pi-$теорема.

Одно из фундаментальных свойств природных, технологических, многих экономических и социальных объектов – симметрия (*подобие, повторяемость, воспроизводимость*) – находит свое отражение в их математических моделях. Наличие какого-либо вида симметрии у изучаемого явления означает большую простоту объекта в сравнении с его менее симметричным аналогом. На этом основываются широко применяемые методы упрощения математических моделей и, следовательно, методы упрощения их анализа. Они состоят в понижении порядка системы уравнений, образующих модель, в уменьшении числа переменных, от которых зависят искомые величины, или числа постоянных параметров, определяющих процесс, и т.д. Инвариантность явлений и процессов по отношению к изменению единиц измерения находит свое воплощение в так называемой $\pi -$ теореме (читается: "пи-теорема").

В конкретных теоретических и экспериментальных исследованиях, как правило, проблема сводится к отысканию (одной или нескольких) предполагаемых зависимостей (функций)вида

$$x = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k, x_{k+1} \ldots, x_n), \tag{1.6}$$

Здесь x — определяемая физическая величина, которая в данном исследовании ищется, $x_1, \ldots, x_n$— величины, от которых искомая величина x зависит, среди них одни могут быть постоянными в данном явлении, другие — переменными; все они называются определяющими параметрами или аргументами искомой функции размерности f.

Найдем теперь структуру функции f при предположении, что эта функция выражает собой некоторую физическую закономерность — закон, не зависящий от выбора систем единиц измерения.

Разбиение аргументов на две группы в (1.6) сделано следующим образом: первые k величин $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ $(k \le n)$ имеют независимые размерности (число основных единиц измерения должно быть больше или равно k, и среди механических величин обычно имеется не более трех с независимыми размерностями), а размерности остальных параметров $x_{k+1}...,x_n$ зависимы от них, то есть выражаются в виде произведений степеней от размерностей параметров $x_1,x_2,x_3,...,x_k$:

$$\begin{aligned}
&[x_{k+1}]=[x_1]^{\alpha_{k+1}}\dots[x_k]^{\gamma_{k+1}}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&[x_{k+i}]=[x_1]^{\alpha_{k+i}}\dots[x_k]^{\gamma_{k+i}}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&[x_n]=[x_1]^{\alpha_n}\dots[x_k]^{\gamma_n}
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Если размерности всех определяющих параметров независимы, то $k=n$; если все определяющие параметры безразмерны, то $k=0$. Таким образом, $0\le k\le n$.
Т.е. в зависимости вида $x=f(x_1,x_2,x_3,...,x_k,x_{k+1}...,x_n)$, зависимыми параметрами являются $x,x_{k+1}...,x_n$, а следовательно можно составить $m=(n-k+1)$.

Вернувшись к первоначальной зависимости (1.6) показать от противного, опираясь на предполагаемую зависимость (1.6), что размерность определяемой величины x должна обязательно выражаться через размерности определяющих параметров первой группы $x_1,x_2,x_3,...,x_k$:

$$[x\ ]=[x_1]^{\alpha}\dots[x_k]^{\gamma} \tag{1.8}$$

Заменим теперь в (1.6) параметры с зависимыми размерностями $x,x_{k+1}...,x_n$ через безразмерные величины $\pi,\pi_{k+1}\pi_n$, определив их выражениями

$$\pi = \frac{x}{x_1^{\alpha} \ldots x_k^{\gamma}}, \pi_{k+1} = \frac{x_{k+1}}{x_1^{\alpha_{k+1}} \ldots x_k^{\gamma_{k+1}}}, \ldots,$$
$$\pi_{k+i} = \frac{x_{k+i}}{x_1^{\alpha_{k+i}} \ldots x_k^{\gamma_{k+i}}}, \ldots, \pi_n = \frac{x_n}{x_1^{\alpha_n} \ldots x_k^{\gamma_n}}. \quad (1.9)$$

Тогда вместо (1.6) с учетом (1.8), (1.9) получим:

$$\pi = \frac{1}{x_1^{\alpha} \ldots x_k^{\gamma}} f\left(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k, x_1^{\alpha_{k+1}} \ldots x_k^{\gamma_{k+1}} \pi_{k+1}, \ldots, x_1^{\alpha_n} \ldots x_k^{\gamma_n} \pi_n\right), \quad (1.10)$$

Или в других обозначениях

$$\pi = F\left(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k, \pi_{k+1}, \ldots, \pi_n\right), \quad (1.11)$$

Теперь покажем, что функция F от параметров $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ на самом деле не зависит. Очевидно, значения величин $\pi, \pi_{k+1}, \ldots, \pi_n$ вообще не зависят от выбора систем тех единиц измерения, через которые выражаются k размерно независимых величин $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$. Далее можно показать, что всегда можно перейти к такой системе единиц измерения в данном классе, что любой из параметров с независимыми размерностями $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$, например x_1, изменится в произвольное число раз, а остальные размерные параметры $x_2, x_3, \ldots, x_k$ останутся неизменными (например при переходе из СГС в СИ или обратно). При таком переходе, как было сказано выше, останутся неизменными также и безразмерные аргументы $\pi, \pi_{k+1}, \ldots, \pi_n$ в функции (1.11) и ее значение π. Но отсюда следует, что функция F в действительности от аргумента x_1 не зависит. Аналогично показывается, что она не зависит и от аргументов $x_2, x_3, \ldots, x_k$, поэтому вместо (1.11) будем иметь

$$\pi = \Phi\left(\pi_{k+1}, \ldots, \pi_n\right), \quad (1.12)$$

а сама искомая зависимость (1.6) примет вид: $\pi = f/(x_1^{\alpha} \ldots x_k^{\gamma})$, то есть

$$x = f(x_1 \ldots x_n) = x_1^{\alpha} \ldots x_k^{\gamma} \Phi\left(\frac{x_{k+1}}{x_1^{\alpha_{k+1}} \ldots x_k^{\gamma_{k+1}}}, \ldots, \frac{x_n}{x_1^{\alpha_n} \ldots x_k^{\gamma_n}}\right) =$$
$$= x_1^{\alpha} \ldots x_k^{\gamma} \Phi\left(\pi_{k+1}, \ldots, \pi_n\right) \quad (1.13)$$

Иными словами, *число аргументов в искомой зависимости (1.6), записанной в безразмерном виде (1.12), сокращается на число, равное числу определяющих параметров с независимыми размерностями.* Этот общий вывод и составляет главное содержание анализа размерностей, известное в научной литературе как $\pi-$*теорема*. В нем, собственно, и заключается источник полезных приложений метода теории размерностей к исследованию физических задач.

Сделаем два дополнительных замечания к П-теореме.

1. Анализ размерностей не дает в общем случае способа определения функции Ф в (1.12) или (1.13) от n - k аргументов, которая в случае $k = n$ превращается в константу. Для окончательного установления искомой зависимости (1.13) на этом этапе необходимо обращаться либо к эксперименту, либо к теории, решая соответствующую математическую задачу.
2. Основным и первоначальным этапом в постановке задач является выбор модели и схематизация свойств искомого решения. Если задача сформулирована как математическая (имеются система уравнений, начальные и краевые условия, дополнительные условия на искомое решение), то всегда легко выписать полную таблицу аргументов в искомых функциях вида (1.6). Опыт показывает, что схематизация и отыскание рациональной постановки задачи и указание существенных определяющих параметров представляют собой наибольшие из всех трудностей при применении анализа размерностей для решения задач. Не пропустить важные определяющие параметры и не включать в этот список малосущественные параметры — вот что здесь главное. Само использование рецептуры анализа размерностей ($\pi-$*теоремы*) просто.

<u>Примечание</u> Если в (1.6) x и аргументы функции f представлены независимыми размерностями, то определить связь между параметрами методами анализа размерностей не представляется возможным. Также важно отметить, что в части литературы зависимость вида (1.6) представляют со смещенными индексами,

например $x_1 = f(x_2, x_3, ..., x_n)$, тогда формулировка $\pi-$*теоремы* представляется в следующем виде:

Пусть имеется функциональная связь

$$x_1 = f(x_2, x_3, ..., x_n), \qquad (1.14)$$

где $n-$общее количество переменных. Пусть эта связь не зависит от выбора системы единиц измерения (величина x_1 – искомая, а остальные – задаваемые). Из них k переменных являются независимыми, т.е. первичными. Тогда можно составить $m=(n-k)$ безразмерных комбинаций (групп), таких, что исходная зависимость f будет эквивалентна зависимости между k безразмерными величинами

$$\pi_1 = F(\pi_2, ...\pi_k). \qquad (1.15)$$

Основной смысл $\pi-$теоремы состоит в том, что всякое физическое соотношение между размерными величинами можно сформулировать как соотношение между безразмерными величинами. Этот факт лежит в основе теории подобия, играющей важную роль в механике сплошной среды.

Пример.

При медленном стационарном движении сферы в вязкой жидкости величина сопротивления F зависит от вязкости μ жидкости, скорости v и радиуса r сферы. Т.е. известно что

$$F = f(\mu, v, r).$$

Установить зависимость между переменными.

Решение.

Проанализируем размерности: $n=4$,

$$[F]=[MLT^{-2}], \quad [r]=[L], \quad [v]=[LT^{-1}], \quad [\mu]=[ML^{-1}T^{-1}]$$

Независимых величин $k=3$, следовательно можно составить 1 безразмерную комбинацию:

Выберем в качестве величин с независимыми переменными, $\mu, v, r,$ тогда безразмерная комбинация всех переменных будет следующая:

$$\frac{F}{\mu v r} = const,$$

а следовательно, $F = const \cdot \mu v r$. Экспериментальным путём доказано, что константа $const = 6\pi$, что подтверждается гидродинамическим решением данной задачи.

Вопросы и задания.

1. Основное положение метода анализа размерностей?
2. Чем полезен анализа размерностей при решении физических задач?
3. Если сила, длина и время выбраны в качестве основных единиц измерения, то какую размерность будет иметь масса?
4. Используя $\pi -$теорему сгруппируйте в безразмерную величину плотность, скорость, диаметр и динамическую вязкость.
5. Можно ли при решении задач осуществлять переход от размерных единиц к безразмерным? Возможен ли обратный переход?