Д. Н. Цивинский

# ПРИМЕНЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКОГО МЕТОДА АНАЛИЗА В НЕФТЕГАЗОВОМ ДЕЛЕ

Учебное пособие

Самара 2014

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

*ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ*

**«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Д.Н. Цивинский

# применение статистического метода анализа в нефтегазовом деле

Допущено Учебно-методическим объединением вузов Российской Федерации по нефтегазовому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки дипломированных специалистов 130500 «Нефтегазовое дело»

**Самара 2014**

УДК 622.24 {519.22:681.3(076.5)}
Ц57

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук В.А. Акулов,
канд. техн. наук В.К. Давыдов

**Цивинский Д.Н.**

Ц57 **Применение статистического метода анализа в нефтегазовом деле**: Учеб. пособ./*Д.Н.Цивинский.* - 2-е изд., испр. и доп. - Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2014. - 377 с., с илл.

ISBN 978-5-7964-1591-7

Рассматривается применение статистического метода анализа к решению задач технологии строительства и эксплуатации скважин. Достаточно подробно рассмотрены вероятности событий и распределения случайных величин с точки зрения причинно-следственных связей, необходимости и случайности. Произведено обобщение различных распределений и обоснование нормального распределения как результата хаоса и динамичности множества причинно-следственных связей. Описаны все виды вероятностей - житейская, классическая, математическая и статистическая, метод моментов, вопросы проверки статистических гипотез.

Основам математической статистики предшествуют статьи о специальных терминах и понятиях, общенаучных понятиях и категориях. Определение многозначных понятий даны в контексте математической статистики, теории вероятностей и явлений переноса импульса, энергии и массы. Для всех терминов и понятий приведено их этимологическое происхождение. Повсеместно произведено цитирование ряда статей словаря В.И.Даля.

Рассмотрены также важные для образованного инженера термины, понятия и категории, имеющие общенаучное и философское значение, освещены вопросы имеющие непосредственное отношение к процессу познания. Всего в учебном пособии более 360 словарных статей.

Предназначено для самостоятельной работы студентов, обучающихся по направлению "Нефтегазовое дело", специальности 130401, 130501, 130503, 130504, а также может быть полезно аспирантам и инженерам при анализе промысловых данных.

УДК 622.24 {519.22:681.3(076.5)}
Ц57

ISBN 978-5-7964-1591-7

"Цель расчётов - понимание, а не числа."
(*Ричард Хэмминг*, 1915-1998).

## *С Л О Ж Н О Е  В  П Р О С Т О М*

Статистический метод анализа - метод, позволяющий по **части** судить о **целом**. При этом *часть* целого обычно представляет собой разрозненные факты, события, числа любого *количества* и *качества**, а о самом *целом* может не быть даже малейшего представления. Более того, достаточно часто череда фактов, событий, чисел при анализе рассматривается вне пространства и вне времени. Другими словами, *причинно-следственные связи* в явном виде может быть и присутствуют, но не рассматриваются. Как показывает практика, анализ подобной информации вне пространства и времени по существу оказывается далеко не простой задачей.

Следующая особенность статистического метода анализа заключается в том, что разрозненные факты, события, числа (**признаки**) в большинстве случаев являются результатом действия <u>множества</u> причин (факторов), как соизмеримых, так и несоизмеримых по силе или интенсивности и, что немаловажно, о которых у исследователя также может не быть даже малейшего представления.

Возможности человека достаточно ограничены - абсолютное знание и бесконечность ему недоступны. Быть может, поэтому для человека очень важно, имея некоторое скудное количество опять же фактов, событий, чисел, распределённых в пространстве и/или во времени, произвести мысленное моделирование и в результате анализа сделать более или менее надёжный вывод о содержании (функционировании) объекта (системы) или сущности явления (процесса), сделать прогноз. С другой стороны, едва ли не более важно мысленно обобщить вереницу событий, поступков, явлений, фактов или просто чисел и выявить

*Примечание 1. Это могут быть погода, урожайность, производство и потребление материальных благ, экономические данные, положения звёзд и планет в связи с какими-либо событиями, психотипы людей, жизненные ситуации, удачливость в них, игры азартные и не очень, слова, состояния души, социальные явления, частота появления какого-либо признака в популяциях, рождаемость, смертность, заболеваемость, излечиваемость, преступность, спортивные и производственные результаты, аварийность, ДТП, браки и разводы, результаты научных и прикладных исследований и т.д. Практически всё что угодно, любая информация, которую можно представить численно. Единственное условие - наблюдений должно быть много; статистический метод анализа невозможен в случаях единичных явлений, событий, фактов. В таких случаях продуктивен детерминистический подход. И ещё одно замечание. Можно предположить, что сознательное мысленное моделирование распределений достаточно проблематично, решение может появиться в сознании извне...

скрытую закономерность в повторяющихся **признаках** (фактах, событиях, числах). Первому человек начинает учиться с момента рождения и относительно легко, мысленное моделирование физического мира - естественный процесс, нормальная жизнь без него невозможна, о чём и свидетельствуют люди с психическими аномалиями и без оных. Второму - значительно позже и не всегда успешно. Вполне возможно, что причины кроются в закономерностях физиологического развития человеческого мозга. Как это понимать?

Из физиологии известно, что человек рождается с недоразвитым мозгом, и, по мнению части психологов, мозг новорождённого - "чистая доска" (tabula (tabellae) rasae). И поскольку, родившись, человечек попадает в трёхмерный мир, то и мозг формируется для анализа трёхмерного физического мира и событий, происходящих в нём; в мозге формируются соответствующие нейронные ансамбли. Вполне возможно, что анализ временных промежутков между событиями при этом либо не производится вообще, либо отодвигается на второй план. Фактически, в первые годы жизни одна из важнейших категорий - время - ребёнком не воспринимается, и разговоры о днях, часах и минутах лишены смысла. Понимание длительности процессов, временных интервалов приходит к годам семи, иногда позже. Способность к моделированию пространственно-временных связей наступает в отроческом возрасте и позже. А понимание **течения времени** приходит в зрелом возрасте. Но и у взрослого человека со временем даже очень непростые отношения...*

Необходимость сопоставления и анализа жизненных ошибок и удач (своих и чужих) разрозненных случайных событий приходит тогда, когда первичное развитие мозга завершено. Вполне возможно, что длительное созревание и формирование человеческого мозга является одной из причин проблемы выявления скрытой **закономерности** в повторяющихся событиях (явлениях) и последовательностях чисел. Первое (мысленное моделирование четырёхмерного пространства-времени) более или менее успешно с детства осуществляют все люди, а второе** (обобщение и анализ разрозненных фактов, событий, чисел вне пространства и времени) является уделом поживших и более или менее мудрых людей. По существу бытовые градации людей на глупых, бестолковых, дураков, "звёзд с неба не хватающих", середнячков, толковых, умных, мудрых и т.п. и различают людей по их способностям к мысленному моделированию **мира**, выявлению причинно-следственных связей и опять же мысленному анализу разрозненных однородных рядов признаков. Конечно, можно "...не умея мыслить и понимать, заставить делать это цифры." (*В.О.Ключевский*; 1841-1911). Так вот математическим анализом одномерных выборок (рядов признаков, последовательностей явлений, событий) занимается наука - **математическая статистика**.

---

*Примечание 2. Освободиться от "временности" можно по завету Б.Л.Пастернака (1890-1960):

Не спи, не спи, художник,
Не предавайся сну,
Ты вечности заложник
У времени в плену!

---

**Примечание 3. Естественно, что разрозненные факты, события, повторяющиеся числа являются частью **мира**, **окружающего человека**, членами пространственно-временных зависимостей, либо неизвестных, либо очень сложных, либо несущественных с точки зрения человека, учёного и не очень, в частности, исследователя.

Насколько важны для человека статистические данные, как объективные, так и субъективные? Ответ интересен! Начнём с жизненных ситуаций. Человек постоянно делает выбор между двумя или несколькими возможными решениями. Обгонять - не обгонять; ехать налево, прямо или направо; не пить или пить только первую и/или последнюю; ставить на карту всё или только часть; "всё бросить и начать жизнь с начала" или не стоит; не вернуться ли, если **всё** прощают, но всё ли простят, вот в чём вопрос; не пасть, а если пасть, то как низко... Принимая решение, человек подсознательно ориентируется на опыт (статистику) человеческих ошибок и удач. Иногда удаётся вовремя "подстелить соломку". Плохо, если человек дошёл до точки, когда у него нет выбора...

Вот и получается, что человеку не безразлично, "сколько засеяно гречихи и где она растёт" (*М.Жванецкий*; р.1934), какой ожидается уровень инфляции, прогноз цен на энергоносители, колебания курсов валют, дефицит или профицит, демографический прогноз и т.д. (это область объективных статистических данных). Также не безразличны народные приметы в отношении погоды, несмотря на то, что они объективны в меньшей степени и с течением времени теряют верность. А важность примет свадебных и других ритуалов трудно переоценить ввиду их живучести и также трудно оценить их объективность*. На эти и многие другие вопросы математическая статистика может дать более или менее надёжный ответ.

Нужно ли инженеру нефтегазового дела (буровику, разработчику) владение статистическими методами анализа? Посмотрим... Простейший анализ данных об отработке долот - вычисление среднего значения проходки и квадратичного отклонения - позволяет выделить лучшего производителя среди нескольких заводов, выбрать подходящий инструмент и соответствующий режим бурения, подобрать вид промывочной жидкости и др. Метод дисперсионного анализа позволит шире взглянуть на вопросы влияния различных факторов на показатели проходки. Седиментационный анализ в сочетании с методом моментов поможет подобрать реагенты для приготовления цементных растворов с необходимой седиментационной устойчивостью. Статистический анализ распределения образцов породы по проницаемости, по радиусам пор, по насыщенности

---

*Примечание 4. По поводу ритуальных примет: во времена В.Даля встретить свадебный поезд - к несчастью, а встреча похоронных дрог - к удаче.

флюидом поможет в оценке перспективности месторождения. Анализ частоты песчаниковых прослоек в нефтеносном пласте в разных скважинах месторождения в сочетании с другими данными позволит выбрать стратегию разработки и эксплуатации месторождения. Важное значение имеет идентификация распределений и определение параметров функции распределения, визуализация распределений.

Рассмотрению этих и других вопросов посвящено данное учебное пособие. Изредка будем касаться временности жизни и неизбежности смерти, вопросов о душе и об её отсутствии, обоснованности азартных игр, упоминать людей и животных умных и не очень, обсудим миф о падении бутербродов и реальности вероятности житейской и далёкой от неё математической.

При цитировании указания на текстовые источники в большинстве случаев сознательно опускались, но в библиографическом списке они даются полностью. Цитаты и эпиграфы, приведённые к статьям о некоторых понятиях и терминах, имеют цель показать, что "академическое" определение термина не исчерпывает его значения, что термин-слово охватывает значительно большие области смыслов и значений, чем включено в определении. Слова и термины, выделенные в тексте курсивом, снабжены отдельными статьями, в которых даются этимологическое происхождение термина, его значение и содержание.

Основам математической статистики предшествуют статьи о специальных терминах и понятиях, общенаучных понятиях и категориях. Определение многозначных понятий даны в контексте математической статистики, теории вероятностей и философии. Для всех терминов и понятий приведено их этимологическое происхождение. Описаны все виды вероятностей - житейская, классическая, математическая и статистическая. Выполняя методические задачи изложения положений теории вероятностей и математической статистики произведено цитирование ряда статей словаря В.И.Даля; толкования В.И.Даля следует воспринимать не изолированно, а в контексте определений соответствующих понятий и терминов. При цитировании словаря В.И.Даля сохранена орфография XIX в., купюры автора.

Рассмотрены также важные для образованного инженера термины, понятия и категории, имеющие общенаучное и философское значение, освещены вопросы, имеющие непосредственное отношение к процессу познания. Всего в учебном пособии более 360 словарных статей.

## Условные обозначения

| Условное обозначение | Величина |
|---|---|
| $A_x$ | Коэффициент асимметрии |
| $B$ | Параметр, событие |
| $\mathbf{B}$ | Матрица параметров |
| $b$ | Параметр (оценка генерального параметра $\beta$) |
| $C_n$ | Биномиальный коэффициент в испытаниях Бернулли |
| $D$, $d$ | Диаметр, м |
| $\mathbf{D}X$ | Математическое ожидание дисперсии случайной величины $X$ |
| $D^2$ | Выборочная дисперсия (смещённая оценка генеральной дисперсии, $\sigma^2_x$) |
| $\mathbf{E}$ | Математическое ожидание |
| $\mathbf{E}X$ | Математическое ожидание случайной величины $X$ |
| $E_x$ | Эксцесс |
| F | Критерий Фишера |
| $F(x)$ | Функция вероятностей случайной величины $x$, функция распределения случайной величины $x$ |
| $H_i$ | Высота $i$-того столбика в гистограмме; высота, м |
| $h_i$ | Частота $i$-того события |
| $I_p$ | Доверительный интервал |
| $i$ | Номер наблюдения (эксперимента), номер элемента массива, номер строки матрицы наблюдений |
| $j$ | Номер фактора, номер интервала, номер столбца матрицы наблюдений |
| $K_p$ | Квантиль распределения случайной величины $X$ |
| $k$ | Количество интервалов разбиения исследуемого диапазона данных, общее количество успехов в испытаниях Бернулли |
| $l$ | Число связей, накладываемых на выборку |
| $M_i$, $m_i$ | Масса вещества ($i$-той фракции частиц осадка), кг |
| $m$ | Мода |
| $m_x$, $m_y$ | Оценки математических ожиданий случайных величин $X$ и $Y$ |

| Условное обозначение | Величина |
|---|---|
| $m_\beta$ | Начальный момент $\beta$-того порядка |
| $N$ | Число очков в игре |
| $n$ | Размерность массива данных, число наблюдений (опытов), число точек |
| P | Вероятность события |
| $P$ | Доверительная вероятность |
| $p(x)$ | Плотность вероятностей случайной величины $x$, плотность распределения случайной величины $x$ |
| $p_i$ | Вероятность $i$-того события |
| **p** | Вероятность "успеха" в испытаниях Бернулли, вероятность "успеха" в распределении Паскаля |
| $q$ | Вероятность "неудачи" в испытаниях Бернулли, параметр биномиального распределения, знаменатель геометрической прогрессии |
| $R_x$ | Размах выборки |
| $R$, $r$ | Радиус частиц дисперсной фазы, м |
| $r$ | Параметр распределения Паскаля |
| $r_{xy}$ | Выборочный коэффициент корреляции величин $X$ и $Y$ |
| $S$ | Сумма $(M_x-m_x)^2$, $(M_y-m_y)^2$ или $(y_i-y_{i,расч})^2$ |
| $s_x$, $s_y$ | Квадратичные отклонения переменных $X$ и $Y$ (выборочные стандарты) |
| $s^2_{ад}$ | Дисперсия адекватности |
| $s^2_{оп}$ | Дисперсия воспроизводимости (опытная дисперсия) |
| $s^2_x$, $s^2_y$ | Дисперсии эмпирических распределений случайных величин $X$ и $Y$ (несмещённые оценки $\sigma^2_x$, $\sigma^2_y$) |
| $t$ | Критерий Стъюдента |
| $V_x$, $V_y$ | Коэффициенты вариации случайных величин $x$, $y$ |
| $W_i$ | Вес $i$-того результата измерения, или количество параллельных измерений |
| $X$, $Y$ | Случайные величины $X$, $Y$ |
| $\bar{x}$, $\bar{y}$ | Арифметические средние значения переменных $X$, $Y$ |
| $x$ | Независимая переменная величина (фактор), значение случайной величины $X$ |

| Условное обозначение | Величина |
|---|---|
| $x_{0.5}$ | Медиана |
| $y$ | Функция, значение случайной величины $Y$ |
| $Z$ | Стандартизованная случайная величина |
| $z$ | Значение стандартизованной случайной величины |
| | |
| $\alpha$ | Уровень значимости, параметр распределений Пирсона |
| $\beta$ | Порядок момента, параметр распределений Пирсона |
| $\Gamma$ | Гамма-функция |
| $\gamma_j$ | Граница $\gamma$-того интервала |
| $\Delta$ | Интервал |
| $\delta_i$ | Ошибка $i$-того измерения |
| $\varepsilon$ | Малое число |
| H | Гипотеза о вероятностной природе данных |
| $\eta$ | Малое число |
| $\theta$ | Статистика гипотетического критерия |
| $\varkappa$ | Центрированная случайная величина |
| $\lambda$ | Параметр показательного распределения, распределений Пирсона, распределения Пуассона |
| $M_x$, $M_y$ | Математические ожидания случайных величин $X$, $Y$ |
| $\mu_\beta$ | Центральный момент $\beta$-того порядка |
| N | Число исходов в испытаниях Бернулли |
| $\nu$ | Число степеней свободы, общее число исходов в классической вероятности |
| $\Pi$ | Произведение (от $i$=1 до $n$ или от $j$=1 до $k$) |
| $\rho_{xy}$ | Генеральный коэффициент корреляции величин $X$ и $Y$ |
| $\Sigma$ | Сумма (от $i$=1 до $n$ или от $j$=1 до $k$) |
| $\sigma^2_x$, $\sigma^2_y$ | Генеральные дисперсии случайных величин $X$, $Y$ |
| $\sigma_x$, $\sigma_y$ | Стандартные отклонения (стандарты) случайных величин $X$ и $Y$ |
| $\tau$ | Время, с |
| $\upsilon$ | Характеристика процесса (неизвестная функция) |
| $\Phi$ | Функция Лапласа |
| $\chi^2$ | Хи-квадрат критерий |

## СВЯЗИ, НЕОБХОДИМОСТЬ, СЛУЧАЙНОСТЬ

"Людей честных связывают добродетели, людей обыкновенных - удовольствия, а злодеев - преступления." (*Жюльетта Ламбер*; 1836-1916).

*Связи* бывают интимные, семейные, родственные, социальные, механические, *физические*, *математические*, химические, биологические, физиологические, *функциональные*, логические, простые и сложные, прямого и обратного действия, внутренние и внешние, положительные и отрицательные, *линейные* и нелинейные, постоянные и *случайные*, регулярные и нерегулярные, периодические и апериодические, *множественные* и единичные, de jure и de facto и др. Связь, по *существу*, означает контакт, соединение, *соотношение*, *зависимость*, *причинное* сродство, общность между чем-либо, отношение взаимной зависимости, обусловленности и т.п.* Вся наша жизнь пронизана множеством связей, мы все "повязаны". Задавшись целью научиться применять *статистические методы* при *анализе* промысловых *данных*, необходимо обсудить связи в *отношениях причины* и *следствия* и связи, возникающие между *результатами наблюдений* (*экспериментов*) и *параметрами*, вычисляемыми по этим данным и характеризующими те или иные *свойства* изучаемого *явления*.

"Ни одна вещь не возникает беспричинно, но всё возникает на каком-нибудь основании и в силу необходимости." (*Демокрит*; 460/470 - 360/370 г. до Р.Х.).

***Причина*** является основанием, из которого с *необходимостью физически* или логически вытекает *следствие*. Познание *причинной связи* явлений играет огромную роль в интеллектуальном развитии человека. Причинность является основой практической деятельности человека, его стратегии и тактики. Разум - это способность человека** выявлять причинно-следственные связи в природе, обществе и мышлении и использовать их в дальнейшей деятельности. "Ум заключается не только в знании, но и в умении прилагать знание на деле." (Аристотель

---

*Примечание 5. Например, в человеческом мозге приблизительно 30 миллиардов нервных клеток. Между ними (опять же приблизительно) один миллион миллиардов связей ($10^{15}$).

**Примечание 6 - см. след. стр.

('Αριϛτοτέλης; 384-322 до Р.Х.)). В настоящее время "Ум" и, реже, "Разум" характеризуют в общем интеллектуальные способности человека. Причинность является *центральным* ядром *детерминизма*, основой научных *теорий* и прогнозов. Это обусловливает некоторую остроту проблемы причинности в философии вообще и в науке, в частности. В общефилософском аспекте причинно-следственная связь - одна из *форм* всеобщей взаимосвязи явлений нашего мира.

Причинно-следственная связь - такое *отношение* между отдельными *событиями*, при котором одно из событий (причина) при его осуществлении *неизбежно* влечёт за собой возникновение другого события (следствия), а уничтожение причины приводит к неосуществимости следствия. Например, ядро, брошенное спортсменом, неизбежно упадёт на землю. "То, что принято называть "причиной", это не более чем присущая душе человека привычка наблюдать одно явление после другого и заключать из этого, что явление, более позднее по времени, ***зависит*** происхождением от более раннего" (*Давид Юм*; 1711-1776).

Согласно современной *концепции объективной причинности* в мире нет беспричинных *явлений* - любое явление природы и общества есть *следствие* той или другой причины. "Из ничего (без ничего) ничего не бывает" (*Тит Лукреций Кар*; 99-55 г. до Р.Х.). Одинаковые причины в одних и тех же условиях вызывают одинаковые следствия. С другой стороны, следствие не пассивно по отношению к причине, они находятся в некотором единстве, взаимодействие причины и следствия является причиной последующих *процессов*. Нет *явлений*, которые не имели бы своих причин, и также точно нет явлений, которые бы не порождали

**Примечание 6. Конечно автор хватил через край. Градации неизмеримо сложнее. Например, способность выстраивать параллельные цепочки причинно-следственных связей, многоканальность приёма и анализа информации, многоуровневость и многозадачность мышления и, что немаловажно, размерности многоуровневости и многозадачности. Рейтинг задач по важности, времени и месту. Лёгкость связи души с Ноосферой (Космическим Сознанием, Пространством Вариантов) и эффективность интерпретации разумом новой неформализуемой информации. И это малая толика поддающихся формализации характеристик интеллекта человека.**

Не следует думать, что выявлять причинно-следственные связи в природе и обществе способен только человек. Жизнь даёт немало примеров умных и глупых животных и птиц. Так, древний греческий философ отметил, что ворона - самая умная птица, а курица самая глупая, овца - самое глупое животное. Если важнейшим содержанием жизни считать построение мысленных *моделей*, то ум живого существа характеризует преобладание мысленных моделей, создаваемых в течение жизни, над инстинктивными моделями поведения, передаваемыми генетически. С другой стороны, в житейском *понимании* деревенская дворняга умнее породистой овчарки (мнение кинологов прямо противоположное).

Необходимо также отметить, что до XX в. в русском языке различали "Умение" ("Ум", "Уметь") и "Разум" (духовная сила, могущая помнить, судить, заключать, выводить следствие... "*Разум*" - *В.И.Даль* [82, 83]), в пределе - мудрость. См. также примечание 17 на стр. 278, рассуждения Якоба Бернулли на с. 32 и рассуждения П. Лапласа на с. 300.

тех или иных следствий. "Роком я называю порядок и последовательность причин, когда одна причина, связанная с другой причиной, порождает из себя явление" (*Гераклит Эфесский;* 535-475 г. до Р.Х.). Следствие, произведённое некоторой причиной, само становится причиной другого явления; последнее, в свою очередь, становится причиной третьего явления и т.д. Эту последовательность явлений, связанных друг с другом *отношением* внутренней *необходимости*, называют причинной или причинно-следственной цепью. Её можно назвать "цепью причинения". Любая из цепей причинения не имеет ни *начала*, ни *конца*, и любые попытки найти "первопричину" или последнее следствие достаточно бесперспективны. "Всё в природе является причиной, вызывающей какое-либо следствие" (*Бенедикт Спиноза;* 1632-1677).

В науке и технике *результаты наблюдений* и *экспериментов*, как правило, подвергаются той или иной *математической обработке*. При этом представляют интерес как преобразованные *данные*, так и *параметры*, характеризующие те или иные *свойства* изучаемого явления или входящие в *математическую модель*. В *зависимости* от *метода* математической обработки данных наблюдается большая или меньшая *связь* как между данными и параметрами, так и между самими параметрами. Последняя связь нежелательна, она мешает познанию *физической сущности объекта* (явления, процесса) и моделированию. Естественно, возникает проблема поиска метода обработки, дающего возможно более объективную модель объекта при наименьшей взаимосвязи параметров.

"Случай - это нелепая и необходимая причина, которая ничего не приготовляет, ничего не устраивает, ничего не выбирает и у которой нет ни воли, ни разума." (*Франсуа Фенелон;* 1615-1715).

Человек всю свою жизнь пытается найти *закономерность* в *событиях* окружающего его мира. На восьмом месяце развития ещё не родившийся ребёнок уже внимательно вслушивается в речь и музыку, окружающую его мать, пытаясь сопоставить короткие, повторяющиеся фрагменты в этом хаосе звуков. С не меньшим усердием игрок в казино следит за мельканием шарика, пытаясь найти какой-нибудь *закон* в его блужданиях. Результаты известны - родившись, ребёнок к полутора годам начинает говорить, а азартный игрок, как правило, разоряется...

Известно, что в природе какие-то события *неизбежны*, какие-то *невозможны*, а какие-то более *возможны* при одних условиях и менее -

при других. Например, неизбежный исход подбрасывания *идеальной* монеты - "орёл" или "решка", третьего не дано; исход бросания идеальной игральной кости, *число* "очков", - целое число от единицы до шести, *вероятность* выпадения **какого-либо** *результата* одинакова и равна 1/6. Вероятность выпадения **любого** результата от 1 до 6 равна 1, это достоверное событие. Подбрасывание монеты и бросание игральной кости - самые простые примеры для иллюстрации *соотношения категорий необходимости и случайности*. А в жизни? На ком мужчина женится, в некотором смысле - случайность, а то, что его жена по психотипу будет похожа на его мать, - неизбежность (древний Эдипов комплекс; аналогично, женщинам свойственен комплекс Электры). А вот пример острее. Иногда при разводе мужчина пытается оставить ребёнка себе (сына, как правило). Какова вероятность того, что его вторая жена сумеет заменить ребёнку мать? Возможность такого события находится в некотором соответствии с тем, что "мачеха" - слово нарицательное в языках многих народов мира (в отличие от "отчима").

И наконец. "Неизбежность смерти отчасти смягчается тем, что мы не знаем, когда она настигнет нас; в этой неопределённости есть нечто от бесконечности и того, что мы называем вечностью." (*Жан Лабрюйер*; 1645-1696).

"Каждый день или через день заставляй себя делать то, чего ты не любишь, чтобы час жестокой необходимости, когда он наступит, не застал тебя врасплох." (*Уильям Джеймс*; 1842-1910).

*Понимание* единства *необходимости и случайности* и их фундаментальной роли в природе и обществе является одним из главных *элементов* в *формировании* человека. Необходимость и случайность - *соотносительные* философские *категории*, которые конкретизируют представление о характере *зависимости событий* (*явлений*), выражают типы *связей*, *степень детерминированности системы*, *процесса*, явления. Связью между случайным и необходимым является, по существу, *закон больших чисел* формализующий естественную **связь** между **случайным** и **необходимым**. Другими словами, **в совокупности**, где происходят те или иные *массовые случайные явления*, случайные события во времени и/или в пространстве осуществимые в принципе, реализуются неизбежно.

Проблема необходимости и случайности разрабатывалась в естественных науках и в философии начиная с глубокой древности, истоки необходимости и случайности - *физический, объективный* мир. [86]. "Действительность заключена в явлениях" (*Демокрит*; 460/470 - 360/370 г. до Р.Х.).

> "Что сильнее всего? - Необходимость, ибо она властвует над всем." (*Фалес Милетский*; 625-547 г. до Р.Х.).

Необходимость - внутренняя *объективная закономерность* возникновения *явлений* и *событий*, существования и развития *процессов* нашего четырёхмерного пространства-времени, которая непременно должна проявиться при определённых условиях, хотя бы как их тенденция. Это проявление повторяющихся, устойчивых, внутренних *связей элементов системы* и *отношений* системы с внешним миром; события, явления в их всеобщей закономерной связи, отражение основных направлений развития *действительности* [86]. Конечно, "Необходимость есть бедствие, но нет никакой необходимости жить с необходимостью" (*Эпикур*; 341-270 г. до Р.Х.).

> "Смелость - начало дела, но случай - хозяин конца." (*Демокрит*; 460/470 - 360/370 г. до Р.Х.).

*Случайность* - проявление несущественных, неустойчивых, единичных *связей* элементов *системы* и *отношений* системы с внешним миром; *результат* перекрещивания *множества независимых причинных* событий; способ превращения *возможности* в *действительность*, при котором в данной системе, при данных условиях имеется несколько различных возможностей, могущих превратиться в действительность, но реализуется только одна из них. Случайность в природе и обществе *неизбежна* и закономерна, это *форма* проявления необходимости и дополнение к ней [86]. "Случай лови за чуб: лишь спереди он лохматый, сзади же лыс совершенно. Упустишь - вовек не поймаешь" (*Дионисий Катон*; III-IV вв. после Р.Х.).

Необходимость вызывается основными движущими силами *процесса*, полностью ими *детерминирована*, подготовлена всем предшествующим ходом развития процесса, характеризуется строгой однозначностью, определённостью и достаточно часто неизбежностью. Но необходимость не сводится к неизбежности. Неизбежность только одна из стадий её развития, одна из форм её осуществления [86]. "Будущее - это необходимость, сотканная из возможностей." (*Виктор Кротов*; р. 1946).

Всё живое на земле смертно, но когда, где и как наступит "последний час" - случайность. Случайность столь же причинно обусловлена, как и необходимость, но отличается от неё особенностью своих причин. Она появляется в результате действия отдалённых, нерегулярных, непостоянных, незначительных, малых причин или одновременного воздействия множества *факторов*, *совокупности* причин. В отличие от необходимости случайность характеризуется неоднозначностью, неопределённостью своего протекания. Одна и та же совокупность факторов может обусловливать необходимые процессы на одном *структурном* уровне материи, в одной системе связей и вызывать случайные события на другом уровне или в другой системе связей. Необходимость и случайность редко бывают в чистом виде, при определённых условиях эти *категории* тождественны, т.е. случайное необходимо, а необходимое случайно. Событие бывает случайным только по отношению к другому событию, необходимому. В подтверждение этих "туманных", на первый взгляд, рассуждений можно коснуться так называемых "штатных" и "нештатных" ситуаций в подводных лодках, летательных аппаратах, космических станциях, атомных электростанциях и других сложных системах. Высококлассные специалисты *моделируют* множество *возможных* **сочетаний** различных факторов, *детерминированных* **по своей природе**, и приёмы преодоления сложившихся ситуаций, опасных для *функционирования* сложной системы. Например, в системе управления реактором Чернобольской атомной электростанции было семь уровней блокировок... Цель службы охраны труда (безопасности жизнедеятельности) - предотвращение трагических случайностей.

В *зависимости* от *степени* детерминированности, структуры и характера системы, процесса, явления необходимость и случайность могут быть подразделены на несколько видов. В этом пособии рассматривается сложная необходимость, определяющая поведение *совокупности объектов* и сложных систем, которая одновременно выражается детерминистическими и *статистическими закономерностями*, объективная случайность, внутренне присущая данной системе (процессу), и случайность, вызываемая преимущественно побочными факторами, случайность внешняя, посторонняя.

Например, в системе "бурильная колонна - скважина - пласт" происходят процессы проводки скважины, спуско-подъёмные операции, жёлобообразования, осложнения и многие другие. В общем случае, процесс проводки скважины включает в себя вращение породоразрушающего инструмента, разрушение горной породы, движение промывочной жидкости, гидротранспорт шлама, трение бурильной колонны о стенки скважины и др. Эти процессы описываются *детерминистическими моделями, уравнениями,* отражающими *физическую сущность* процесса. Собственно, с помощью этих уравнений и производятся проектный и поверочный расчет процессов строительства скважины. С другой стороны, проводка скважины сопровождается различными осложнениями: инструмент в *случайном* порядке встречается с прожилками кварца и тектоническими нарушениями под различными углами, изменяется скорость вращения инструмента и расход промывочной жидкости, происходит вибрация бурильной колонны, образуются жёлобы, каверны, обвалы, меняется механическая скорость бурения, происходит искривление скважины и многое другое. Все эти осложнения происходят случайно, но эта случайность *объективна,* она внутренне присущая системе "бурильная колонна - скважина - пласт". Случайности, происходящие в процессе проводки скважин, в значительной степени являются результатом отсутствия важной *информации* о процессах, происходящих в скважине. "Случайность - удобное слово для обозначения неведомых для нас причин". (*Александра Давид-Ноэль;* 1868-1969). Таким образом, систему "бурильная колонна - скважина - пласт" можно характеризовать как *детерминированно-стохастическую систему.*

Примером случайности, вызываемой побочными факторами, случайности внешней, посторонней, являются *ошибки измерений.* Ошибки измерений *неизбежны* при любой *процедуре* измерения, они присущи измерению *объективно* (*вследствие* неточности приборов и влияния на процедуру измерения *множества детерминированных причин*) и субъективно (вследствие несовершенства органов чувств человека). Одни из первых попыток *формализации* источников ошибок *наблюдений* принадлежат в 1783 г. П.Лапласу (*Laplace Pierre Simon;* 1749-1827) и в 1794-95 г. К.Гауссу (*Gauss Carl Friedrich;* 1777-1855). Учитывая *невозможность абсолютно* точных измерений, К.Гаусс в 1821-23 г. разработал *математический метод обработки* **неравноценных** опытных *данных* - метод наименьших квадратов, широко применяемый и поныне.

Величайший физик XX века А.Эйнштейн (*A.Einstein;* 1879-1955), которому принадлежит знаменитая фраза "Господь Бог не играет в кости.", был *детерминистом* - он верил, что развитие событий предопределено ещё не познанными законами природы. Несовершенство нашего знания превращает мир в хаос, где всем правит Случайность - маска непознанной закономерности. В этой связи уместно процитировать Вадима Зеланда: "Случайностей не бывает. Понятие случайности - это лишь особая форма восприятия следствия при отсутствии детальной информации о причинах."

В реальном мире одновременно происходит *множество независимых* явлений, часть из них конкурирует, одновременно влияя на развитие другого множества *процессов*. Это множество независимых *объективных* и *субъективных причин*, одновременно влияющих на развитие событий, приводит к тому, что третье в нашей последовательности рассмотрения множество событий происходит *случайно*. Эта развивающаяся причинно-следственная цепь *детерминированных* по своей *физической сущности* явлений и приводит к *детерминированно-стохастическому* процессу существования белковых и небелковых тел. Как тут не вспомнить русскую пословицу: "Русский человек на трёх сваях стоит: *авось, небось да как-нибудь*".

Прежде чем переходить к описанию приложений *математической статистики* к решению некоторых задач нефтегазового дела, рассмотрим *определения* некоторых важнейших *понятий* и *терминов*. При первом чтении их можно пропустить, обращаясь к ним по мере *необходимости*. Подбор понятий и терминов, определяемых в первом разделе, осуществлялся по *принципу* логической замкнутости или по принципу *максимального минимума* (максимальной целесообразности). Основная задача определений - удобство изучения и минимизация проблем с *пониманием* понятий и терминов имеющих важное значение.

Термины, имеющие отдельные статьи с этимологическим происхождением, толкованием и достаточно подробным описанием, в тексте выделены курсивом. Термин (как, впрочем, и любое слово человеческое) подобен точке на окружности, условно разделяющей мир постигнутый и мир непознанный. Поэтому иногда термин нас ***подводит***: с одной стороны ***ведёт*** к проблеме или новой области знания, а с другой - пугает, ***уводит*** прочь! О том, что термин нас ***подвёл***, мы узнаём лишь *post factum*...

"Верно определяйте слова, и вы освободите мир от половины недоразумений." (*Рене Декарт* (*Descartes Rene*; 1596-1650)).

## 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ПОНЯТИЙ И ТЕРМИНОВ

# А

**Абсолютно непрерывное** *распределение случайной величины* см. *Распределение вероятностей случайной величины*.

"**АБСОЛЮТНЫЙ** лат. отрешенный; о предметах духовных, невещественных: безграничный, безусловный, безотносительный, непременный, несравниваемый, самостоятельный, отдельный и полный; пртвпл. *относительный, сравнительный, подчинённый, условный*. ***Абсолютность*** ж. состоянiе абсолютнаго, безусловность. (...) || Научн. абсолютность, исключительность, безусловность стремленiя къ высшему, къ первообразу; филсф. убежденiе въ сбыточности созерцанiя умомъ высшаго начала бытiя; (...)" (*В.И.Даль*; 1801-1872) [82].

"Абсолютное, какого бы рода оно ни было, не принадлежит ни природе, ни уму человеческому." (*Жорж Луи Леклерк де Бюффон*; 1707-1788).

**Абсолютный** (*лат.* absolutus - законченный, полный, доведённый до (достигший) совершенства, совершенный, неограниченный, безусловный < absolvere - освобождать, от ab- - от- и solvere - освобождать, избавлять) - 1. *Безотносительный*, беспредельный, безусловный, взятый вне *связи*, вне сравнения с чем-либо, свободный от каких-либо ограничений. 2. Достигший совершенства, совершенный, полный. 3. *мат. Абсолютная величина* (*модуль*) действительного числа $a$ - неотрицательное *число* (*обозначается* $|a|$), *определяемое* следующим образом: если $a>0$, то $|a|=a$, если $a<0$, то $|a|=-a$. Абсолютная геометрия - геометрия, в основе которой лежат все *аксиомы* евклидовой геометрии, кроме аксиомы о параллельных прямых. 4. *физ.* Абсолютная температура - температура по абсолютной термодинамической шкале Кельвина, в которой принята единственная реперная точка - тройная точка воды. Ей присвоено значение температуры 273,16 К (точно). Точка таяния льда лежит на 0,01° ниже тройной точки, т.е. по шкале Кельвина точка таяния льда равна 273,15 К. Один градус по абсолютной шкале равен одному градусу по стоградусной шкале Цельсия. Абсолютный нуль - нижняя граница шкалы Кельвина, равная -273,15°С. Абсолютная влажность - влагосодержание единицы объёма воздуха, *кг/м*$^3$. 5. *геод.* Абсолютная высота - высота точки земной поверхности над уровнем моря. 6. *фил.* Абсолютная *истина* - истина, которая тождественна своему предмету и поэтому не может быть опровергнута при дальнейшем развитии познания. "Кто желает абсолютного совершенства, тот желает большого зла." (*Жан Батист Антуан Стюард*; 1733/34?-1817).

См. также *Отношение, ПОВЕРХЪ*.

**Абстракция** (< *лат.* abstractus - отвлечённый, < abstrahere - отвлекать, < ab- - от- и trahere - тянуть; *лат.* abstraho - исключать, освобождать) - 1. *Процесс* мысленного исключения *множества* конкретных *свойств* или *связей* исследуемого *объекта* или *явления* с целью выделения определённых свойств, характеризующих объект, явление в требуемом аспекте. 2. Отвлечённое *понятие*, образуемое в *результате* исключения в процессе познания несущественных сторон исследуемого объекта или *явления* с целью выделения свойств, раскрывающих его *сущность*.

**Адекватность** (*франц.* adequat - адекватный < *лат.* adaequatus - соответственный, тождественный, приравненный, равный; *лат.* adaequo - сравнивать, уравнивать) - соответствие, соразмерность, верность, точность, полное соответствие *физической*, *математической* или мысленной *модели* исследуемому предмету. В *теории* познания *термин* "адекватность" служит для *обозначения* верного воспроизведения *объективных связей* и *отношений действительности* в представлениях, *понятиях* и *суждениях*. В этом смысле *истина определяется* как *адекватность* мышления бытию. "Здравый смысл - это инстинктивное чувство истины" (*Макс Жакоб*; 1876-1944).

См. также *Воспроизводимость, Детерминированно-стохастическая модель, Детерминистическая модель, Модель, Модель экспериментально-статистическая, ПОНИМАТЬ, Понятие, Причина, Причинность, ПРИЧИНЯТЬ, Связь, Следствие, Статистическая модель, Стохастическая модель, Структурная модель, Сущность, Явление.*

**Аксиома** (< *лат.* axioma - аксиома, основное положение, исходный принцип < *позд. греч.* ἀξίωμα - положение, не требующее доказательств. - *А.Д.Вейсман, И.Х.Дворецкий.* [80, 84]) - 1. *Истина* очевидная или истина, принимаемая без доказательств. 2. Положение (суждение, предложение), которое при дедуктивном построении какой-либо *теории* в границах замкнутой теории принимается без доказательств в качестве исходного. Принимаемое положение используется для доказательства всех других положений (теорем) этой теории.

Аксиомы имеют опытное, *эмпирическое* происхождение. Ими становились логические мысленные *модели*, воспроизводящиеся во *множестве* сознаний на протяжении развития цивилизации. Не следует думать, что принимаемая в той или иной теории аксиома вообще вводится в теорию без какого-либо первичного обоснования. Обоснование аксиом осуществляется, но, как правило, за границами аксиматически построенных математических теорий. *Система* аксиом должна удовлетворять требованиям непротиворечивости, полноты и *независимости* (например, система аксиом Пеано, система аксиом Фреге [86]). *Критерием* истинности аксиом является практическая применимость теории в целом.

*Термин* "аксиома" применялся уже Аристотелем (**'Αριδτοτελης**; 384-322 гг. до Р.Х.) в качестве истинного положения, которое не нуждается в доказательстве ввиду ясности и простоты. Позже ясность и простота стали истолковываться как очевидность. Автор "Начал" Евклид (III в. до Р.Х.), древнегреческий математик, исходил из того, что такие *понятия*, как "точка" и "прямая" ясны каждому и аксиомы, распространяющиеся на эти геометрические понятия, являются очевидными истинами. Такое понимание аксиомы просуществовало до середины XIX в., когда было признано, что требование "очевидности" носит *субъективный* характер. Было также опровергнуто мнение, что аксиомы являются *абсолютно* неизменными, законченными, непреложными и *абсолютно* завершёнными истинами. Практически системы аксиом изменяются в процессе развития науки, и их содержание может быть достаточно произвольным. Подробно см. [86].

**Анализ** (< *франц.* analyse < *лат.* analysis < *греч.* **αναλυδιζ** - разложение, растворение. *М.Фасмер*; (1886-1962). [100]; **αναλυδιζ** - разрушение, освобождение от чего: **κακων**; смерть. *А.Д.Вейсман*; (1834-1913). [80]) - *метод* исследования, заключающийся в том, что исследуемый *объект* (*субъект, система*) расчленяется на составные части, *элементы*, каждый из которых затем исследуется в отдельности как часть расчленённого целого. Анализ может осуществляться *физически* и мысленно, как логический приём.

Выделенные в *процессе* физического анализа характеристики элементов обогащают человека новым знанием, с последующей сборкой объекта, системы или реконструкцией. Например, для ребёнка совершенно естественно стремление разобрать игрушку на составные части, изучить их и попытаться собрать. Известно, что с возрастом это стремление ослабевает и пожившие люди, тоже совершенно естественно, физический анализ заменяют мысленным.

Мысленный анализ - логический приём, метод исследования, при котором объект (субъект, система) в процессе мысленного *моделирования* разделяется на составные элементы, с которыми, в *зависимости* от *сущности* объекта, осуществляются те или иные интеллектуальные *процедуры*. Выделенные и исследованные в процессе интеллектуальных процедур элементы далее мысленно соединяются в целое, обогащённым новым знанием, с помощью другого логического приёма - *синтеза*. Анализ и синтез неразрывно *связаны* в интеллектуальном процессе, являются неотъемлемой частью мысленного моделирования. Более того, аналитико-синтетическая деятельность головного мозга является физиологической основой деятельности человека.

Другие виды анализа: *математический* (дисперсионный, *корреляционный*, регрессионный и т.д.), химический, рентгеноструктурный, фазовый, термометрический, микроскопический и т.д.

*Термины* "анализ" и "синтез" ввёл Платон (**Πλατων**; 428 или 427 до Р.Х.- 348 или 347 до Р.Х.).

**Апостериори** (*нем.* a posteriori < *лат.* a posteriori - *букв.* из последующего (a - из, posterior - следующий, последующий, ближайший)) - на основании *опыта*, исходя из фактических *данных*. Более поздний, апостериорный: cognitio a posteriori познание "ab effectibus ad causas", *впосл.* "ex phaenomenis" из *явлений*, т.е. на основании опыта. Противоп. *Априори*.

**Априори** (*лат.* a priori, букв. - из предшествующего (a - от, prior - первый)) - умозрительно, без учёта фактов. Познание "ex causis ad effectum", т.е. (познание) из "чистых" *понятий*; *впоследствии* "ex notionibus", т.е. *следовательно независимо* от *опыта*. Противоп. *Апостериори*.

**Аргумент** (*польск.* argument < *лат.* argumentum - довод, фактическое основание, доказательство, умозаключение, от arguere - доказывать) - *независимая переменная величина* (*фактор*), от значения которой зависят значения *функции*.

**Арифметико-геометрическое среднее** см. *Концепция, Середа, Среднее, среднее значение*.

**Арифметическое взвешенное среднее** см. *Концепция, Середа, Среднее, среднее значение*.

**Арифметическое распределение** – *дискретное распределение вероятностей случайной величины*, сосредоточенное на *множестве* точек вида $\pm nh$, где $h>0$ и $n=1, 2, \ldots$ . Арифметическое распределение представляет собой частный случай решётчатых распределений.

См. также *РАСПРЕДЕЛЯТЬ.*

**Арифметическое среднее** см. *Концепция, Середа, Среднее, среднее значение.*

**Асимметрии коэффициент, ассиметрии** (допустимо) **коэффициент** (< *греч.* α – не и **συμμετρια** – соразмерность, надлежащая *пропорция*, **симметрия**; **ασυμμετρια** – недостаток соразмерности) – наиболее употребительная *мера* асимметрии *распределения, определяемая соотношением*:

$$A_x = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}, \qquad (1.1)$$

где $\mu_2$ и $\mu_3$ – *центральные моменты* 2-го и 3-го порядков соответственно. *Коэффициент* асимметрии характеризует скошенность или асимметрию распределения. Для распределений, симметричных относительно *математического ожидания* $A_x=0$ (рис. 1.1).

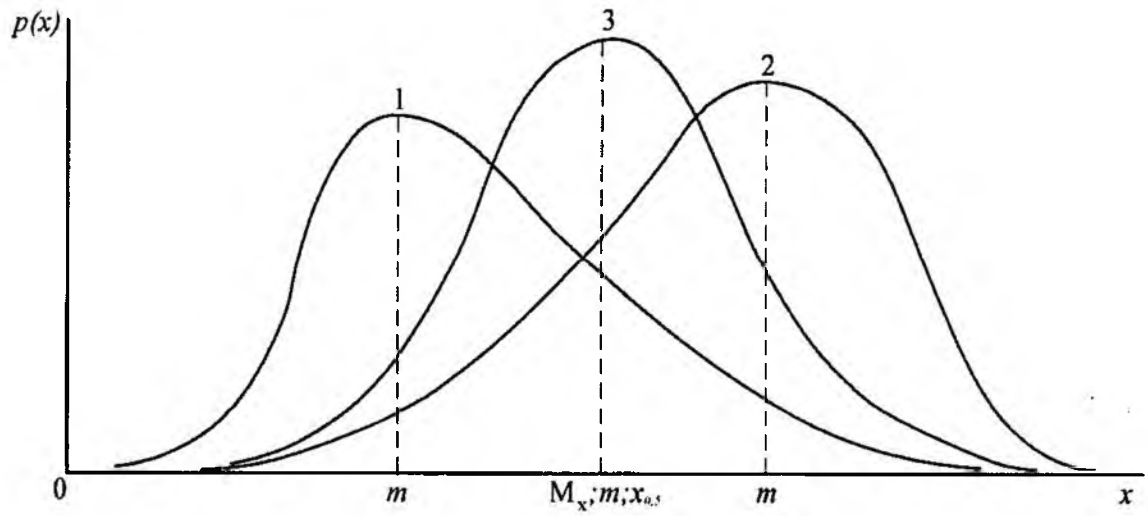



Рис.1.1. Асимметричное распределение вероятностей случайной величины: 1 – кривая с положительной асимметрией; 2 – кривая с отрицательной асимметрией; 3 – кривая нормального распределения (площадь под каждой кривой плотности вероятностей равна 1)

В *зависимости* от знака $A_x$ говорят о распределении с положительной асимметрией ($A_x>0$) и с отрицательной асимметрией ($A_x<0$). Для *нормального распределения* $A_x=0$; математическое ожидание $M_x$, мода $m$ и *медиана* $x_{0.5}$ совпадают (рис. 1.1,3).

См. также *Асимметрия распределения, РАСПРЕДЕЛЯТЬ, Симметрия.*

**Асимметричность** (< *греч.* α - не и **συμμετρια** - соразмерность, надлежащая пропорция, **симметрия**; **ασυμμετρια** - недостаток соразмерности) - асимметричное *отношение*.

См. также *Асимметрии коэффициент, Асимметрия распределения, РАСПРЕДЕЛЯТЬ, Симметрия.*

**Асимметрия, ассиметрия** (допустимо) (< *греч.* α - не и **συμμετρια** - соразмерность, надлежащая *пропорция*, **симметрия**; **ασυμμετρια** - недостаток соразмерности) - отсутствие соразмерности, соответствия в расположении частей целого *относительно центра, средней линии,* плоскости; отсутствие *правильности* в расположении, размещении чего-либо. Например, *распределение случайной величины* может иметь скошенность относительно *математического ожидания*. *Причинно-следственным связям* свойственна асимметрия, поскольку скорость распространения материальных воздействий вполне *конечна* и не превышает скорости света. У млекопитающих наблюдается асимметрия некоторых внутренних органов, у членистоногих одна клешня бывает больше другой и тому подобное. У человека, в *норме*, наблюдается асимметрия лица.

См. также *Симметрия.*

**Асимметрия распределения, ассиметрия** (допустимо) **распределения** (< *греч.* α - не и **συμμετρια** - соразмерность, надлежащая пропорция, **симметрия**; **ασυμμετρια** - недостаток соразмерности) - *свойство кривой распределения случайной величины,* выражающееся в неравной *вероятности* появления значений признака больших или меньших *среднего значения* на одинаковую величину.

*Качественно* асимметрия распределения проявляется в отсутствии *симметрии* распределения, при этом более "длинная" часть кривой лежит либо правее, либо левее моды (рис.1.1).

*Количественно* асимметрия распределения характеризуется третьим центральным *моментом*:

$$\mu_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-M_x)^3 p(x)\,dx, \tag{1.2}$$

где $M_x$ - *математическое ожидание* случайной величины $X$. *Выборочный* центральный момент третьего порядка вычисляется по *формуле*:

$$\mu_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m_x)^3 p(x)\,dx, \tag{1.3}$$

где $m_x$ - *оценка* математического ожидания случайной величины $X$, в частности, начальный момент первого порядка $m_1$, (3.5). Кроме центрального момента третьего порядка (в случае физических величин - имеющего размерность) используется безразмерный *асимметрии коэффициент* (1.1):

$$A_x = \frac{\mu_3}{S_x^3}. \tag{1.4}$$

Для *нормального распределения* $A_x=0$ (рис. 1.1). Если правая ветвь кривой распределения является более "длинной", то говорят о распределении с положительной асимметрией ($A_x>0$), если более "длинной" является левая ветвь кривой, то говорят о распределении с отрицательной асимметрией ($A_x<0$).

*Множеству* распределений *физических* величин, характеризующих те или иные свойства *совокупностей*, свойственна асимметрия. Это объясняется тем, что *причинно-следственным связям* присуща асимметрия, поскольку скорость распространения материальных воздействий вполне *конечна* и не превышает скорости света. Вполне логичный вывод, вытекающий из этого положения, заключается в том, что информативность распределения является *следствием* его *асимметричности*. Другими словами, асимметричность распределения указывает на наличие фактора, по силе или интенсивности выделяющегося на фоне всех факторов, так или иначе влияющих на исследуемый признак и его распределение.

Причиной выраженной асимметрии может быть нелинейная зависимость исследуемой физической величины от другой, нормально распределённой, или факт *статистической* неоднородности *совокупности*, из которой взята анализируемая выборка [95].

См. также *Моментов метод, РАСПРЕДЕЛЯТЬ.*

**Асимптота кривой с бесконечной ветвью** (< *греч.* ασυμπτωτος - несовпадающий) - прямая, к которой эта ветвь неограниченно приближается. Асимптота может быть вертикальной, горизонтальной и наклонной. Например, у гиперболы $y=1/x$ асимптотами являются оси координат $Ox$ и $Oy$. Для существования наклонной асимптоты, имеющей *уравнение* $y=b_0+b_1x$, *необходимо* и достаточно, чтобы существовали *пределы*:

$$b_1 = \lim \frac{f(x)}{x}, \quad b_0 = \lim \{f(x) - b_1x\}; \tag{1.5}$$

при $x\to+\infty$ (или при $x\to-\infty$). Если вдоль *бесконечной* ветви *кривой* существует предельное положение касательной, то эта касательная есть асимптота. Обратное не всегда верно.

*Термин* "асимптота" (применительно к гиперболе) приписывают Аполлонию Пергскому (**Απολλωνιος ο Περγαιος**; 262 - 190 до Р.Х.).

# Б

**Безразмерная физическая величина** - *величина*, в размерности которой все показатели *степени* при обобщённых символах основных *физических величин* равны нулю. Например, все *относительные* физические величины (массовая доля, мольная доля, объёмная доля, относительная плотность, относительная электрическая и магнитная проницаемость, кпд и др.), *параметрические* величины, кодированные *переменные* в задачах планирования эксперимента, *критерии* подобия, *нормированные* переменные, приведённые переменные, *стандартизованные случайные* величины, *статистические* критерии и др.

См. также *Отношение, Производить, Производная.*

"Успех - дело чистого случая. Это вам скажет любой неудачник." (*Эрл Уилсон*; 1907-1987).

**Бернулли испытания** - повторные *независимые* испытания с двумя *возможными* взаимоисключающими исходами ("успехом" и "неудачей") и такие, что *вероятности* исходов остаются неизменными от испытания к испытанию. Вероятность "успеха" {*У*} *обозначают* буквой $\mathbf{p}$, а вероятность "неудачи" {*Н*}- $q$. Очевидно, что $\mathbf{p}+q=1$. Пространство *элементарных событий* каждого отдельного испытания состоит из двух точек *У* и *Н*. Пространство элементарных событий $n$ испытаний Бернулли содержит $2n$ точек или последовательностей из $n$ символов {*У*} и {*Н*}; каждая точка представляет собой один возможный исход испытания. Поскольку испытания независимы, соответствующие вероятности перемножаются. Таким образом:

$$P(УНУУН\ldots УНУ)=\mathbf{p}q\mathbf{p}\mathbf{p}q\ldots\mathbf{p}q\mathbf{p}. \qquad (1.6)$$

Практически представляет интерес *число* "успехов" в $n$ испытаниях Бернулли или число "неудач", предшествущих "успеху". Если наступлению "успеха" присвоить значение 1, а "неудачи" - 0, вероятность вышеприведённого испытания:

$$P(10110\ldots 101)=\mathbf{p}q\mathbf{p}\mathbf{p}q\ldots\mathbf{p}q\mathbf{p}=\mathbf{p}^{k}q^{n-k}, \qquad (1.7)$$

где $k$ - число "успехов" в последовательности $n$ испытаний. Рассмотрение числа "успехов" $\mathbf{N}_n$ в $n$ испытаниях Бернулли приводит к *биномиальному распределению*:

$$P(\mathbf{N}_n=k)=C_n^k\,\mathbf{p}^k q^{n-k},\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n, \tag{1.8}$$

где $0<\mathbf{p}<1$ - *параметр* распределения, а $C_n^k$ - *биномиальный коэффициент*. Выражение (1.8) означает вероятность того, что $n$ испытаний Бернулли с вероятностями "успеха" $\mathbf{p}$ и "неудачи" $q=1-\mathbf{p}$ закончатся $\mathbf{N}_n=k$ успехами и $n-k$ неудачами. В частности, $q^n$ - вероятность того, что успехов не будет, а вероятность того, что будет хотя бы один успех, равна $1-q^n$.

Рассмотрение числа испытаний $\mathbf{N}_1$ до первого "успеха" приводит к *геометрическому распределению*:

$$P(\mathbf{N}_1=k)=q^k\mathbf{p},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ldots, \tag{1.9}$$

где $\mathbf{p}$ - *параметр* распределения.

Число "неудач" $\mathbf{N}_j$, предшествующих $j$-тому появлению "успеха", имеет так называемое отрицательное биномиальное распределение (см. *Паскаля распределение*).

Наиболее известным примером испытаний Бернулли являются последовательные бросания *идеальной* монеты, для которых $\mathbf{p}=q=1/2$. Если монета *несимметричная*, то вероятность "успеха" $\mathbf{p}$ может быть произвольной, но последовательные бросания монеты можно считать независимыми. Повторные *случайные* извлечения из урны с одним и тем же набором шаров представляют собой испытания Бернулли. Если не различать несколько возможных исходов в более сложных испытаниях, а каждый *результат* рассматривать как "успех" или "неуспех", то в случае бросания идеальной игральной кости различие между появлением 1 {*У*} и не единицы {*Н*} приводит к испытанию Бернулли с $\mathbf{p}=1/6$, различие между выпадением чётного {*У*} и нечётного {*Н*} числа очков приводит к испытанию Бернулли с $\mathbf{p}=1/2$. Если игральная кость несимметрична, то последовательные бросания всё же образуют испытания Бернулли, но с другими вероятностями $\mathbf{p}$. Представляя "успехом" десятку, валета, даму, короля и туза одной масти в покере или две единицы при бросании двух костей и называя все остальные возможные исходы "неудачей", получим испытания Бернулли с вероятностями $\mathbf{p}=1/649740$ и $\mathbf{p}=1/36$ соответственно. Эти и *множество* других вероятностей, связанных с испытаниями Бернулли, были вычислены на самой ранней ступени развития *теории вероятностей* в связи с задачей о разорении игроков.

См. также *Геометрическое распределение, РАСПРЕДЕЛЯТЬ.*

**Бернулли распределение** - *дискретное распределение вероятностей случайной величины* $X$ с *параметром* $\mathbf{p}$ ($0<\mathbf{p}<1$), если:

$$P(X=1)=\mathbf{p}, \tag{1.10}$$

$$P(X=0)=1-\mathbf{p}. \tag{1.11}$$

*Функция распределения:*

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ 1-\mathbf{p}, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 1, & x>1. \end{cases} \tag{1.12}$$

Распределение Бернулли является *моделью* любого случайного *эксперимента*, имеющего два взаимно исключающих исхода.

См. также *Бернулли испытания, Биномиальное распределение, Геометрическое распределение, РАСПРЕДЕЛЯТЬ.*

"Бесконечное - истинная сущность конечного, подлинное конечное." (*Людвиг Фейербах*; 1804-1872).

**Бесконечность** (*мат.*) - *понятие*, возникающее в различных разделах *математики* в основном как противопоставление понятию *конечного*. Понятие бесконечности используется в *аналитических* и геометрических *теориях* для *обозначения* "несобственных" или "бесконечно удалённых" *элементов*, в теории *множеств* и математической логике при изучении "бесконечных множеств" и в других разделах математики. В математическом *анализе* одним из основных является представление о бесконечно малых и бесконечно больших *переменных величинах*, причём бесконечное рассматривается в неразрывной *связи* с конечным: реальный смысл имеет только разложение конечных величин на **неограниченно возрастающее** *число* **неограниченно убывающих** слагаемых. Мало толку от попытки подсчёта *количества* точек на небольшом отрезке любой *линии* (парадокс: в конечном элементе - бесконечное число точек!). Дело в том, что практический интерес представляет не бесконечно малая величина сама по себе, а те случаи, в которых рассмотрение бесконечно малых величин приводит к величинам конечным. Так, *отношения* бесконечно малых величин, лежащие в основе *определения производной* (1.61), (1.184), приводят к вполне конечным значениям тангенса угла наклона касательной; сумма бесконечно большого числа бесконечно малых (площадок) приводит к конечному значению интеграла (площади под *кривой*).

*Аналогичный* характер имеет пополнение *системы* действительных чисел двумя несобственными числами $+\infty$ и $-\infty$, соответствующие многим требованиям математического анализа.

***Бесконечность*** (*фил.*) - философская *категория*, характеризующая неисчерпаемость материи и *форм* движения, многообразие предметов и *явлений* материального мира, форм и тенденций его развития. Бесконечность как категория - продукт интеллектуальной деятельности человека, пытающегося познать себя и своё место в мире. Человек обречён жить в окружении бесконечности, поскольку бесконечность есть неотъемлемая часть нашего четырёхмерного пространства-времени.

Категория "бесконечность" зародилась более двух тысяч лет назад в *процессе* развития нашей цивилизации. Платон (**Πλατων**; 428 или 427 до Р.Х. - 348 или 347 до Р.Х.) утверждал, что бесконечность существует только потенциально, а не реально, не актуально. Он представлял бесконечность как нечто в движении, которое "становится всегда иным и иным". Аристотель (**'Αριϭτοτελης**; 384-322 до Р.Х.) признавал потенциальную бесконечность, но его интересовала не *абстрактная* безграничность, а та величина, которую можно познать чувствами. Столетия спустя Джордано Бруно (1548-1600) рассматривал бесконечность неподвижной и актуально существующей. Глубокий философский *анализ* проблемы бесконечности принадлежит Г.Гегелю (*Hegel Georg Wilhelm Friedrich*; 1770-1831), который различал *истинную* (*качественную*) и "дурную" бесконечность (как безграничное увеличение *количества*) и связывал бесконечность с развитием. Блез Паскаль (*Pascal Blaise*; 1623-1662) утверждал, что мир есть "бесконечная сфера, центр которой везде, а окружность нигде".

Бесконечность, как и вечность, кажется *трансцендентной*, непознаваемой категорией. Так, Р.Декарт (*Descartes Rene*; 1596-1650) категорически отказывался вступать в спор о бесконечности, считая свой *разум*, да и любой другой конечный ум недостаточным для *понимания* бесконечности как божественной сути. К этой категории обращались не только учёные, но и писатели, поэты и художники. "Рассказ в рассказе", "картина в картине", "сны во снах" - это всё аллегории бесконечности. Или ещё - бесконечность зеркальных повторов, бесконечность узоров в калейдоскопе при постоянстве бытия стёкол. Математик и философ П.Д.Успенский в одной из своих книг написал: "В самом деле, что такое бесконечность, как её рисует себе обыкновенный ум? Это пропасть, бездна, куда падает наш ум, поднявшись на высоту, на которой он не может удержаться". См. также *БЕЗКОНЕЧНЫЙ*.

"**БЕЗКОНЕЧНЫЙ**, беспредельный, безграничный, безрубежный, неизмеримый, нескончаемый, вечный по времени или пространству. (...) || Чрезмерно великiй, по размерамъ своимъ, необычайно большой или продолжительный. (...) *Безконечная величина* матем. несоизмеримая ни съ какою величиной; не выражаемая никакою цыфрою, числомъ. Сравнительно съ *безконечно великою*, всякая данная величина ничтожна, а *безконечно малая*, передъ всякою данною, сама ничтожна. (...) ***Безконечность*** ж. состоянiе, свойство безконечнаго. || в матем. *положительная* и *отрицательная безконечность*, безконечно великое и безконечно малое число." (*В.И.Даль*; 1801-1872) [82].

См. также *Бесконечность, Величины соизмеримые и несоизмеримые, Данные, Конечное, Мера, Середа.*

**Биномиальное распределение** - *дискретное распределение вероятностей случайной величины X*, принимающей целочисленные значения $k=0,\ 1, \ldots,\ n$, с вероятностями, соответственно:

$$p(k,n,\mathbf{p})=P(X=k)=C_n^k\ \mathbf{p}^k(1-\mathbf{p})^{n-k}, \qquad (1.13)$$

где $0<\mathbf{p}<1$ - *параметр*, а $C_n^k$ - биномиальный *коэффициент*:

$$C_n^k=\frac{k!}{k!(n-k)!}, \qquad (1.14)$$

*число* сочетаний из $n$ по $k$. Биномиальное распределение появляется в последовательности $n$ *независимых Бернулли испытаний* в тех случаях, когда исследователя интересует не порядок появления "успехов", а их общее *количество* $k$. Предполагается, что некоторое *событие* $A$ в каждом из испытаний имеет два взаимоисключающих исхода - оно либо появляется с одной и той же вероятностью $\mathbf{p}$, либо не появляется с вероятностью $1-\mathbf{p}$. Вероятность появления события $A$ $k$ раз в $n$ независимых испытаниях - $p(k,n,\mathbf{p})$, (рис.1.2).

Высота каждого столбика характеризует вероятность $p(k,n,\mathbf{p})$ числа успехов $k$ $(X=k)$ в схеме Бернулли из $n$ испытаний при вероятности $\mathbf{p}$ появления события $A$. В частности, вероятности выпадения $k$ "решек" (или "орлов") при $n$=20 бросаниях представлены *гистограммой* на рис.1.2,б. Вероятность того, что успехов не будет $p(k,n,\mathbf{p})=P(X=0)=q^n$, а вероятность того, что будет хотя бы один успех, равна $1-q^n$.

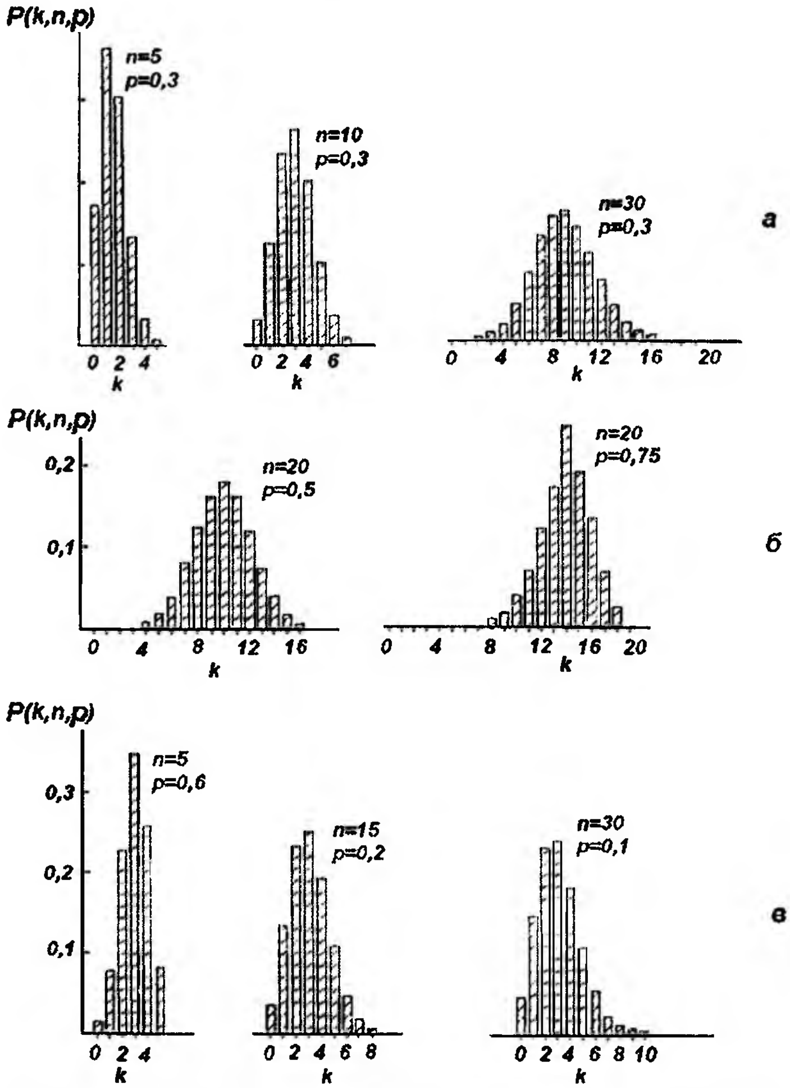



Рис.1.2. Биномиальные распределения: а - для фиксированной вероятности "успеха" $p$ и различных значений $n$;
б - для фиксированного $n$ и различных $p$;
в - для различных значений $n$ и $p$, таких, что $n \cdot p$=const

*Моменты* случайной величины $X$ с биномиальным распределением равны:

$$m_1 = np, \tag{1.15}$$

$$m_2 = np + n(n-1)p^2, \tag{1.16}$$

$$m_3 = np(1-p)(1-2p), \tag{1.17}$$

$$m_4 = 3n^2 p^2 (1-p^2) + np(1-p)(1-6p(1-p)). \tag{1.18}$$

*Центральный* момент второго порядка:

$$\mu_2 = np(1-p). \tag{1.19}$$

Коэффициент *ассимметрии*:

$$A_x = \frac{p}{\sqrt{np(1-p)}} \tag{1.20}$$

*Функция* биномиального распределения *определяется* при любом действительном значении $0<k<n$ *формулой:*

$$F(k)=P(X\leqslant k)=\sum_{x=0}^{k} C_n^x\ \mathbf{p}^x(1-\mathbf{p})^{n-x} \qquad (1.21)$$

Биномиальное распределение - одно из основных распределений вероятностей, связанных с последовательностью независимых испытаний. Биномиальное распределение было названо так потому, что вероятности $p(k,n,\mathbf{p})$ есть члены разложения бинома $(\mathbf{p}+q)^n$ при $q=(1-\mathbf{p})$ с параметрами $n$, $\mathbf{p}$. Если *количество* независимых испытаний $n$ велико, а вероятность $\mathbf{p}$ мала, а их произведение $n\mathbf{p}$ и не мало, и не велико (см. рис.1.2,в), то биномиальное распределение приближается к *Пуассона распределению*:

$$p(k,n,\mathbf{p})=P(X=k)=C_n^k\ \mathbf{p}^k(1-\mathbf{p})^{n-k}\approx\frac{(n\mathbf{p})^x}{k!}\cdot e^{-np}. \qquad (1.22)$$

Развитие биномиального распределения связано с рассмотрением *экспериментов*, имеющих более чем два *возможных* исхода - полиномиальные распределения. *Термин* "биномиальное" связан с тем, что этот ряд вероятностей можно получить как последовательные члены разложения бинома Ньютона.

Биномиальному распределению подчиняются числа зёрен минерала и ископаемых организмов данного вида, подсчитанные в наборе *выборок* заданного объёма.

См. также *Бернулли испытания, Бернулли распределение, РАСПРЕДЕЛЯТЬ.*

**Больших чисел закон** - общий *принцип*, в силу которого совместное действие *множества случайных факторов* приводит, при некоторых весьма общих условиях, к *результату*, почти не зависящему от *случая*. Таким образом, в *законе* больших чисел проявляется *связь* между случайным и *необходимым*. В настоящее время *закон* больших чисел представляет собой *совокупность* предельных теорем исчисления *вероятностей*, которая разделяется на две группы теорем (или на две теоремы с изменяющимися условиями). По существу, закон больших чисел образует первая группа теорем, которая указывает вероятности, сколь угодно близкие к достоверности. *Начало* всей совокупности теорем, объединённых названием "закон больших чисел", положила теорема Якоба Бернулли (*Jacob Bernoulli*; 1654-1705), доказанная им в период 1686-1690 г. и посмертно изданная в 1713 г. его племянником Николаем Бернулли (*Nicolas Bernoulli*; 1695-1726) под названием "Искусство предположений" и фактически положившая начало *теории* вероятности как полноправной научной дисциплины. Теорема, доказанная Я. Бернулли, - первая *асимптотическая* теорема *вероятностей теории*. Ниже приведена её формулировка в обозначениях Якоба Бернулли.

"Пусть число благоприятных случаев относится к числу неблагоприятных точно или приближённо, как $r$ к $s$, или к числу всех случаев - как $r$ к $r+s$ или $r$ к $t$, каковое отношение заключается в пределах $(r+1)/t$ и $(r-1)/t$. Требуется доказать, что можно взять столько опытов, чтобы в какое угодно данное число раз ($c$ раз) было вероятнее, что число благоприятных наблюдений попадёт в эти пределы, а не вне их, т.е. что отношение числа благоприятных наблюдений к числу всех будет не более, чем $(r+1)/t$, и не менее, чем $(r-1)/t$." [4, с.56]

$$P\left\{-\frac{1}{t} < \frac{\nu_1}{\nu} - \frac{r}{t} < \frac{1}{t}\right\} \geqslant 1 - \frac{1}{1+c}, \tag{1.23}$$

причём достаточное для выполнения неравенства (1.23) число испытаний $\nu$ *линейно* возрастает с *логарифмом* $c$:

$$\nu = nt = t(k\cdot\log c+\nu_0), \tag{1.24}$$

где $\nu_1$ - число появлений *события* в $\nu$ испытаниях, $k$ и $\nu_0$ - возрастающие *функции* $r$ и $s$; при возрастании $r$ и $s$ величина $\nu$ увеличивается не только вместе с $t$, но и вместе с $n$* (*формулы* (1.24) у Я. Бернулли нет, но она выводится из его *оценок* [4, с. 106]). В формуле (1.23) $\nu_1/\nu$ - *классическая вероятность*, а $r/t$ - *вероятность статистическая*.

Якоб Бернулли исходил из того факта, что любой человек, даже очень ограниченный и без предварительного обучения, делая выбор между двумя или более *возможностями*, интуитивно принимает во внимание *частоту ошибок* и удач. Это естественно для человека и всем известно, более того, уровень интеллекта в некоторой *степени* и *определяется* способностью мысленным взором охватить возможно большее число событий, провести *анализ* причинно-следственных *связей* и выявить аналогии. Это естественным образом всем известно, но, быть может, мало кто задумывался, будет ли при увеличении числа *наблюдений* соотношение ошибок и удач постоянно возрастать или же задача имеет

*Примечание 7. Ни Якоб Бернулли, ни другие учёные вплоть до С.Д.Пуассона (1781-1840) не различали вероятностей вида:

$$P(X\leqslant x) \text{ и } P(X<x).$$

свою *асимптоту*. Доказывая теорему, Якоб Бернулли рассмотрел *процедуру* выемки с возвратом камешков белого и чёрного цветов из урны, содержащей три тысячи белых и две тысячи чёрных камешков. В истории науки это была первая попытка научно обосновать вероятность события a posteriori почти с той же точностью, как если бы они были известны a priori. Притом, события тривиального.

Решая эту задачу, Якоб Бернулли рассмотрел процедуру последовательного уточнения исходного *априорного* полуторного *соотношения* белых и чёрных камешков, 3/2, *опытным* или *апостериорным* определением, т.е. при $r$=30 и $s$= 20 *пределы* $(r+1)/t$=31/50 и $(r-1)/t$=29/50, при $r$=300 и $s$=200 пределы $(r+1)/t$=301/500 и $(r-1)/t$=299/500 и т.д. В итоге Якоб Бернулли доказал, "что при 25550 опытах будет более, чем в тысячу раз вероятнее, что отношение числа благоприятных наблюдений к числу всех будет заключено в пределах 31/50 и 29/50, а не вне их. И таким же образом, положив $c$=10000 или $c$=100000 и т.д., найдём, что тоже будет более, чем в 10000 раз, вероятнее, если будет сделано 31258 опытов; и более, чем в 100000 раз, вероятнее, если будет взято 36966 опытов; и т.д. до бесконечности, прибавляя именно постоянно к 25550 опытам 5708 других. Откуда, наконец, вытекает то удивительное, по-видимому, следствие, что, если бы наблюдения над всеми событиями продолжать всю вечность (причём вероятность, наконец, перешла бы в полную достоверность), то было бы замечено, что всё в мире управляется точными отношениями и постоянным законом изменений, так что даже в вещах, в высшей степени случайных, мы вынуждены были бы признать как бы некоторую необходимость и, скажу я, рок." [4, с.59].

*Соотношение* (1.23) и *формула* (1.24), вместе взятые, являются записью закона больших чисел в *форме* Якоба Бернулли. Его обычно записывают в более слабом виде:

$$\lim_{\nu\to\infty} P\left\{\left|\frac{\nu_1}{\nu}-\frac{r}{t}\right| < \varepsilon\right\} = 1, \tag{1.25}$$

где $\varepsilon$ - сколь угодно малое заданное число. В записи (1.25) классическая вероятность $\nu_1/\nu$ является *состоятельной оценкой* вероятности статистической $r/t$. Фактически Якоб Бернулли доказал "естественность общего представления о том, что частота появления какого-либо случайного события при неограниченно увеличивающемся числе независимых наблюдений, производимых в одинаковых условиях, сближается с его вероятностью" [4, с.4].

В формулировке академика А.А.Маркова (1913 г.) теорема выглядит так: "Если производится неограниченный ряд испытаний и при всех этих испытаниях некоторое событие имеет одну и ту же вероятность, то при достаточно большом числе их можно утверждать с вероятностью, сколь угодно близкой к достоверности, что отношение числа появлений события к числу испытаний отклонится от вероятности события менее, чем на данное число, как бы мало оно ни было" [4, с.10], см. также (1.25). Современная формулировка *закона* больших чисел приведена в начале статьи.

Из других определений закона больших чисел отметим следующие: *математическое ожидание частоты события В* равно вероятности его появления; *стандартное отклонение* стремится к нулю с ростом $n$, и при фиксированном $n$ оно не превосходит $1/2\sqrt{n}$. Иногда закон больших чисел записывают по-другому:

$$P\{|n_i/n-p_i|>\varepsilon\} \to 0. \qquad (1.26)$$

*Понятие* "закон больших чисел" в 1835 году предложил С.Д.Пуассон (*Poisson Simeon Denis*; 1781-1840). Своё *определение* он повторил через два года в "Исследованиях о вероятности приговоров в уголовных и гражданских делах": "Явления всего мира подчинены универсальному закону, который можно назвать законом больших чисел. Он состоит в том, что если наблюдают весьма значительные количества событий одной и той же природы, зависящих и от постоянных причин, и от причин, изменяющихся иррегулярно ..., то между этими количествами обнаружатся почти постоянные соотношения". Переменные причины, уточнил С.Д.Пуассон, не должны действовать односторонне, и добавил, что в *пределе* указанные соотношения будут выполнены точно [4, с.110].

В заключение необходимо отметить, что *эмпирическое распределение формируют* внутренние причины *явления*, а не закон больших чисел. Большое число *наблюдений* - условие для того, чтобы случайные отклонения $n_i/n$ от $p_i$ погашались. По существу, закон больших чисел формализует естественную **связь** между **случайным** и **необходимым**. Другими словами, **в совокупности**, где происходят те или иные *массовые случайные явления*, случайные события во времени и/или в пространстве имеющие место быть (в принципе осуществимые) реализуются неизбежно.

См. также *Вероятность классическая, Вероятность математическая, Вероятность статистическая, РАСПРЕДЕЛЯТЬ, Частота случайного события.*

# В

**Вариации коэффициент** (< *польск.* warjacja или *нем.* Variation < *лат.* variatio - различие, изменение; variatim - различно, разнообразно; variatus - разнообразный. - *И.Х.Дворецкий, Н.Ю.Шведова* [84, 104]) - безразмерная *мера* рассеяния *случайной величины* относительно *математического ожидания*:

$$V_x = \frac{б_x}{M_x}, \qquad (1.27)$$

где $б_x$ - *стандартное отклонение* случайной величины, $M_x$ - математическое ожидание. *Коэффициент* вариации был предложен в 1895 году К.Пирсоном (*Pearson Karl*; 1857-1936). *Выборочный* коэффициент вариации вычисляется по *формуле*:

$$V_x = \frac{s_x}{m_x}, \qquad (1.28)$$

где $s_x$ - *квадратичное отклонение* случайной величины, $m_x$ - *оценка* математического ожидания. В практике экспериментальных исследований коэффициент вариации служит также оценкой точности (*воспроизводимости*) эксперимента; в отечественной литературе его называют относительной ошибкой и обычно выражают в процентах. Важно различать коэффициент вариации выборочного распределения и оценку воспроизводимости эксперимента. Первый характеризует закон распределения, второй всего лишь ошибки эксперимента.

См. также *Генеральный, Вариация, Дисперсия воспроизводимости, Стандарт.*

**Вариационный ряд** (< *польск.* warjacja или *нем.* Variation < *лат.* variatio - различие, изменение; variatim - различно, разнообразно; variatus - разнообразный. - *И.Х.Дворецкий, Н.Ю.Шведова* [84, 104]) - последовательность *элементов* ($x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$) *случайной выборки* размерности $n$, получаемая путём их расположения в *выборке* в порядке неубывания:

$$x_1 \leq x_2 \ldots \leq x_i \ldots \leq x_n. \qquad (1.29)$$

Вариационный ряд необходим при первичной *обработке данных*, характеризующих **один признак** *совокупности*, в частности, для построения *гистограммы распределения случайной величины* и для построения *эмпирической функции* распределения $F(x)=n_x/n$, где $n_x$ - *число элементов* ряда меньше $x$. Представление случайной выборки в виде вариационного ряда необходимо также для *определения закона* распределения случайной величины. В тех случаях, когда *элементы* выборки содержат в себе несколько признаков, можно получить соответствующее количество вариационных рядов по каждому варьирующему признаку.

Подразумевается, что *функция распределения случайной величины* $F(x)$ и *плотность вероятности* $p(x)$ отличны от нуля.

См. также *Вариация.*

**Вариация** (< *польск.* warjacja или *нем.* Variation < *лат.* variatio - различие, изменение; variatim - различно, разнообразно; variatus - разнообразный. - *И.Х.Дворецкий, Н.Ю.Шведова* [84, 104]) - изменение, видоизменение, разновидность; изменение, некоторое отклонение от основной формы. (*муз.*) Приём композитора (исполнителя), состоящий в многократном, разнообразном изменении ритма, тональности, аккомпанемента и т.д. главной мелодии (темы) в границах узнаваемости. (*мат.*) Вариационное исчисление, один из разделов математического анализа. [84, 93, 104].

См. также *Вариации коэффициент, Вариационный ряд, Среднее, среднее значение.*

**Величина** - именованное *число*, отвлечённое число (действительное или комплексное), несколько чисел (точка пространства) и, вообще, *элемент* любого *множества* (в самом широком смысле). Величина - одно из основных *математических понятий*, смысл которого с развитием математики неоднократно уточнялся и обобщался.

1. Ещё в "Началах" Евклида (III в. до Р.Х.) были отчётливо *сформулированы свойства* величины, называемые теперь для отличия от дальнейших обобщений положительными *скалярными* величинами. Это первоначальное понятие величины является непосредственным обобщением более конкретных понятий: длины, площади, объёма, массы и т.п.

2. Рассмотрение скоростей, могущих иметь два противоположных направления, ускорений и т.п. величин естественно приводит к включению в *систему* величин нуля и отрицательной величины.

3. В более общем смысле величиной называются векторы, тензоры и т.п.

4. Действительные числа принято называть величинами, поскольку они обладают всеми свойствами скалярных величин.

5. *Переменные* величины, *количественно* характеризующие *процессы*, свойства системы тел и *явления*, по существу являются числами, входящими в понятие величины (аналогично, переменные векторы, тензоры и т.п.).

6. "*Случайные величины*" тоже входят в понятие "величина" на том основании, что *результаты наблюдений* и *экспериментов* в большинстве случаев являются числами и числами случайными.

См. также *Величина физическая.*

А вот какое определение физической величины в своей "Алгебре" (1766 г.) дал математик и физик Леонард Эйлер (*Leonhard Euler*; 1707-1783):

"1. Прежде всего называется величиной всё то, что способно увеличиваться или уменьшаться, или то, к чему можно нечто прибавить или от чего можно нечто отнять.

Таким образом, сумма денег является величиной, потому что допускает добавление к себе или отнятие от себя. Также и вес является величиной по тем же причинам.

2. Существует очень много разного рода величин, которые не поддаются счёту, и от них происходят различные разделы физики*, каждый из которых имеет дело со своим особым родом величин. Физика* вообще есть не что иное, как наука о величинах, занимающаяся нахождением средств, как измерять последние.

3. Однако невозможно определить или измерить одну величину иначе, как принять в качестве известной другую величину этого же рода и указав отношение, в котором она находится к ней.

Так что если эта величина должна определять сумму денег, то принимается в качестве известного некоторое количество денег, например, гульден, рубль, талер или дукат и т.д., и указывается, сколько раз такое количество содержится в данной сумме денег.

Аналогично, если эта величина должна определять вес, то принимается в качестве известного некоторый вес, например, фунт, центнер или лот и т.д., и указывается, сколько раз он содержится в данном весе.

Если же требуется измерить какую-нибудь длину или ширину, то при этом пользуются одной определённой известной длиной, именуемой футом.

4. При определении или измерении величин всякого рода мы приходим, следовательно, к тому, что прежде всего устанавливается некоторая известная величина этого же рода, именуемая мерой или единицей и зависящая исключительно от нашего произвола. Затем определяется, в каком отношении находится данная величина к этой мере, что всегда выражается через числа, так что число является не чем иным, как отношением, в котором одна величина находится к другой, принятой за единицу."

К этим определениям физической величины, единицы и численного значения даже в наше время трудно что-то добавить принципиально новое. [30].

**Величина физическая** - характеристика *физических* тел (*системы* тел), *процессов*, *явлений* материального мира, общая для *множества объектов* или явлений в *качественном отношении*, но в отношении *количества* конкретная не только для каждого из них, но и для каждого *элемента* системы. Примерами физических величин являются различные *коэффициенты* (диффузии, проницаемости, фильтрации, динамической вязкости, кинематической вязкости, пластической вязкости, гидравлического сопротивления и многие др.), *параметры* состава (концентра-

*Примечание 8. Леонард Эйлер пишет здесь о математике, но по смыслу редактором перевода Матвеевым А.Н. она заменена на физику [30].

ции объёмная массовая, объёмная мольная, массовые и мольные доли компонентов), характеристики веществ (плотность, удельный вес и др.), параметры *состояния* (давление, температура, энергия Гельмгольца, энергия Гиббса, энтальпия, энтропия), параметры процесса (массовый расход, температура, давление, время, скорость и др.), геометрические характеристики (объём, длина, высота, радиус, площадь и т.п.), а также работа, ускорение, сила, масса, вес тела, ускорение силы тяжести и т.д. Физические величины могут быть размерными и *безразмерными*. В большинстве физические величины - числа действительные (вещественные).

В *пределах* системы физические величины могут изменяться и во времени, и в пространстве. Например, параметры процесса бурения - механическая скорость бурения, нагрузка на инструмент и скорость его вращения, искривление траектории, температура в забойной зоне, расход и параметры промывочной жидкости и др. - являются одновременно физическими величинами, *переменными, случайными* величинами и, наконец, ***величинами***. Физическая величина - *понятие* менее ёмкое по значению, чем величина, но более конкретное. Практически все физические величины, *определяемые* с помощью тех или иных *измерительных* приборов, являются случайными величинами. См. также *Мера*.

**Величины соизмеримые и несоизмеримые** - две однородные *величины* (например, длины, площади и т.д.), обладающие или, соответственно, не обладающие *общей мерой*. Примерами *несоизмеримых* величин могут служить длины диагонали и стороны квадрата или площади круга и квадрата, построенного на радиусе. Если величины соизмеримы, то их *отношение* выражается рациональным *числом*, если несоизмеримы, то иррациональным. Поэтому, если в *совокупности* однородных величин принять одну за единицу, то величины, соизмеримые с ней, будут выражаться рациональными числами, а величины несоизмеримые - иррациональными. Открытие несоизмеримых величин составляет одну из важнейших заслуг древнегреческих математиков.

В практике математического *моделирования* технологических *процессов* соизмеримыми и несоизмеримыми величинами иногда называют *физические* величины, различающиеся между собой на несколько порядков. Если с такими величинами производятся многократные арифметические операции, то в *результате* происходит накопление *ошибок* округления, которые могут привести к неверным результатам расчёта.

См. также *БЕЗКОНЕЧНЫЙ, Количество, Мера, Отношение*.

**Вероятное отклонение, срединное отклонение, семиинтерквартильная широта** - одна из характеристик рассеяния *распределения вероятностей*, равная $1/2(K_{3/4} - K_{1/4})$, где $K_p$ - *квантили* распределения *случайной величины* $X$. Если распределение случайной величины $X$ *непрерывно* и *симметрично относительно* точки $m_x$, то вероятное отклонение $B$ удовлетворяет условию:

$$P\{|X-m_x|<B\} = P\{|X-m_x|>B\} = \frac{1}{2}. \qquad (1.30)$$

Для *нормального распределения* существует простая связь вероятного отклонения со *стандартным* (*квадратичным*) отклонением $\sigma_x$:

$$\Phi(B/\sigma_x) = 3/4, \qquad (1.31)$$

где $\Phi(x)$ - *функция стандартизованного нормального распределения* (см. раздел 2.8). Приближённо:

$$B \approx 0,6745\sigma_x \approx 2/3\sigma_x. \qquad (1.32)$$

"Во всех прочих делах мы имеем дело лишь с вероятностью, но когда речь заходит о предметах веры, то отпадают всякие "может быть." (*Аврелий Августин*; 354-430).

**Вероятностей теория** - *математическая теория*, позволяющая по *вероятностям* одних *случайных явлений* находить вероятности других случайных *событий, связанных* каким-либо образом с первыми. Познавательная ценность теории вероятностей обусловлена тем, что массовые случайные явления в своём *совокупном* действии создают **строгие *закономерности***. Практическая ценность *вероятности математической* заключается в некотором постоянстве *частоты* осуществления какого-либо события при многократном повторении однородных условий (в *пределе* - *неизбежность*).

Утверждение о том, что какое-либо событие наступает с вероятностью, равной, например, 1/2, ещё не представляет само по себе окончательной ценности, ну разве что при розыгрыше. Практическую познавательную ценность имеют те *результаты* теории вероятностей, которые позволяют утверждать, что вероятность наступления какого-либо события $B$ весьма близка к единице или (что то же самое) вероятность ненаступления события $B$ весьма мала. В соответствии с *принципом* "пренебрежения достаточно малыми вероятностями" такое событие справедливо считают практически достоверным. Такого рода выводы, имеющие научный и практический интерес, обычно основаны на допущении, что наступление или ненаступление события *B* зависит от большого числа случайных, мало связанных друг с другом *факторов*. Поэтому можно сказать, что теория вероятностей есть математическая наука, выясняющая *закономерности*, которые возникают при взаимодействии большого числа случайных факторов.

Предметом теории вероятности является изучение *свойств* вероятностей событий, являющихся результатом некоторого *множества* воздействий, на основе достаточно простых *соотношений*. Подразумевается, что при условиях *S* событие *B* имеет *определённую* вероятность $P(B|S)$, равную *p* (случайная или *стохастическая* реакция *системы* на совокупность условий *S*). Это означает, что почти в каждой достаточно длинной серии испытаний *n* частота $n_i/n$ события *B* приблизительно равна $p_i$. Например, при бурении в неустойчивых горных породах прихват может произойти, а может и не произойти. Практическую ценность будет иметь связь вероятности прихвата от конкретных условий (способа бурения, литологии разрезов, диаметров скважины и бурильной колонны, свойств бурового раствора, *состояния* фильтрационной корки и др. Такие *статистические модели* описаны в литературе). Подробнее см. раздел 2.3.

В *детерминированных процессах* состояние системы в *момент* времени $\tau_0$ однозначно определяет ход процесса в будущем - $\tau_1$, $\tau_2, \ldots, \tau_i$. Этим предмет теории вероятностей отличается от детерминированных реакций систем на совокупность условий *S*: при каждом осуществлении условий *S* наступает или не наступает событие *B* (однозначная реакция). Например, все *законы* классической механики, химии и др.

Источником теории вероятностей явился интерес математиков к азартным играм, в частности, труды Б.Паскаля (*Pascal Blaise*; 1623-1662), П.Ферма (*Fermat Pierre*; 1601-1665) и Х.Гюйгенса (*Huygens Christian*; 1629-1695) в XVII в. по теории азартных игр.

См. также *Вероятность классическая (априорная), Вероятность математическая, Вероятность статистическая (апостериорная), Вероятный, Статистика математическая, Совокупность, СОВОКУПЛЯТЬ, Частота случайного события.*

> "Опыт - это название, которое каждый даёт своим ошибкам" (*Оскар Уайльд*; 1856-1900).

**Вероятность житейская** - *оценка* человеком осуществимости какого-либо *случайного события* (*СС*, *явления*, *процесса*), реальность которого относительно далека и от *неизбежности* (P(*CC*)=1), и от *невозможности* (P(*CC*)=0). Житейская вероятность неразрывно связана с *частотой* случайных событий (1.284) и, в большинстве случаев, основана на ней. Главная проблема этих оценок - их *субъективность*, временность и неопределённость, иногда оценка вероятности события выражает лишь отношение человека к делу. С течением времени и/или в зависимости от настроения человека оценка может меняться, меняеться она также и от интонации произнесения, и от расставленных акцентов.

Понятия, характеризующие различные *случайные события* в жизни человека и его социального окружения, в значительной степени *субъективны*, медленно меняются от поколения к поколению, изменяются и во времени, и в пространстве. Любые *оценки* случайных событий относительны, поскольку рождаются в сравнениях и противопоставлениях. И совершенно естественно между вероятностью житейской и *математической*, *формализованной* в XVIII-XIX вв., в обыденном сознании пролегла непреодолимая пропасть.

Изменения свойственны всем понятиям, и этот *процесс* характеризуется *законами* развития языковых *форм*, с одной стороны, и действием множества *детерминированных факторов* (физических причин, произвольно сочетающихся), с другой стороны. *Детерминизм*, *динамичность* и хаос в *причинно-следственных связях* человека и его окружения и тот факт, что для большинства людей их жизнь - *детерминированно-стохастический процесс*, приводят к тому, что в трансформациях содержания понятий присутствуют как закономерности, так и случайности*.

Попробуем связать понятия житейской вероятности с *нормальным распределением* (рис.1.3, см. также рис.1.20,б, рис.1.43, рис.2.27 и рис.2.28). *Закон* нормального распределения - предельный закон биномиального распределения, закон формализующий результат хаоса и динамичности в причинно-следственных связях множества детерминированных факторов, каждый из которых по интенсивности не выделяется на фоне других. Согласно закону нормального распределения *вероятность* того, что случайная величина примет значение в *интервале* $M_x - б < X < M_x + б$ равна

*Примечание 9. Например, слово "ноль" является следствием особенности артикуляции губ при произнесении звуков "о" и "у", первично слово "нуль" (*лат.* nullus); в случае слова "номер" (*лат.* numero) процесс перехода от "у" к "о" почти завершился (мы ещё пока говорим "нумерация"). Слово "ненавидеть" когда-то означало всего лишь нежелание видеть какого-либо человека, а сейчас?... Слово "целомудрие" когда-то соотносилось с человеком пожившим и набравшимся **целой** мудрости, а в середине XX в. целомудренной называли невинную девушку. И наконец, словом "херъ" во времена В.И.Даля называли букву в слове, которую либо приписывали (прихеривали), либо зачёркивали (захеривали). Подобных примеров множество. См. также *Понятие*, *Термин технический*.

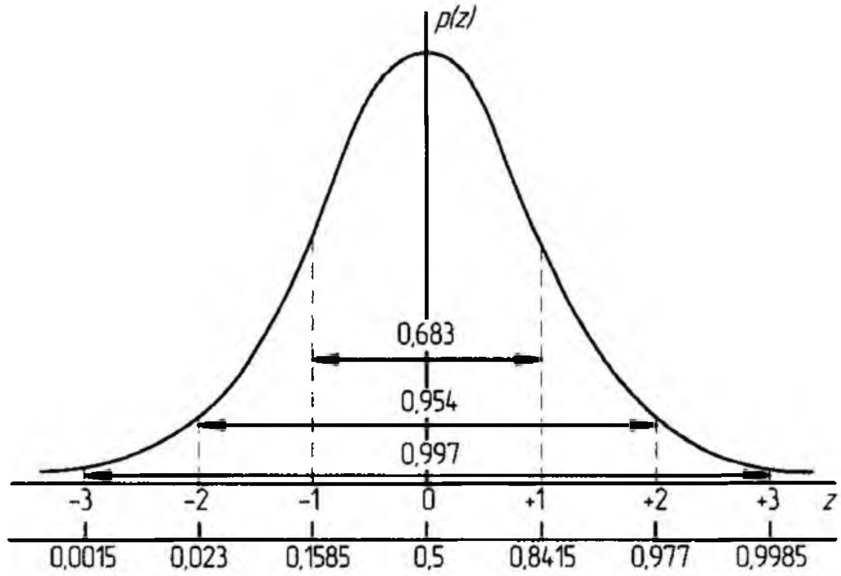



Рис.1.3. Сопоставление кривой плотности вероятностей для нормального закона и градаций понятий житейской вероятности (площадь под кривой плотности вероятностей равна 1)

0,683, вероятность попадания в интервал $M_x-2б<X<M_x+2б$ равна 0,954, а вероятность попадания случайной величины в интервал $M_x-3б<X<M_x+3б$ равна 0,997 (рис.1.3). Вероятность того, что случайная величина $X$ окажется за пределами трёх сигма, равна 0,003, и практическое пренебрежение этой вероятностью называется *правилом трёх сигма* (1.255). Математически это выглядит так: $P(X<(M_x-3б))=0,0015$ и $P(X>(M_x+3б))=0,0015$. И это ещё не всё - кривой плотности вероятностей нормального распределения обязательно свойственна симметрия, выражающаяся в равной *вероятности* появления значений признака больших или меньших *среднего значения* на одинаковую величину. И наконец, считаются возможными значения случайной величины как $-\infty$, так и $+\infty$. В нашем случае всё достаточно конечно. Вероятности случайных событий ограничены невозможностью и неизбежностью (нулём и единицей).

Вероятность попадания нормально распределённой случайной величины $X$ в интервал четыре сигма ($M_x-2б<X<M_x+2б$) равна 0,954, в *теории* проверки *статистических гипотез* эта вероятность эквивалентна *доверительной вероятности* $P=0,95$ (соответствующий *уровень значимости* $\alpha=0,05$)). Уровень значимости $\alpha=0,05$ принимается при проверке статистических гипотез в научных и прикладных исследованиях достаточно часто.

Попробуем предположить, что вероятность попадания нормально распределённой случайной величины в интервал $M_x-2б<X<M_x+2б$ равная 0,954 характерна не только для физических явлений, но свойственна и другим явлениям. Вероятности *массового случайного явления* $P=0,95$

соответствуют некоторые социальные явления. Например, в современной России только каждый 20-тый человек спрашивает у полицейского документы, каждый 20-тый россиянин вооружён, только каждая 20-тая супружеская пара распадается при изменах мужа, от жён страдающих алкоголизмом уходят 19 из 20 мужчин...

Подобная статистика достаточно обширна, как впрочем и многие другие. Приведённые примеры не единственные - см. рассуждения С.Д.Пуассона (1781-1840) о вероятностях приговоров в уголовных и гражданских делах на с.34. По аналогии с правилом трёх сигма интервал $\mathbf{M_x}-2\sigma \leqslant X \leqslant \mathbf{M_x}+2\sigma$ и вероятность P=0,95 попадания случайной величины в него назовём "правилом двух сигма".

Более 300 лет назад Якоб Бернулли предложил считать вероятность невозможного события за ноль (P(*НС*)=0), а вероятность достоверного (неизбежного) события за единицу (P(*ДС*)=1), (см. стр. 47). Обсуждая житейскую вероятность сопоставим это *интервал* шести *стандартам*, т.е. 0÷1 соответствует 6**б**. Естественно считать, что вероятность P(*СС*)=0,5 характеризует полную неопределённость человека в отношении оценки вероятности случайного события. Примем вероятность P(*СС*)=0,5 за *центр* распределения понятий, характеризующих осуществимость событий, а интервалу рискованных (неопределённых) суждений сопоставим интервал в два сигма (0,1585÷0,8415 или 0,5±0,3415), соответствующий вероятности P(*СС*)=0,683. Отметим также, что к житейской вероятности имеют непосредственное отношение условия: "если - то...", "если бы..." (например, "если бы, да кабы, да во рту росли грибы, то был бы не рот, а целый огород". Логично задаться вопросом - какую вероятность имел в виду произносящий (с вызовом?) этот аргумент? Явно не невозможность!).

Правилу трёх сигма сопоставим вероятности случайного события 0<P(*СС*)⩽0,0015 и 0,9985⩽P(*СС*)<1. Предположим, что этим вероятностям - **крайне малой** вероятности (P(*СС*)⩽0,0015) и **крайне высокой** (P(*СС*)⩾0,9985) соответствуют "крайние случаи" в жизни человека и ситуации, про которые говорят, например, "*земля треснет, а чёрт выскочит*", "*когда рак на горе (в поле) свистнет*" или так "... *но вероятность (всётаки) есть!*". В случаях крайне высокой вероятности осуществимости событий в русском языке имеется обилие синонимов с предлогом "не" выражающих опасение в благоприятном исходе: (вдруг) не будет, не выйдет, не вырастет, не доведётся, не закончится, не получится, не придёт, не прикончит, не произойдёт, не свершится, не случится, не совершится, не удастся, не явится..., *в прош. вр.* не сладилось, не склеилось, не сбылось..., промашка, ошибка, незадача, неувязка, осечка...

Поскольку в нашем случае речь идёт о понятиях, характеризующих осуществимость случайных событий, вероятности $P(CC)=0{,}954$ сопоставим интервалы $(0{,}023\div0{,}1585)$ и $(0{,}8415\div0{,}977)$. В результате такого сопоставления вероятности событий $P(CC)=0{,}023$ и $P(CC)=0{,}977$ оказываются между более обоснованными интервалами $(0{,}0015\div0{,}1585)$, с одной стороны, и интервалами $(0{,}8415\div0{,}9985)$, с другой.

На этом предполагаемые аналогии нормального распределения и распределения понятий, характеризующих случайные события в жизни человека, заканчиваются, так как между интервалами вероятностей, соответствующими шести сигма ($P(CC)>0{,}0015$ и $P(CC)<0{,}9985$), и интервалами вероятностей, соответствующими двум сигма $(0{,}1585<P(CC)<0{,}8415)$, появляются два интервала в области маловероятных событий $(0{,}0015\div0{,}023)$ и $(0{,}023\div0{,}1585)$ и два интервала в области реальных событий $(0{,}8415\div0{,}977)$ и $(0{,}977\div0{,}9985)$. Поскольку подобрать понятия, соответствующие именно этим интервалам, проблематично, их лучше объединить. Ниже представлен один из возможных вариантов градации понятий русского языка (и не только), характеризующих житейскую вероятность случайных событий.

$P(CC)=0$. Невозможно, исключено, неосуществимо, недостижимо, невыполнимо, недоступно, недосягаемо.

$0<P(CC)\leqslant0{,}0015$. Почти невозможно, практически невозможно, немыслимо, несбыточно, невероятно, невообразимо, недопустимо. Об этом не может быть речи; этот номер не пройдёт. (Иллюзорно, нереально, фантастично, утопично, химерично). *"Земля треснет, а чёрт выскочит"*, *"когда рак на горе свистнет"*, *"..., но вероятность (всётаки) есть!"*, *"в крайнем случае"*, *"на всякий случай"*, *"на худой конец"*.

$0{,}0015<P(CC)\leqslant0{,}023$
$0{,}023<P(CC)\leqslant0{,}1585$

Быть не может(!), не может быть(!); (достаточно уверенное утверждение с ударением на "быть", причём разговаривающие различают некоторую неравнозначность сочетаний: "быть не может" и "не может быть". (Но элемент сомнения всетаки есть!)). Не исключено, что..., есть шанс, что..., вряд ли, маловероятно, сомнительно, гадательно. "Была не была!", "Будь что будет!"

$0{,}1585<P(CC)<0{,}8415$. Вероятно, возможно, относительно возможно, не всегда возможно, видимо, по-видимому, очевидно, кажется, кажись, верно, наверно, наверное, (как) видно, может, пожалуй, похоже, как будто (*разг.*); отчасти возможно, некоторая возможность; видать, слыхать, знать, чай, поди, гляди, глядишь, почитай, никак (*прост.*); чаятельно (*устно*) ⇔ может быть, может не быть, может статься, надо думать, надо полагать, должно быть, по всей вероятности, по (всей) видимости, если угодно, если хотите, похоже (на то) что..., как (я) погляжу; надо быть (*прост.*); должно статься, должно полагать (*уст. и обл.*). Случайно, по случаю, по воле случая, волею случая, нечаянно. Заблудящий (*прост. и обл.*), шальной (*разг.*). Бабушка надвое сказала (*разг.*). Середина на половину (*разг.*). Ни два ни полтора (*разг.*). Ни Богу свечка ни чёрту кочерга (*разг.*). Ни Пава ни мясо (*разг.*). [70, 90, 94]. Потенциальный, эвентуальный.

$0,8415 \leqslant P(CC) < 0,977$ Вполне возможно, также возможно, скорее всего, вернее всего.
$0,977 \leqslant P(CC) < 0,9985$ Осуществимо, выполнимо, достижимо, исполнимо, совершимо, свершимо, реально.

$0,9985 \leqslant P(CC) < 1,0$. Наверняка, действительно, несомненно, точно, "*в крайнем случае*", "*во всяком случае*". *В прош. вр.* промашка, ошибка, незадача, неувязка, осечка, не сладилось, не склеилось.

$P(CC)=1$. Неизбежно, достоверно, неминуемо, неотвратимо, непредотвратимо; фатально (*в знач. сказ.* быть *чему*, не миновать *чего*, не уйти *от чего*, никуда не деться *от чего* (*В.И.Даль*; 1801-1872)).

На самом деле любое определённое суждение может быть только истинным или ложным, событие в большинстве случаев неизбежно или невозможно. Например: верность - измена, истина - ложь, спокойствие - бешенство, постоянство - временность, естественность - искусственность, выигрыш - проигрыш, законность - анархия, счастье - несчастье, подлинность - фальшивость, победа - поражение, реальность - вымысел, упал - устоял и т.д. Эти диаметрально противоположные определения первичны, градации отношений возникали позже. Развивая аналогии с нормальным распределением можно предположить, что в рассматриваемом аспекте совершенствование языка шло по пути заполнения этих противоположных определений промежуточными формами, отражающими хаос и динамичность жизненных перипетий человека. (См. также примечание 16 на с.277).

В малозначимых реалиях жизни градации (оттенки) не так уж и существенны. Это подтверждает обилие синонимов (48) только в семи синонимических рядах интервала вероятностей $0,1585 < P(CC) < 0,8415$

(всего 57 слов и словосочетаний в интервале 0,5±б). С другой стороны, интервал вероятностей достаточно велик, поскольку зафиксирован стандартными отклонениями б нормального распределения, взятым за критерий градации понятий. Таким образом, средняя область житейской вероятности характеризует события случайные по существу своего проявления, не обладающие постоянством частоты. Такие события не могут служить основой прогнозов и каких бы то ни было закономерностей. На область 0,5±б пришлась половина слов и словосочетаний (49,6%). Но и по краям распределения понятий случайных событий слов достаточно много. На область 0,5±2б приходится 67%, а на область 0,5±3б - 85,2% слов и словосочетаний. Очевидно, что *основная гипотеза* может быть отклонена, пропасть преодолеть не удалось*. Также очевидно, что для русского человека градации **случайных**, по существу, **событий** в реалиях жизни не безразличны (иначе зачем так много синонимов?!).

Достаточно интересен тот факт, что понятия характеризующие область рискованных суждений составляют 17,4% (10+10), понятия характеризующие "крайние случаи" в жизни человека составляют 18,3% (8+13), а понятия характеризующие невозможные и неизбежные события - 14,8% (8+9) в принятой выборке. По существу, в нашей далеко не полной выборке распределение понятий недалеко от равномерного. Подведём итог. Разнообразие языковых форм житейской вероятности служит приёмом самовыражения и коммуникации людей в семье и обществе.

См. также *Абсолютный, Бесконечность, БЕЗКОНЕЧНЫЙ, Больших чисел закон, Вероятность классическая (априорная), Вероятность статистическая (апостериорная), Возможность, Действительность, Достоверность, Независимость, Необходимость, Необходимость и случайность, Норма, Объективность, Объективный, Отношение, Причина, Причинность, Причинно-следственная связь, ПРИЧИНЯТЬ, Равновозможность, Связь, Следствие, СЛУЧАЙ, Статистика математическая* и раздел 2.3 (*Вероятности событий*).

"Замечательно, что науке, начинавшейся с рассмотрения азартных игр, суждено было стать выжнейшим объектом человеческого знания..." (П.Лаплас (*Laplace Pierre Simon*; 1749-1827)).

**Вероятность классическая** (*априорная*) - *отношение числа* исходов, $\nu_1$, "благоприятствующих" некоторому *событию В*, к общему числу

*Примечание 10. Автор признаёт, что произведённая им попытка связать понятия житейской вероятности с нормальным распределением в значительной степени условна и субъективна. Кроме этого, автор сознательно не производил поиск в таком словаре, как "Толковый словарь живого великорусского языка" *Владимира Даля*, а также в **"БОЛЬШОЙ ЭНЦИКЛОПЕДИИ"** *С.Н. Южакова* и в **ЭНЦИКЛОПЕДИИ** *Брокгауза Ф.А.* и *Ефрона И.А.*

"равновозможных" исходов $\nu$*:

$$P(B)=\hat{p}_1= \frac{\nu_1}{\nu}, \tag{1.33}$$

где $\nu_1$ и $\nu$ известны заранее, до испытаний или наблюдений.

Это *определение вероятности,* ставшее позже классическим, принадлежит Якобу Бернулли (*Jacob Bernoulli*; 1654-1705), хотя сам Якоб Бернулли не использовал его при доказательстве *больших чисел закона*: "Вероятность же есть степень достоверности и отличается от неё как часть от целого. Именно, если полная и безусловная достоверность, обозначаемая нами буквой $\alpha$ или единицей 1, будет, для примера, предположена *состоящей* из пяти вероятностей, как бы частей, из которых три благоприятствуют существованию или осуществлению какого-либо события, остальные же не благоприятствуют, то будет говориться, что это событие имеет 3/5$\alpha$ или 3/5 достоверности" [4, с.24].

Примеры исчисления вероятности классической. *Результат* бросания *идеальной* игральной кости - *число* очков от одного до шести, а поскольку каждая грань может открыться с одинаковой вероятностью, то и вероятность любого результата равна 1/6. Результаты бросания двух игральных костей отличны по существу своего проявления. Поскольку кости падают *независимо* друг от друга, число очков, например, 5, может выпасть в результате четырёх *равновозможных* комбинаций - (1+4), (2+3), (3+2), (4+1), а всего возможно 36 комбинаций. Таким образом, вероятность выпадения 5 очков равна 4/36. Очевидно, что вероятность классическую можно назвать вероятностью a priori. Дело в том, что вероятность классическую в большинстве случаев можно вычислить (a priori), в частности, для игр, азартных и не очень. Изобретатели игр продумали содержание игр так, чтобы были точно "известны числа случаев, влекущих выигрыш или проигрыш, а сами случаи могли бы встретиться одинаково легко. В большинстве же других явлений, зависящих или от действий сил естественных, или от свободной воли людей, не имеет места ни то, ни другое" [4, с.40]. Точное (значит - бесспорное) число случаев выигрыша и проигрыша *возможно* только при использовании целых чисел; отчасти по этой *причине* нет

*Примечание 11. Принцип равновозможности применялся в различных культурах с глубокой древности как в философии, так и в практической деятельности людей, - распределение материальных и природных ресурсов, повинностей, должностей и т.п. по жребию. В настоящее время в различных численных процедурах используются генераторы случайных чисел, выдающие, как правило, нормированную равномерно распределённую случайную величину.

азартных игр, результаты которых выражались бы вещественными числами.

Иногда Якоба Бернулли называют основателем *субъективного* представления о вероятности, в гл. 2 "Искусства предположений" он пишет "Делать о какой-либо вещи* предположения - всё равно, что измерять её вероятность". А в 1685 или 1686 г. в своём дневнике Якоб Бернулли упоминал о вероятности как о доле уверенности в контексте задачи о вероятности одному человеку пережить другого [4, с.96].

Необходимо отметить тот факт, что до 1713 г. (года издания рукописи Я. Бернулли "Искусство предположений") *определённости* в вычислении вероятности не было. Обычно учёные использовали не *формулу* (1.33), а соотношение шансов "за" и "против", хотя *математическое ожидание* выигрыша, которое служило основным *понятием* у Б. Паскаля (*Pascal Blaise*; 1623-1662), П. Ферма (*Fermat Pierre*; 1601-1665) и Х. Гюйгенса (*Huygens Christian*; 1629-1695) в простейшем случае сводилось к вероятности (1.33). Б.В. Гнеденко (1912)-1995) и М.Т. Перес придавали большое значение появлению классического и *статистического* определений вероятностей у Якоба Бернулли. С этого *момента началась теория* вероятностей [4, с.96].

См. также *Больших чисел закон*, *Вероятность математическая*, *Вероятность статистическая* (*апостериорная*), *Вероятный* и разделы 2.3. и 2.4.

> "Вероятность - это придуманная нами величина, оценивающая возможность придуманного нами события." (*Виктор Кротов*; р.1946).

**Вероятность математическая** - *понятие*, лежащее в основе особого класса *закономерностей* - *вероятностных* или *статистических* - и являющееся выражением *качественно* своеобразной *связи* между *случайным* и *необходимым*. Плодотворность *математической* вероятности находит своё осуществление в виде некоторого постоянства** *частоты* появления какого-либо *результата* при многократном повторении однородных условий. В научном познании понятие "вероятность" отражает особый тип

---

*Примечание 12. В оригинале на латинском языке "res". Латинское слово "res" имеет много значений. Это не только "вещь" в переводе с латинского, сделанного в 1913 г. приват-доцентом Санкт-Петербургского университета Я.В. Успенским (1883-1947), но и, среди прочего, случай, явление, событие, факт.

**Примечание 13. Частота события, по существу, случайная величина, и некоторое постоянство частоты не следует понимать буквально, т.к. частота

$$h_1 = n_1/n \to p_1 \text{ при } n \to \infty.$$

связей между *явлениями*, характерными для массовых *процессов*. Дело в том, что массовые **случайные** *явления* в своём *совокупном* проявлении создают **математически строгие закономерности**, выявив которые, можно делать далеко идущие выводы. Во многих сложных ситуациях определение численного значения вероятности *события* или численной *оценки* надёжности *суждения* требует *статистического* подхода.

В случаях *симметричных распределений случайной величины вероятность* $p_1$ события $B$ является *пределом*:

$$\mathrm{P}(B)=p_1=\lim_{n\to\infty}\frac{n_1}{n}, \tag{1.34}$$

где $n_1$ - *число* исходов "благоприятствующих" появлению события $B$, $n$ - общее число *равновозможных* исходов. *Связь* вероятности $p_1$ с *частотой события* $h_1=n_1/n$ достаточно сложна и зависит от общего числа испытаний $n$ и закона распределения случайного события $B$. В случае симметричных распределений, чем больше число $n$, тем реже встречаются сколько-либо значительные отклонения частоты $n_1/n$ от вероятности $p_1$. В соответствии с этим вероятность события $B$ будет, по определению, *нормированной величиной*:

$$0 \leqslant \mathrm{P}(B) \leqslant 1. \tag{1.35}$$

В современной *теории* вероятностей *свойства* вероятности формулируются в виде *аксиом*. Однако ни эти аксиомы, ни классический подход к вероятности, ни *статистический* подход не дают исчерпывающего описания реального содержания понятия "вероятность", а являются лишь приближениями ко всё более полному его раскрытию. Далеко не всякое событие, наступление которого при *данных* условиях не является однозначно определённым, имеет при этих условиях определённую вероятность. Предположение, что при данных условиях для данного события вероятность, как вполне определённая *нормальная* доля числа наступления данного события при большом числе повторений данных условий, **существует**, является *гипотезой*, которая в каждом отдельном вопросе требует специальной проверки или обоснования. Например, при стрельбе бессмысленно говорить о попадании в цель вообще, если об условиях стрельбы ничего не известно.

В житейском сознании вероятности событий часто отождествляют с частотой. В отождествлении вероятности с частотой большой беды нет, необходимо только иметь в виду, что частота события в отличие от вероятности является *случайной величиной*. "На жизненном поприще знание без опыта - зрячий на не известной ему дороге, опыт без знания - слепец на не знакомой ему стезе: всякая перемена на ней сбивает его с толку." (*Ш. Пьермон*). Если $n$ - число повторных испытаний, осуществляющих заданные условия, и $n_1$ - число испытаний, в которых данное событие наступает, то *частота* $h_1=n_1/n$, как правило, мало отличается от вероятности $p_1$. Чем больше число $n$, тем реже встречаются сколько-нибудь значительные отклонения частоты $n_1/n$ от вероятности $p_1$.

Наибольший интерес представляют собой вероятности, близкие к 1 или 0. Соответствующие события рассматриваются как "практически достоверные" или "практически *невозможные*". Этот интерес обусловлен ответом на вопрос, какими вероятностями можно пренебрегать в научных исследованиях и технологии. При предварительных исследованиях рекомендуют пренебрегать вероятностью порядка 0,05, в "обычной" практике *экспериментальных* исследований приняты *величины* от 0,03 до 0,01. В ответственных случаях, до разработки нанотехнологий, "*критическая*" вероятность составляла величину 0,0027 (т.н. *Трёх сигма правило*) и даже менее. Подробно см. разделы 2.3. и 2.4.

См. также *Больших чисел закон, Вероятностей теория, Вероятность классическая, Вероятность статистическая. Вероятный, Доверительная вероятность, Математическая статистика, Совокупность, Частота случайного события.*

"Кто хочет знать, что случится, должен обращать внимание на то, что уже случилось."
(*Никколо Макиавелли*; 1469-1527).

**Вероятность статистическая** (*апостериорная*) - *вероятность*, равная *отношению числа* $n_1$ появлений *случайного события* $B$ при $n$ испытаниях к числу осуществлённых испытаний $n$:

$$P(B)=p_1=\frac{n_1}{n}. \qquad (1.36)$$

Отличие *формулы* (1.36) от (1.33) заключается в том, что $n_1$ *определяются* в *результате* $n$ испытаний, $P(B)$ зависит от $n$, причём в большинстве случаев $n_1$ и $n$ заранее не известны. *Связь вероятности* $p_1$ с *частотой события* $h_1=n_1/n$ достаточно сложна и зависит от общего числа испытаний $n$ и закона распределения случайного события $B$.

Проблема исчисления вероятностей заключается в том, что в большинстве "явлений, зависящих или от действий сил естественных, или от свободной воли людей", заранее не известны числа случаев, влекущих удачу или неудачу, более того, неизвестно, встретятся сами случаи или нет (*Якоб Бернулли*; 1654-1705) [4, с.40]. Есть некоторая определённость в результатах бросания одной *идеальной* игральной кости - *равновозможность* открытия любой из шести граней. Но никакой предварительный расчёт невозможен, если грани кости будут различной *формы* или у неё будет смещён *центр* тяжести. В рукописи периода 1664-1666 гг. И.Ньютон (*Newton Isaac*; 1643-1727) заметил, что "относительная лёгкость" выпадения отдельных граней неправильной игральной кости может быть определена из *опыта* [4, с.99].

Практическое определение *статистической* (*апостериорной*) вероятности по формуле (1.36) совершенно естественно возникло в статистике народонаселения и возникло значительно раньше 1686-1690 гг. Якобу Бернулли принадлежит заслуга в *формализации понятий априорной* и апостериорной вероятности. Непосредственный повод для формализации понятия статистической вероятности предоставила Я.Бернулли задача о том, насколько вероятнее юноше 20 лет пережить 60-летнего старика, чем старику пережить юношу. По этому поводу в письме Г.В.Лейбницу (*Leibniz Gottfried Wilhelm*; 1646-1716) Я.Бернулли писал: "Исходя из описанного примера, я начал спрашивать себя, нельзя ли будет узнать то, что нам не известно априорно, хотя бы апостериорно, по исходу большого числа сходных наблюдений..." [4, с.100]. Также естественно решается вопрос об опасности для человека различных болезней и причин смерти в пользу статистической вероятности, а не вероятности (1.33), ибо только на основании апостериорной вероятности можно "составить предположение о жизни или смерти в будущем" [4, с.100]. Житейские прогнозы погоды в значительной *степени* основаны на народных приметах, т.е. на *наблюдениях* и *анализе процессов* в атмосфере (*причинно-следственных связей*) поколений людей. Народные приметы подтверждают то, что массовые **случайные** *явления* в своём *совокупном* проявлении создают **строгие *закономерности***. Например, дым, выходящий из трубы свечой вверх, указывает на предстоящее резкое похолодание, стелющийся - на потепление, длинные и тонкие сосульки ранней весной указывают на то, что весна будет затяжной и холодной и т.д. События случайные по существу своего проявления, не обладающие постоянством частоты (это средняя область житейской вероятности) не могут служить основой прогнозов и каких бы то ни было закономерностей.

Непосредственное отношение к *апостериорной вероятности* имеют всем известные гороскопы. Казалось бы, какая может быть *связь* между датой рождения человека и характерными признаками его личности? Но древние мудрецы нашли статистически значимые связи между положением Солнца, Луны, *множества* других небесных тел в *момент* рождения и *структурой* личности человека, которые прошли проверку на протяжении не одного тысячелетия. Одна из главных проблем личных и социальных отношений людей - проблема несовместимости, особенно острая в замкнутых пространствах летательных, подводных и космических аппаратов [69]. Попробуем разобраться. В человеке более трёхсот биоритмов, в их основе - структура центральной нервной *системы* [69]. Можно думать, что амплитуды, периоды и фазы биоритмов *определяют* разной *природы* совместимость и несовместимость людей. Известно, что *идеальный* партнёр по знаку противоположен, а несовместимый - соседний, партнёры одного знака через некоторое время расстаются ("от любви до ненависти - один шаг" не про них ли? *Возможно*, что *причиной* разрыва является резонанс биоритмов...).

Так вот, архитектоника головного и спинного мозга, структура центральной нервной системы закладываются в первые две-три недели развития плода человека. Можно предположить, что в этот чрезвычайно важный период фон космического излучения производит некоторые изменения в *формирующейся* нервной системе, изменения, нарушающие наследственно предрасположенное. Фон космического излучения изменяется достаточно циклично. Древние мудрецы отмечали циклы - суточные, месячные, сезонные, годичные, двенадцатилетние и шестидесятилетние. Первые четыре проявляют себя в Солнечной системе, а два последних - в более крупных звёздных системах. В основе двух наиболее известных гороскопов - три последних цикла. Не следует думать, что *невозможно* проследить влияние на психотип человека циклов более высокого порядка, оно есть, но жизни одного мудрого человека не достаточно для выявления причинно-следственных связей расположения звёзд в космическом пространстве и психотипа родившегося человека. В отношении последнего автор позволит внести небольшую коррекцию: для преждевременно родившихся *необходимо* вводить соответствующую поправку и тогда рекомендации гороскопов в отношении совместимости партнёров будут более успешны.

Каждому человеку ясно, что для предположительного "рассуждения о каком-либо явлении не достаточно взять одно или другое наблюдение, но требуется большой запас наблюдений. Потому-то даже самый ограниченный человек по какому-то природному инстинкту сам собой и без всякого предварительного обучения (что очень удивительно) знает, что чем больше принято во внимание таких наблюдений, тем менее опасность не достичь цели" [4, с.42]. Всё это самым естественным образом всем известно, но в попытках подвести под здравый смысл научное обоснование, Я.Бернулли доказал, что *экспериментируя* можно сколь угодно точно определить неизвестную вероятность события. Позднее его теорему и доказательство С.Д.Пуассон (*Poisson Simeon Denis*; 1781-1840) назвал *законом больших чисел*.

См. также *Вероятный*, *Истина* и раздел 2.3. и 2.4.

**Вероятный** образовано от др.-русск., ст.-слав., букв. "принять веру", "уверовать" (*М.Фасмер*; 1886-1962. [100]). Достаточно очевидно, что этимологически *понятие* вероятность включает в себя как надежду на успех, так и сомнение в достижимости цели. Можно предполагать, что "вероятное" событие может осуществиться с вероятностью 0,5 (см. *Вероятность житейская*).

См. также *Вероятностей теория*, *Вероятность*, *Вероятность классическая* (*априорная*), *Вероятность математическая*, *Вероятность статистическая* (*апостериорная*).

**Веса результатов измерений** (*англ.* weigh - вес, влияние, значений [88]) - *числа*, выражающие *относительную* точность *результатов измерений*. Веса результатов измерений **обратно пропорциональны** *дисперсиям* соответствующих *ошибок*. Игнорировать эти различия при использовании результатов разноточных измерений нельзя, т.к. это обесценивало бы лучшие измерения, ставя их на один уровень с маонадёжными. Поэтому более точным измерениям присваивается больший вес. В случае нескольких *независимых* измерений $x_1$, $x_2, \ldots, x_n$ одной и той же *величины* X, в предположении, что измерения лишены систематической ошибки и имеют соответственно веса $W_1$, $W_2, \ldots, W_n$, наиболее надёжной *линейной оценкой* величины $M_x$ является *арифметическое взвешенное среднее* (1.213). Среди всех линейных оценок взвешенное среднее арифметическое обладает *минимальной* дисперсией.

При *определении дисперсии воспроизводимости* по текущим измерениям в качестве весов берутся *степеней свободы числа* (1.242) соответствующих дисперсий.

См. также *Квадратичное отклонение, Мера, Пропорциональность, Среднее, среднее значение.*

**Взвешенное квадратичное отклонение** см. *Квадратичное отклонение*, (1.78).

**Взвешенное степенное среднее** см. *Концепция, Середа, Среднее, среднее значение.*

"Единственный способ определить границы возможного - выйти за эти границы." (*Артур Кларк*; р. 1917).

**Возможность** - философская *категория*, проявляющаяся в *объективной* тенденции развития *процессов* и реализации *явлений* и *событий* в природе, технике, технологии и мышлении. Возможность - то, что может произойти, мыслимое, осуществимое, допустимое. Возможность подразумевает наличие условий для возникновения *объекта*; подразумевается также, что тенденция развития **заложена** в существующих процессах, явлениях и событиях. Возможность потенциальна в отличие от *действительности*, т.е. уже существующего объекта или реализовавшегося явления и события в *результате* некоторой возможности,

Возможность при *определённых* условиях может перейти в действительность с той или иной *вероятностью*, а действительность может стать возможностью для возникновения новой действительности [86].

См. *Причина, Причинность, Причинно-следственная связь, Связь, Следствие.* См. также раздел *СВЯЗИ, НЕОБХОДИМОСТЬ, СЛУЧАЙНОСТЬ* и статьи *Бернулли испытания, Биномиальное распределение, Больших чисел закон, Вероятность классическая (априорная), Вероятность статистическая (апостериорная), Диалектика, Доверительная вероятность, Доверительный интервал, Измерение, Категория, Количество, Конечное, Мера, Момент, Ошибок теория, Равновозможность, Распределение вероятностей случайной величины, Распределения закон, Совокупность, Стандартизация случайной величины, Статистика, Статистических гипотез проверка, Хи-квадрат распределение, Явление.*

"Эксперимент должен быть воспроизводимым, то есть терпеть неудачу одним и тем же способом." (*Неизв.*).

**Воспроизводимость** в теории и практике экспериментальных исследований – характеристика точности лабораторного или промышленного *эксперимента*, а также подтверждение *результатов* тех или иных *наблюдений* в природе и обществе другими исследователями в другое время в тех или иных условиях. Проблема воспроизводимости связана с тем, что абсолютное совпадение результатов экспериментов проводимых в одинаковых условиях *невозможно*. Рассеяние результатов эксперментов возникает по двум причинам: неточное *измерение физических* характеристик (*ошибки измерений*) и неизбежные изменения условий экспериментов при повторении опытов, даже если опыты проводятся при усиленном контроле.

Обычно воспроизводимость характеризуется *количественно* – *коэффициентом вариации* (т.е. *числом*, в процентах или долях единицы, см. *формулы* (1.27) и (1.28)), но может характеризовать *явление* или *процесс* и *качественно*. Движения звёзд, планет, комет и т.д. воспроизводятся с высокой точностью. Воспроизводимость некоторых *событий* в природе явилась *причиной* возникновения так называемых народных примет. См. также *Дисперсия воспроизводимости, Шум, ШУМЪ.*

"**ВОСПРОИЗВОДИТЬ, *воспроизвести*** что, производить снова, обновлять или созидать былое, говор. особ. о предметах духовных и о действіи воображенія. **-ся,** быть снова производиму. (...)" (*В.И.Даль*; 1801-1872) [82]. См. также *Воспроизводимость, Шум, ШУМЪ.*

**Второй закон Лапласа** см. *Нормальное распределение.*

"**ВЫБИРАТЬ, *выбрать*** что, избирать, брать любое изъ многаго; отбирать что особо; || опоражнивать; || вырубать, вытёсывать или выдалбливать въ длину, вдоль, или внутри; || собирать всё, до последняго; || выкраивать, выгадывать изъ чего; (...) ***Выборный***, отборный, самый лучшій, выбранный; избранный, назначенный куда по выбору общества; (...) ***Выборочный***, относящійся до выбора, до выборки вещей, не людей. *Выборочная рубка леса,* не сплошная и не порядная, не лесосеками, а где рубятся деревья по выбору, какіе нужны." (*В.И.Даль*; 1801-1872) [82].

См. также *Выборка, Выборка представительная, Выборка случайная.*

**Выборка** - *понятие математической статистики,* объединяющее *результаты* каких-либо однородных *наблюдений.* Выборкой в широком смысле слова называется массив результатов наблюдений $X_1$, $X_2, \ldots$, $X_n$, представляющих собой *независимые,* одинаково *распределённые случайные величины. Определённая* таким образом выборка называется случайной, а её конкретные *значения* в каждом отдельном случае $x_1$, $x_2, \ldots$, $x_n$ - простой выборкой. В узком смысле понятие выборки *связано* с *теорией статистического выборочного метода* и предполагает наличие некоторой *конечной совокупности,* из которой эта выборка извлекается (рассматриваются, например, повторные и бесповторные выборки). С точки зрения исследователя, осуществляющего *экспериментальные* исследования с целью *моделирования процесса,* выборкой будет называться конкретное *количество анализов, опытов, измерений* и т.п., а под совокупностью будет подразумеваться *абстрактная бесконечность возможных* анализов, опытов, измерений и т.п.

Для различения параметров совокупности и параметров выборки последние принято обозначать латинскими буквами, например, выборочная дисперсия $s^2{}_x$, квадратичное (стандартное) отклонение $s_x$, в отличие от генеральной дисперсии $\mathbf{б}^2{}_x$ и генерального стандарта $\mathbf{б}_x$. Аналогично, математическое ожидание $\mathrm{M}_x$, а его оценка $m_x$.

См. также *ВЫБИРАТЬ, Выборка представительная, Выборка случайная, РАСПРЕДЕЛЯТЬ, Эмпирическое распределение.*

**Выборка представительная** (репрезентативная) - *выборка,* дающая достаточно полное представление об особенностях *совокупности.* В математической статистике (в частности, в статистике народонаселения, производства и потребления материальных благ) разработано достаточно методов, приёмов, программ для получения представительных выборок.

См. также *ВЫБИРАТЬ, Выборка случайная, Статистика, Статистика математическая, Статистическая оценка, Эмпирическое распределение.*

**Выборка случайная** - часть *совокупности, результаты* конкретно реализованных *экспериментов, измерений, наблюдений,* фиксации *событий.* Случайная выборка далеко не всегда является представительной (репрезентативной). Тем не менее результаты экспериментов в промышленности, в научных лабораториях и т.п. достаточно часто случайные выборки. По существу, химический, физический, физико-химический и т.д. анализ любой пробы органического или минерального материала - случайная выборка.

См. также *ВЫБИРАТЬ, Выборка, Выборка представительная, СЛУЧАЙ, Случайность, Эмпирическое распределение.*

**Выборочное распределение** - см. *Эмпирическое распределение.*

# Г

**Гамма-распределение** - *непрерывное распределение вероятностей случайной величины* $X$ с *параметрами* ($\alpha$, $\lambda$) ($\alpha>0$, $\lambda>0$), описываемое *плотностью вероятностей*:

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\cdot x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases} \qquad (1.37)$$

(рис.1.4.). Частный случай *Пирсона распределений*, тип 3, (1.155).

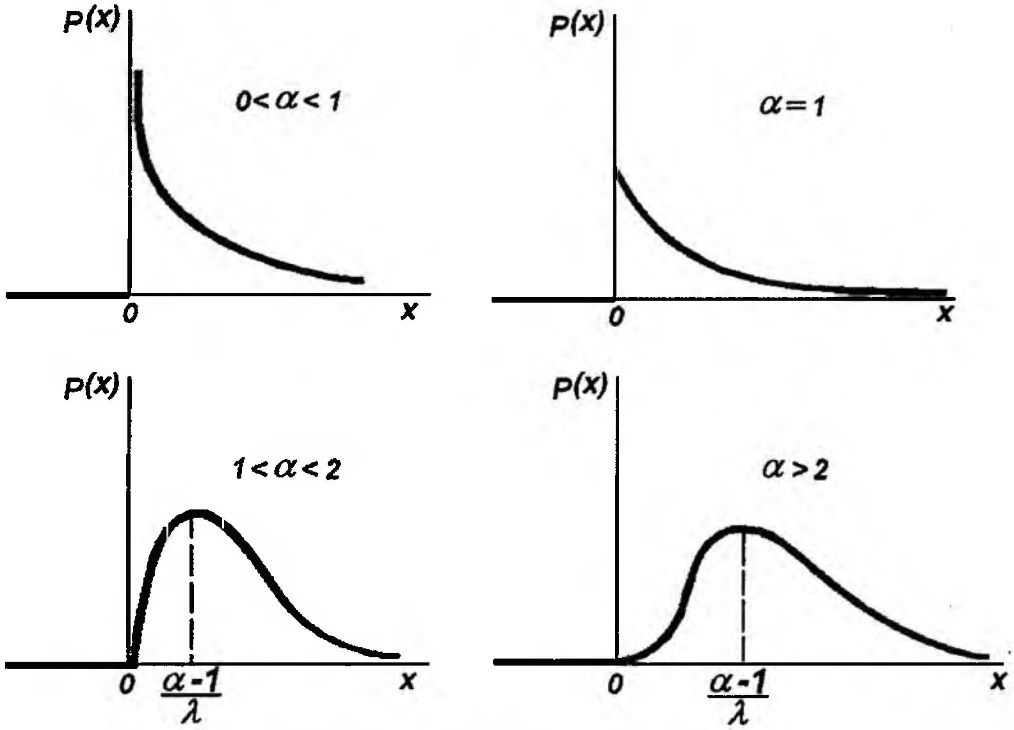



Рис.1.4. Плотность гамма-распределения

Гамма-распределению подчиняются мощности слоёв осадочных пород, соотношение песчаников и сланцев, содержание некоторых малых компонентов в породах, показатели сферичности и окатанности обломков больших размеров. Гамма-распределение имеет значительную роль в приложениях; в *статистике математической* часто встречается благодаря тесной *связи* с *нормальным распределением*. Такие важные распределения, как *Стьюдента распределение*, *Фишера распределение* и др. тесно связаны с гамма-распределением.

**Гамма-функция**, Г- функция, - *трансцендентная функция* $\Gamma(x)$, распространяющая значения факториала на случай любого комплексного $x \neq 0, -1, -2, \ldots$

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)} \cdot n^{x-1}, \qquad (1.38)$$

из которого Л. Эйлер (*Leonhard Euler*; 1707-1783) получил интегральное представление (Эйлеров интеграл второго рода):

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty z^{x-1} e^{-z} dz, \quad \text{для } x>0. \qquad (1.39)$$

*График* гамма-функции представлен на рис. 1.5.

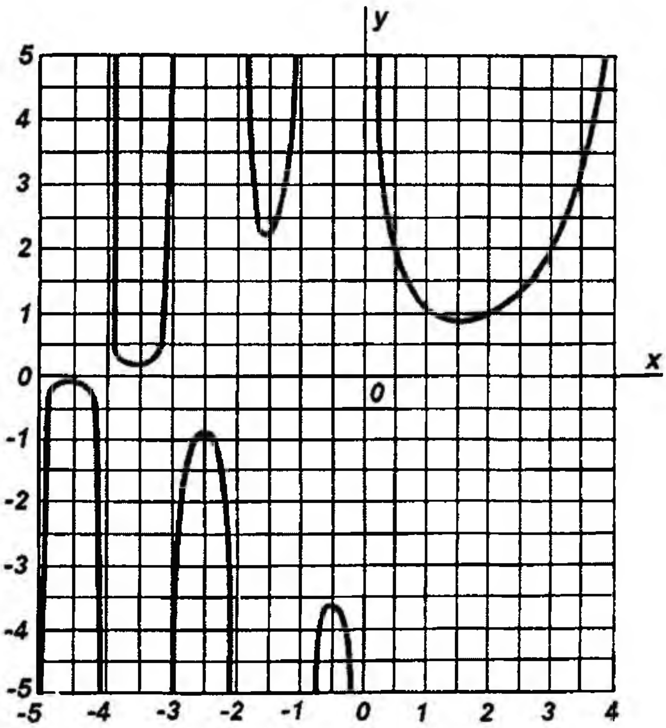



Рис. 1.5. График функции $y=\Gamma(x)$

Гамма-функция нигде не обращается в ноль. При нуле и при целых отрицательных значениях $x$ - $\Gamma(x)=\pm\infty$. Для положительных $x$ гамма-функция имеет единственный *минимум* при $x$=1,4616321..., равный 0,885603... *Локальные* минимумы функции $|\Gamma(x)|$ при $x\to-\infty$ образуют последовательность, стремящуюся к нулю. Гамма-функция была введена в 1729 г. Л. Эйлером (*Leonhard Euler*; 1707-1783), *обозначение* $\Gamma(x)$ и название были предложены в 1814 г. А.М.Лежандром (*Legendre Adrien Marie*; 1752–1833). Гамма-функция применяется в *статистике математической* и не только. Например, гамма-функция описывает распределение некоторых химических соединений оксида углерода с мозговой жидкостью мозжечка человека, подвергшегося отравлению угарным газом (частное сообщение д.м.н. О.Ю.Урюпова).

См. также *Гамма-распределение.*

**Гармоническое среднее** см. *Концепция, Середа, Среднее, среднее значение.*

**Гаусса закон** см. *Нормальное распределение.*

**Гаусса-Лапласа распределение** см. *Нормальное распределение.*

**Генеральная дисперсия** см. *Дисперсия совокупности.*

**Генеральный** (*возм. через польск.* generalny < *лат.* generalis - общий, всеобщий) - общий, всеобщий (*М.Фасмер*; (1886-1962), *В.И.Даль*; (1801-1872)). В *статистике математической термин* "**генеральный**" иногда используется для различения *параметров*, характеризующих *совокупности*, и *статистик* (параметров), характеризующих *выборки* из совокупностей. Например, генеральная *дисперсия* $б^2{}_x$ (см. (1.58), (1.59)) используется в основном при теоретических построениях (см. (1.101), (1.102), (1.104), (1.105), (1.106), (1.240), (1.256), (1.267), (1.272), (1.273), (1.274)), а выборочная дисперсия $s^2{}_x$ является статистикой (конкретным параметром) и вычисляется по *формулам* (1.54), (1.73), (1.77), (1.124), (1.137), (1.203), (1.268), (1.319), (3.11), (3.36).

См. также *Дисперсия совокупности, Доверительная вероятность, Оценка, Статистическая оценка, Совокупность.*

**Геометрическая прогрессия** - последовательность *чисел*, каждое из которых (начиная со второго) равно предыдущему, умноженному на некоторое постоянное для *данной прогрессии число* $q \neq 0$ (знаменатель геометрической *прогрессии*). В *зависимости* от значения $q$ различают геометрические прогрессии возрастающие ($q>1$), убывающие ($0<q<1$) и знакочередующиеся ($q<0$). *Формула* для $i$-того члена геометрической прогрессии имеет вид:

$$a_k = a_1 q^{k-1}, \tag{1.40}$$

где $a_1$ - первый член геометрической прогрессии. Сумма $n$ первых членов геометрической прогрессии, знаменатель которой не равен 1:

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1-q}. \tag{1.41}$$

*Термин* "Геометрическая прогрессия" *связан* с тем, что для геометрической прогрессии с положительными членами любой член является *средним геометрическим* между предыдущим и последующим членами:

$$a_i = \sqrt{a_{i-1}a_{i+1}} \;. \qquad (1.42)$$

См. также *Среднее, среднее значение.*

**Геометрическое распределение** - *распределение вероятностей дискретной случайной величины* X с целочисленными неотрицательными значениями $x_1$, $x_2, \ldots,$ $x_n$, в котором вероятности *событий* образуют *геометрическую прогрессию* (отсюда и название - "Геометрическое распределение"). Распределение вероятностей геометрического распределения задаётся *формулой*:

$$p_k = P(X=k) = \mathbf{p}(1-\mathbf{p})^k, \quad k=0,\ 1,\ 2, \ldots, \qquad (1.43)$$

где $\mathbf{p}$ - *параметр* распределения (рис.1.6.).

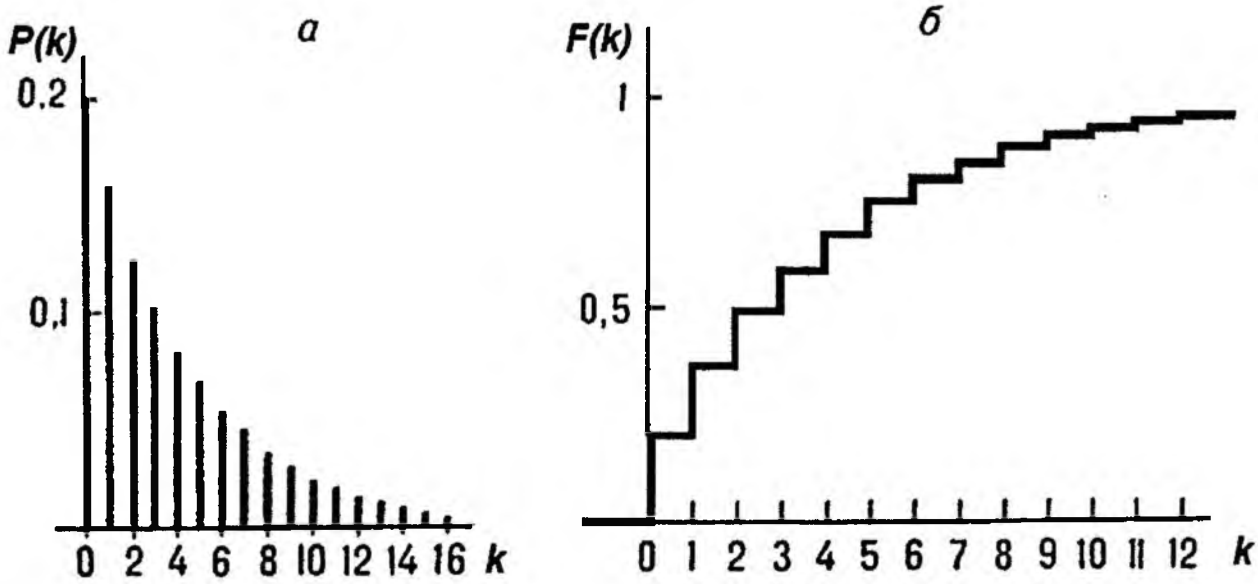



Рис.1.6. Графики геометрического распределения ($\mathbf{p}$=0,2):
а - вероятности $P_k$; б - функция распределения $F(k)$

В простейшем случае геометрическое распределение описывает *число* испытаний в схеме Бернулли, необходимых для того, чтобы получить значение 1 ровно один раз (см. *Бернулли испытания*).

Геометрическое распределение появляется в последовательности $n$ *независимых Бернулли испытаний* в тех случаях, когда исследователя интересует не общее *количество* успехов, а порядок их появления или число испытаний до первого успеха ($X_1=k$):

$$p_k = P(X_1=k) = q^k\mathbf{p}, \quad k=0,\ 1,\ 2, \ldots \qquad (1.44)$$

Если после первого успеха ($X_1$) испытания Бернулли продолжить до появления второго успеха ($X_2$), то:

$$P(X_1=j,\ X_2=k)=q^{j+k}\mathbf{p}^2, \qquad j,\ k=0,\ 1,\ 2,\dots \tag{1.45}$$

где $X_2$ - число неудач между первыми двумя успехами.

*Моменты* геометрического распределения:

$$m_1 = (1-\mathbf{p})/\mathbf{p}, \tag{1.46}$$

$$\mu_2 = (1-\mathbf{p})/\mathbf{p}^2, \tag{1.47}$$

$$\mu_3 = \frac{(1-\mathbf{p})(2-\mathbf{p})}{\mathbf{p}^3}, \tag{1.48}$$

$$\mu_4 = \frac{9(1-\mathbf{p})^2}{\mathbf{p}^4} + \frac{(1-\mathbf{p})}{\mathbf{p}^2}. \tag{1.49}$$

*Коэффициент асимметрии* и *эксцесс*, соответственно:

$$A_x = \frac{2-\mathbf{p}}{\sqrt{1-\mathbf{p}}}, \tag{1.50}$$

$$E_x = 6 + \frac{\mathbf{p}^2}{1-\mathbf{p}}. \tag{1.51}$$

Геометрическое распределение является единственным *дискретным* распределением, обладающим *свойством отсутствия последействия* и в этом смысле аналогично *показательному распределению*.

См. также *Бернулли испытания, РАСПРЕДЕЛЯТЬ*.

**Геометрическое среднее** см. *Геометрическая прогрессия, Концепция, Середа, Среднее, среднее значение*.

"Вечная трагедия науки: уродливые факты убивают красивые гипотезы." (*Томас Гексли*; 1825-1895).

**Гипотеза** (<*греч.* υποϑεσιζ - основание, принцип, предположение, **гипотеза**; υποτιϑημι - полагать в основание, принимать что-либо за основание, предполагать) - научное предположение или допущение, *истинность* которого неопределённа. Различают гипотезу как *метод* научного познания, включающий в себя выдвижение и последующую *экспериментальную* проверку предположений, и как *структурный элемент* научной *теории*. Кроме этого можно выделить ещё два значения этого *тер-*

*мина:* гипотезу в широком смысле слова - как догадка о чём бы то ни было и гипотезу в узком смысле слова - как научная гипотеза, которая всегда выходит за *пределы* изученного круга фактов, объясняет их и предсказывает новые факты. Например, гипотеза Н.Коперника (*Kopernik Mikolaj; Copernicus Nicolaus;* 1473-1543) о строении Солнечной *системы* оставалась гипотезой в течение трёхсот лет, пока астроном У.Ж.Ж. Леверье (*Le Verrier Urbain Jean Joseph;* 1811-1877) не рассчитал орбиту неизвестной планеты, вносящей возмущения в орбиты некоторых планет, а в 1846 году одновременно с Дж.Адамсом (*Adams John Couch;* 1819-1892) не нашёл в рассчитываемом месте Солнечной системы планету, названную позднее Нептуном. Научная гипотеза выдвигается для решения какой-либо конкретной проблемы, для объяснения новых *эмпирических данных* или для устранения противоречия существующей теории с новыми экспериментальными данными. В качестве научных предположений гипотеза должна удовлетворять условию *принципиальной* проверяемости, т.е. *свойствами* **фальсифицируемости** (опровержения) и **верифицируемости** (подтверждения). Кроме этих *необходимых* условий, современные гипотезы должны обладать: 1. *Определённым* уровнем общности, т.е. объяснять класс *явлений* более широкий, чем явления, вызвавшие её возникновение. 2. *Моделируемостью.* 3. Прогностической мощью или предсказательной силой. 4. Логической простотой. 5. Преемственностью, т.е. *связью* с предшествующим знанием.

Исторически гипотеза как метод зародилась на ранних этапах развития античной *математики.* Древнегреческие математики широко применяли в качестве метода математического доказательства дедуктивный мысленный эксперимент, включавший в себя выдвижение гипотезы и вывод из неё с помощью *аналитической* дедукции *следствий* с целью проверки *правильности* первоначальных предположений. Этот метод был пересмотрен Платоном (**Πλατων**; 428 или 427 до Р.Х. - 348 или 347 до Р.Х.) и окончательно отвергнут Аристотелем (**'Αριδτοτεληζ**; 384-322 до Р.Х.). В античной науке и естествознании нового времени метод гипотез применялся в основном лишь в неявной, скрытой *форме* в рамках других методов научного познания, например, в мысленном эксперименте, в индуктивном методе и др.

См. также *Статистических гипотез проверка.*

**Гипотеза основная** см. *Основная гипотеза.*

**Гистограмма** - (< *древнегреч.* **ιδτοζ** - мачта и **γραμμα** - буква, изображение, образ, рисунок, надпись), столбчатая диаграмма - одна из *форм* графического представления *эмпирического распределения*, при котором на оси абсцисс откладывают значения *результатов наблюдений*, разделённые на $k$ (обычно) равных *интервалов* $\Delta$, а над каждым интервалом строятся столбики, высота которых $H_i$ *пропорциональна частотам* $h_i=n_i/n$ появления наблюдаемого признака, попавших в интервал $\{x_{i-1}, x_i\}$. Если высота столбиков вычисляется по формуле $H_i=h_i/\Delta$, то гистограмма представляет собой возможную форму *плотности вероятности случайной величины*. В случае неравных интервалов высоты столбиков вычисляются по *формуле* $H_i=h_i/(x_i-x_{i-1})$, см. рис. 3.3. Гистограмма позволяет наглядно представить форму плотности вероятности наблюдений. См. рис. 1.2, 1.14 - 1.17, 1.19, 1.27, 2.2,а, 2.7, 2.8, 2.9,б, 2.10,б, 2.11, 2.15 - 2.24, 2.30, 2.31.

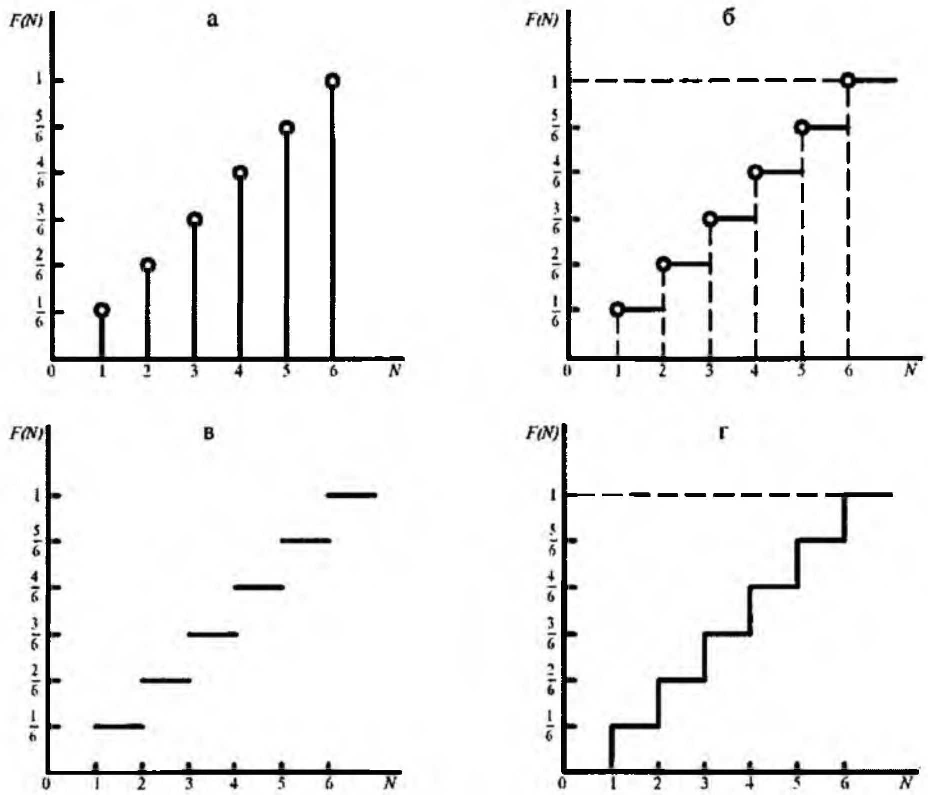
*Число* интервалов $k$ выбирается из особенностей конкретного распределения. В некоторых случаях число интервалов, позволяющее отразить существенные особенности распределения, может быть вычислено по формуле:

$$k=1+3,332\lg(n), \qquad (1.52)$$

где $n$ - число наблюдений в *выборке*. Следует иметь в виду, что интервалы без *элементов* недопустимы, строго говоря, $n_j \geqslant 2$ (желательно $n_j \geqslant 5 \div 10$). Если обнаруживаются интервалы с $n_j \leqslant 2$, то такие интервалы объединяются с соседними; лучше уменьшить $k$. Если для гистограммы число интервалов не столь существенно, то для расчётов *моментов распределения* следует стремиться к возможно большим значениям $k$. В тех случаях, когда эквидистантные интервалы не дают требуемой точности, вопрос с величиной интервалов решается исходя из из особенностей конкретного распределения. См. примеры расчётов.

В заключение необходимо отметить факт некорректного представления гистограмм на экранах мониторов и, соответственно, при печати. Гистограммы (на плоскости, в объёме) представляются в виде столбиков с промежутками между ними. Красиво, но в случаях представления плотностей и функций распределения непрерывных случайных величин разрывов между столбиками не должно быть. См. например рис. 2.7, 2.15 ÷ 2.23. Пример правильного представления гистограммы для непрерывных случайных величин см. рис. 2.24, 2.30, 2.31, 3.3, а для дискретных случайных величин см. рис. 2.2,б, 2.9 и 2.11. Впрочем, у гистограмм распределения дискретных случайных величин разрывы тоже не всегда уместны (рис. 2.2,а, 2.8, 2.10).

В литературе встречаются пять вариантов возможного графического представления функции распределения дискретной случайной величины. Ниже приведены четыре рисунка функции распределения $F(N)$ на примере игры с одной игральной костью (пятый вариант - рис. 2.2,а).




Рисунки возможных форм графического представления функции распределения дискретной случайной величины $F(N)$ на примере игры с одной игральной костью

Но ещё хуже с компьютерными представлениями функций распределения непрерывных величин - столбики здесь совершенно неуместны, они искажают суть.

Для непрерывных случайных величин такой свободы нет, только ступенчатая функция распределения (рис. 3.4) или *кривая* функции распределения. Для эмпирического распределения (*выборки*) рисунок функции распределения непрерывной случайной величины можно получить задавая число интервалов $k$ как можно больше. В пределе, на экране монитора и при печати можно получить достаточно гладкую кривую (близкую к кривым рис. 1.47, 2.3, 2.5).

См. также *Хи-квадрат критерий, Хи-квадрат распределение, Частота случайного события.*

**График** *функции* (< *греч.* γραφικοζ - относящийся до живописи, живописный; *позд.* письменный. *А.Д.Вейсман;* (1834-1913). [80]) - *множество точек* плоскости с прямоугольными координатами $(x, y)$, где $y=f(x)$, $x \in E$, $E$ - область определения данной функции. Здесь $y=f(x)$ - действительная функция одного действительного переменного. Для построения графика функции следует нарисовать *"кривую"* - семейство точек плоскости в прямоугольных координатах ($x$, $y$) удовлетворяющих уравнению $y=f(x)$, $x \in E$.

См. также *Корреляционная таблица, Корреляционное поле, Множество* и раздел 4.1.

# Д

**Данные** - общепринятое название для *информации*, используемой для *математической* (или другой, по существу, *численной*) *обработки*. В практике научных исследований данными являются условия и *результаты экспериментов*, результаты *наблюдений* в технике, в технологических *процессах* и природе, а также промежуточные результаты.

См. также *Данных обработка математическая, Середа, ФАКТОРЪ*.

**Данных обработка** *математическая* - общепринятое выражение для *процедуры* преобразования *информации*, получаемой в *результате наблюдений*, научных и промышленных *экспериментов*, а также путём фиксации *событий*. Обработка данных производится, как правило, численными *методами*, которым предшествует мысленный *анализ* и мысленное моделирование. Цель математической обработки - получение *параметров* эмпирических распределений, *констант*, *коэффициентов* детерминистических уравнений и математических моделей, а также построение экспериментально-статистических моделей и проверка *статистических гипотез*.

*Процедура* обработки данных начинается с предположения о характере связи между *величинами* в анализируемой *выборке* и выбора метода обработки. Если выборка представляет собой группу независимых чисел (фактов, событий, явлений), характеризующих один признак совокупности, то обработка данных включает в себя достаточно простые процедуры сортировки случайных величин (получение *вариационного ряда*), вычисления *арифметического среднего* и *дисперсии*, *стандартизации* распределения, вычисления моментов распределения и более сложные, в интеллектуальном плане, процедуры проверки *статистических гипотез* и установления закона эмпирического распределения.

Если наблюдается расслоение признаков по уровням, то применяется дисперсионный анализ, включающий, по существу, те же простые процедуры.

В случае наличия двух и более групп чисел, характеризующих два и более признака совокупности, может представлять интерес наличие *связи* между случайными величинами вида $y=f(x)$ или $y=f(x_1, x_2, \ldots,$

$x_k$). В этих случаях сила или теснота связи проверяется корреляционным анализом (1.81), (1.82), (1.83). Если же исследователя интересует не только наличие, но и характер связи между группами случайных величин, то возникает задача восстановления неизвестной зависимости или вычисления неизвестных параметров подходящего уравнения (например, (1.112), (1.113) и других).

Задачи восстановления неизвестной зависимости в большинстве случаев решаются методом наименьших квадратов (МНК), который даёт *состоятельные*, *несмещённые* и *эффективные оценки* неизвестных параметров. Поскольку задача МНК в общем виде неразрешима, процедура начинается с предположения о виде уравнения, $y=f(x)$. Предполагаемое уравнение подставляется в выражение для принципа Лежандра $\Phi=\Sigma(y_i-y_{i,\text{расч}})^2$, где $y_{\text{расч}}=f(x)$ - принимаемое уравнение регрессии. Выражение для Ф дифференцируется по всем параметрам, которые в этом случае рассматриваются как переменные величины, производные приравниваются к нулю, и получаемая система нормальных уравнений решается относительно параметров искомого уравнения.

Например, обработка таблично заданной функции $y=f(x)$ по линейному уравнению $y=bx$ включает следующие процедуры: (1) вычисление *сумм* $\Sigma x_i y_i$ и $\Sigma x^2{}_i$; (2) вычисление параметра $b=\Sigma x_i y_i/\Sigma x^2{}_i$; (3) формализация уравнения $y_{\text{расч}}=bx$; (4) вычисление *дисперсии* адекватности $s^2{}_{\text{ад}}=\Sigma(y_i-y_{i,\text{расч}})^2/(n-1)$; (5) вычисление дисперсии коэффициента $b$: $s^2{}_b=s^2{}_{\text{ад}}/\Sigma x^2{}_i$. Далее следует проверка параметра $b$ на значимость и уравнения на адекватность.

Обработка таблично заданной функции $y=f(x)$ по линейному уравнению $y=b_0+b_1x$ включает следующие процедуры: (1) вычисление сумм $\Sigma y_i$, $\Sigma x_i$, $\Sigma x^2{}_i$, $\Sigma x_i y_i$; (2) вычисление главного определителя системы нормальных уравнений $D=n\Sigma x^2{}_i-(\Sigma x_i)^2$; (3) вычисление параметров $b_0=(\Sigma y_i\Sigma x^2{}_i-\Sigma x_i\Sigma x_i y_i)/D$ и $b_1=(n\Sigma x_i y_i-\Sigma x_i\Sigma y_i)/D$; (4) формализация уравнения $y_{\text{расч}}=b_0+b_1x$; (5) вычисление дисперсии адекватности $s^2{}_{\text{ад}}=\Sigma(y_i-y_{i,\text{расч}})^2/(n-2)$; (6) вычисление дисперсий коэффициентов: $s^2{}_{b,0}=s^2{}_{\text{ад}}\Sigma x^2{}_i/D$ и $s^2{}_{b,1}=s^2{}_{\text{ад}}n/D$. Далее следует проверка параметров $b_0$ и $b_1$ на значимость и уравнения на адекватность.

Обработка таблично заданной функции нескольких переменных $y=f(x_1, x_2, ..., x_k)$ по уравнению $y=b_0+b_1x_1+b_2x_2+...+b_kx_k$ включает процедуры с матрицами в соответствии с выражением $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{Y})$, проверку коэффициентов $b_0$, $b_1$, $b_2$, ..., $b_k$ на значимость, и уравнения $y_{\text{расч}}=b_0+b_1x_1+b_2x_2+...+b_kx_k$ на адекватность.

Очевидно, что собственно обработка данных состоит из простых арифметических процедур. На долю разума исследователя приходится важнейший и очень даже непростой мысленный (иногда графоаналитический) анализ зависимости, предположения о физической сущности явления (процесса) и предположение о виде уравнения $y=f(x)$. После выполнения процедур обработки данных (где роль разума минимальна) следует проверка статистических гипотез о значимости полученных коэффициентов уравнения, а самого уравнения - на адекватность. На этой заключительной стадии задачи восстановления зависимости разум опять включается в работу, ибо выдвижение статистических гипотез и их проверка далеко не так просты как кажутся вначале.

Существенно более сложной задачей обработки нелинейных зависимостей является преобразование системы координат с помощью процедур обращения, логарифмирования, взятия экспоненты, возведения в степень и т.д. Цель преобразования - **спрямить** исходную зависимость. Зависимость, приведённая к линейному виду, позволяет применить к ней вышеупомянутые процедуры метода НК. В этих случаях роль разума трудно переоценить, ибо главное - понимание физической сущности процесса.

Анализ череды фактов, событий, чисел неочевиден, поскольку исходные выборки и соответствующие им вариационные ряды рассматриваются вне пространства и/или времени. Какие-либо умозаключения возможны только после вычисления средних значений выборок, дисперсий и/или построения гистограммы, вычисления моментов распределения и сравнения эмпирического распределения с *нормальным распределением*, а потом и с другими. Другими словами, вариационные ряды не связаны с системами координат, привычных для разума человека. Что касается собственно обработки данных (вариационных рядов), то, как и в случае вычисления параметров математических моделей, она состоит из простых арифметических процедур. См. также *Середа, ФАКТОРЪ*.

**Двойное экспоненциальное распределение** см. *Лапласа распределение*.

**Двустороннее показательное распределение** см. *Лапласа распределение*.

**Действительность** - 1. Философская *категория*, характеризующая *объект, явление, событие*, которые существуют в *результате* реализации той или другой *возможности*. Действительностью являются материя, природа, сообщества - *объективный* мир, во всём разнообразии его *причинно-следственных связей*, сторон и *отношений*, во всей его конкретности [86]. 2. (*мат.*) *Понятие математики*, предназначенное для различения и конкретизации характеристик пространства-времени, например: действительная и мнимая оси гиперболы; действительная проективная плоскость, представляющая собой евклидову плоскость, дополненную несобственными *элементами*; действительная часть, $x$ ($x=\mathrm{Re}\ z$), комплексного *числа* $z=x+iy$; число действительное (вещественное), включающее рациональные и иррациональные числа, для отличия от чисел простых и натуральных; действительная *функция* одного или нескольких действительных переменных. См. также *Объективность*.

"Детерминизм - идея, что сумма сил даёт лишь одну определённую равнодействующую."
(*Александр Круглов*; р. 1954).

**Детерминизм** (<*лат.* determino - ограничивать, определять, устанавливать) - философское учение об *объективной закономерной* взаимосвязи и взаимозависимости *явлений* материального и духовного мира. *Центральным* ядром детерминизма является положение о существовании *причинности*, т.е. такой *связи* явлений, в которой одно явление (*причина*) при вполне *определённых* условиях с *необходимостью* порождает, производит другое явление (*следствие*).

Современный детерминизм предполагает наличие разнообразных объективно существующих *форм* взаимосвязи явлений, многие из которых выражаются в виде *соотношений*, не имеющих непосредственно причинного характера, т.е. прямо не содержащих в себе моментов порождения, производства одного другим. Сюда входят пространственные и временные *корреляции*, *функциональные зависимости*, отношения *симметрии* и тому подобное. Особенно важными в современной науке оказываются *вероятностные* соотношения, формулируемые на языке *статистических распределений* и статистических законов. Однако все формы реальных взаимосвязей явлений в конечном итоге складываются на основе всеобще действующей причинности, вне которой не существует ни одно явление *действительности*, в т.ч. и такие *события* (называемые *случайными*), в совокупности которых выявляются статистические законы.

См. также раздел *СВЯЗИ, НЕОБХОДИМОСТЬ, СЛУЧАЙНОСТЬ* и статьи *Детерминистическая модель, Модель, Причина, Причинность, ПРИЧИНЯТЬ, Связать, СВЯЗЫВАТЬ, Связь, СЛЕДИТЬ, Следствие, Статистическая модель, Стохастическая модель, Сущность, Явление*.

**Детерминированно-стохастическая модель** (<*лат.* determino - ограничивать, определять, устанавливать [84]; < *греч.* **στοχαστικη**

τεχνη - искусство предположений, искусство угадывания; στοχαστικος - умеющий целить, попадать; умеющий верно отгадывать, судить [4, 80] и *франц.* modele, и *франц.* modele, *итал.* modello, <*лат.* modulus - мера, образец, норма [81, 84]) - *математическое* выражение, *уравнение, формула,* содержащее *детерминистическую модель, переменные величины, параметры, константы* и одну (или более) *случайную* компоненту. Случайная компонента характеризует *вариацию* течения (развития) *процесса,* его разветвление. Детерминированно-стохастический процесс - это процесс, течение которого обусловлено *физическими причинно-следственными связями,* с одной стороны, и *множеством случайных* воздействий, с другой стороны. Течение детерминированно-стохастического процесса может быть различным в *зависимости* от случая, для него существует *вероятность* того или иного течения.

Примером детерминированно-стохастического процесса может быть проводка скважины, - с одной стороны, процесс проводки скважины определяется вполне *объективными факторами:* прочностью породы, характеристикой долота, нагрузкой, *скоростью* вращения инструмента и т.д., а с другой стороны, осложняется множеством случайных факторов: *флуктуаций* вращения инструмента и нагрузки на него, твёрдыми включениями в пласт и различными углами встречи с ними и т.д. Примером детерминированно-стохастического процесса также могут быть гонки на автомобилях, мотоциклах и т.д., - каждый участник каждый круг проходит по разным (случайным, по существу) траекториям и с разными скоростями. Жизнь человека (и не только человека) - детерминированно-стохастический процесс.

См. также *Детерминизм, Детерминированно-стохастическая модель, Математическая модель, Модель, ПОНИМАТЬ, Понятие, Причина, Причинность, ПРИЧИНЯТЬ, Связь, Следствие, Случайный процесс, Статистическая модель, Стохастическая модель, Сущность, Явление.*

**Детерминистическая модель** (<*лат.* determino - ограничивать, определять, устанавливать [84] и *франц.* modele, *итал.* modello, <*лат.* modulus - *мера,* образец, *норма* [81, 84]) - *математическое уравнение, система уравнений,* адекватно описывающие *процесс,* в котором *состояние системы* в *момент* времени $\tau_0$ однозначно *определяет* ход процесса в будущем - $\tau_1$, $\tau_2, \ldots,$ $\tau_i$. *Детерминированная* реакция системы на *совокупность* условий *S* означает однозначную реакцию: при каждом осуществлении условий *S событие B* происходит или не происходит. Например, все *законы* классической механики, *физики* твёрдого тела, термодинамики, гидродинамики, теплопередачи, массопередачи, химии, химической кинетики и др. Изучение *непрерывных* детерминированных процессов сводится к выводу (к построению) интегрально-дифференциальных *уравнений*, систем уравнений, описывающих исследуемую систему.

См. также *Детерминизм, Детерминированно-стохастическая модель, Математическая модель, Модель, ПОНИМАТЬ, Понятие, Причина, Причинность, ПРИЧИНЯТЬ, Связь, Следствие, Статистическая модель, Стохастическая модель, Сущность, Явление.*

"Диалектика - это наука заблуждаться по правилам." (*Адриан Декурсель*; 1821-1892)).

**Диалектика** (*нем.* Dialectic - диалектика < *ст.-нем.* Dialectica < *лат.* dialectica - искусство рассуждения < *греч.* διαλεϰτιϰη - искусство вести разговор или прение; диалектика, от δια - посредством и λεγω - говорить, рассказывать, излагать) - учение об общих *детерминированных связях* и становлении, о развитии бытия и познания и основанный на этом учении *метод* творческого мышления. Слово "диалектика" впервые употребил Сократ (469-399 до Р.Х.), *обозначивший* им искусство вести *эффективный* спор, диалог, направленный на взаимозаинтересованное обсуждение проблемы с целью достижения *истины* путём противоборства мнений. В смысле, близком к современному, *понятие* диалектики впервые употребляется Г.Гегелем, трактовавшим её как умение отыскивать противоположности в самой *действительности*. "Противоречие есть критерий истины, отсутствие противоречия есть критерий заблуждения" Г.Гегель (*Hegel Georg Wilhelm Friedrich*; 1770-1831).

На протяжении последних, по крайней *мере*, 26 веков под диалектикой подразумевали: учение о вечном становлении и изменчивости бытия (*Гераклит Эфесский*; 535-475 г. до Р.Х.); искусство достижения *истины* путём противоборства мнений в диалоге (*Сократ*; 469 или 470 - 399 до Р.Х.); метод расчленения и связывания понятий с целью постижения сверхчувственной *сущности* вещей (*Платон* (Πλατων); 428 или 427 до Р.Х. - 348 или 347 до Р.Х.); учение о совпадении противоположностей, о любом в любом, о совпадении *максимума* и *минимума* (*Николай Кузанский* (*Nicolaus Krebs Cusanus*; 1401-1464)), о единстве противоположностей (*Джордано Бруно*; 1548 - 17.02.1600); способ разрушения заблуждения человеческого *разума*, который стремясь к познанию истины, неминуемо запутывается в противоречиях (*Иммануил Кант*;

1724-1804); всеобщий метод постижения противоречий (внутренних *импульсов*) развития бытия, духа и истории (*Г.Гегель*; 1770-1831); учение и метод, выдвигаемые в *качестве* основы познания действительности и её революционного преобразования (К.Маркс (*K.Marx*; 1818-1883), Ф.Энгельс (*F.Engels*; 1820-1895), В.Ленин (1870-1924)).

Главные философские *категории* и *законы* диалектики: переход *количественных* изменений в качественные; взаимное проникновение полярных противоположностей и превращение их друг в друга, когда они доведены до *предела*; развитие путём противоречия или отрицания отрицания; спиральная *форма* развития. "Всё действительное содержит внутри себя противоположные определения, и следовательно познание, а точнее, определение предмета в понятиях означает познание его как конкретного единства противоположных определений" (Г.Гегель (*Hegel Georg Wilhelm Friedrich*; 1770-1831)).

*Понимание* и уместное применение диалектики помогает пользоваться понятиями и *суждениями*, учитывать взаимосвязь *явлений*, их противоречивость, изменчивость, *возможность* перехода противоположностей друг в друга. "Вообще в противоположности различное имеет в качестве противостоящего себе не только некое иное, но своё иное" (*Г.В.Ф.Гегель*; 1770-1831). См. также *ДІАЛЕКТИКА*.

**"ДІАЛЕКТИКА** ж. греч. умословіе, логика на деле, въ преніи, наука правильнаго разсужденія; по злоупотребленію, искуство убедительнаго пустословія, ловкаго спора, словопренія. ***Діалектическій***, къ діалектике относящійся. ***Діалектикъ***, ловкій, искусный спорщикъ, доводчикъ; иногда софистъ. (...)" (*В.И.Даль*; 1801-1872) [82].

"Память с возрастом становится всё более динамичной. Не успеешь что-то запомнить, как уже всё забыл." (*Болеслав Вольтер*; р. 1929).

**Динамичность** (*франц.* dynamikos - динамичный, *нем.* dynamisch - *тж.* [103, 104] < *греч.* **δυναμιχοζ** - могущий, имеющий силу (*позд.*) < **δυναμιζ** - сила, способность, могущество < **δυναμαι** - мочь, быть в состоянии. *А.Д.Вейсман*; (1834-1913). [80]) - богатство движением, действием, внутренней силой; способность к развитию, видоизменению [92, 93].

**Дискретность** (< *лат.* discretus - разделённый, прерывистый, discerno - отделять, разделять) - прерывистость; противопоставляется *непрерывности*. Например, дискретное изменение какой-либо *величи-*

*ны* во времени - это изменение, происходящее через *определённые* промежутки времени (скачками); система целых *чисел* (в противоположность системе действительных чисел) является дискретной.

**Дисперсия** (< *лат.* disperse - рассеянно, разбросанно, там и сям; dispersio - рассеяние, разбросанность) в *математической статистике* и *теории вероятностей* - *центральный момент* второго порядка, *параметр*, характеризующий рассеяние (разброс) значений *случайной величины относительно* другого параметра, принимаемого за центр:

$$s^2_{m_x} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^2, \qquad (1.53)$$

где $m_x$ - параметр принимаемый за центр распределения (например, оценка *математического ожидания* $M_x$). Выборочная дисперсия $s^2_{m\,x}$ является *статистикой*, т.е. параметром конкретной *выборки* из *совокупности*.

Следует различать дисперсию *эмпирического распределения* (дисперсию выборочного распределения) и *дисперсию воспроизводимости* (опытную дисперсию, тоже выборочную). Для определения дисперсии воспроизводимости осуществляют так называемые *параллельные опыты* и оценку математического ожидания как правило производят по формуле среднего арифметического. При этом предполагают (или проверяют), что ошибки измерения физических величин подчиняются закону нормального распределения. Во всяком случае, распределение результатов параллельных опытов должно быть симметричным.

В случае эмпирического распределения параллельные опыты имеют второстепенное значение и производятся для отладки методики *наблюдений, экспериментов*. Главная задача исследования эмпирического распределения - сделать *представительную выборку* из *совокупности*. Если эмпирическое распределение *асимметрично*, то возникает достаточно серьёзная проблема выбора центра распределения. Центром *распределения* могут быть *медиана, мода, начальный* момент первого порядка, *арифметическое среднее, арифметическое взвешенное среднее, взвешенное степенное среднее, гармоническое среднее, геометрическое среднее, среднее квадратичное, среднее кубическое, арифметико-геометрическое среднее* и др. параметры. Другими словами, дисперсия выборочного распределения характеризует *вариацию* признака относительно *среднего значения выборки* - параметра, определяемого *сущностью* задачи и *концепцией* исследователя.

Для оценки результатов наблюдений одной дисперсии недостаточно. Корень квадратный из выборочной дисперсии называется квадратичным отклонением или стандартом.

С точки зрения ценности информации о поведении случайной величины то, чем больше дисперсия (т.е. больше разброс значений случайной величины относительно центра распределения), тем оценка $M_x$ хуже, информация о сущности явления, процесса разнесена на большем интервале.

Подробно см. раздел 2.5. См. также *Воспроизводимость, Генеральный, Дисперсия воспроизводимости, Несмещённая оценка, Стандарт, Стьюдента критерий.*

**Дисперсия воспроизводимости** (< *лат.* dispersе - рассеянно, разбросанно, там и сям; dispersio - рассеяние, разбросанность) - *количественная* характеристика точности *эксперимента* или *воспроизводимости результатов наблюдений* в природе, науке, технике и технологии; вычисляется по *формуле*:

$$S^2_{оп} = \frac{1}{n_{оп}-1} \sum_{i=1}^{n_{оп}} (x_i - m_x)^2, \qquad (1.54)$$

где $m_x$ - *оценка математического ожидания*, $n_{оп}$ - *число опытов* на воспроизводимость, $\nu_{оп}=n_{оп}-1$ - *степеней свободы число* дисперсии воспроизводимости. Другими словами, дисперсия воспроизводимости - *мера* отклонения (разброса, рассеяния) *случайной величины* $X$ от *оценки математического ожидания* $M_x$ и характеризует точность эксперимента (точность измерений физической величины). Если *ошибки измерений нормально распределены*, то, как правило, в качестве оценки математического ожидания используется *арифметическое среднее*:

$$\bar{x} = \frac{1}{n_{оп}} \sum_{i=1}^{n_{оп}} x_i. \qquad (1.55)$$

В зависимости от сущности задачи и *концепции* исследователя могут быть использованы другие оценки математического ожидания (см. *Среднее, среднее значение*).

Для практического расчёта дисперсии воспроизводимости более удобна и точна формула:

$$S^2_{оп} = \frac{1}{n_{оп}(n_{оп}-1)} \left\{ n_{оп} \sum_{i=1}^{n_{оп}} x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^{n_{оп}} x_i \right)^2 \right\}. \qquad (1.56)$$

С точки зрения *метода моментов* дисперсия воспроизводимости является *центральным* моментом второго порядка и для *непрерывной случайной величины* может быть определена по формуле:

$$\mu_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - m_1)^2 p(x) dx. \qquad (1.57)$$

где $m_1$ - начальный момент первого порядка, *оценка математического ожидания*.

Для *оценки* достоверности результатов наблюдений одной дисперсии воспроизводимости недостаточно. Корень квадратный из дисперсии воспроизводимости называется *квадратичным отклонением, стандартным отклонением* или *выборочным стандартом*. При этом подразумевается, что ошибки измерений (да и сами результаты параллельных измерений, анализов) подчиняются закону нормального распределения. Начинающие исследователи обычно с трудом развивают интуитивное восприятие численного значения дисперсии или стандартного отклонения. Является ли дисперсия воспроизводимости, равная, например, 77, большой или малой? Что значит квадратичное отклонение $0,51 \cdot 10^{-4}$? Оказывается, для *интерпретации* как дисперсии воспроизводимости, так и квадратичного отклонения главное не получить численные значения последних, а *правильно* сравнить дисперсию воспроизводимости с какой-либо другой дисперсией, например, дисперсией *адекватности* или квадратичное отклонение с соответствующим *параметром*, чтобы проверить *нулевую гипотезу* (гипотезу об отсутствии различия). На *начальных* этапах исследований квадратичное отклонение $\pm s_x$ сравнивают со средним значением *выборки*, $x_{ср}$. Если $|s_x| \ll x_{ср}$, то говорят о значимом отличии результатов наблюдений от нуля и **предварительную** *оценку* точности эксперимента осуществляют по *отношению* $s_x/x_{ср}$ (см. *Вариации коэффициент*). Если это отношение не превышает 3÷4%, то в первом приближении результаты наблюдений считают воспроизводимыми; в противном случае *необходимы* дополнительные изыскания.

Следует различать дисперсию воспроизводимости (опытную дисперсию) и дисперсию *эмпирического распределения* (дисперсию выборочного распределения). Для определения дисперсии воспроизводимости осуществляют так называемые *параллельные опыты* и оценку математического ожидания как правило производят по формуле среднего арифметического. При этом предполагают (или проверяют), что ошибки измерения физических величин подчиняются закону нормального распределения.

См. также *Воспроизводимость, ВОСПРОИЗВОДИТЬ, Ошибок теория, Параллельные измерения, Параллельные опыты, Стьюдента критерий, Эмпирическое распределение, Шум, ШУМЪ.*

**Дисперсия совокупности**, *генеральная дисперсия* - *мера* отклонения (разброса, рассеяния) *случайной величины* $X$ от её *математического ожидания* $M_x$. Как и математическое ожидание, дисперсия совокупности (генеральная дисперсия) - некоторая гипотетическая величина, которую можно было бы определить, осуществив бесконечно большое число *опытов* (*наблюдений*):

$$б_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n\to\infty} (x_i - M_x)^2. \qquad (1.58)$$

Эквивалентом генеральной дисперсии является центральный *момент* второго порядка (1.57), (1.118), (3.11):

$$\mu_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_1)^2 p(x)\,dx. \qquad (1.59)$$

*Оценкой* генеральной дисперсии будет *выборочная дисперсия*:

$$s_{m_x}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2, \qquad (1.60)$$

где $m_1$ - начальный момент первого порядка, $m_x$ - оценка математического ожидания $M_x$ или какой-либо параметр, принимаемый за центр распределения (например, арифметическое среднее (1.212)).

Дисперсия совокупности (генеральная дисперсия) используется в основном при теоретических построениях.

См. например, (1.94); (1.99); (1.100); (1.103); (1.104); (1.106); (1.121); (1.125); (1.136); (1.139); (1.173); (1.193); (1.205); (1.225); (1.240); (1.256); (1.267); (1.272); (1.273); (1.274); (1.299); (1.304); (2.20). См. также *Среднее, среднее значение.*

**Генеральный** (*возм. через польск.* generalny < *лат.* generalis - общий, всеобщий) - общий, всеобщий (*М.Фасмер*; (1886-1962), *В.И.Даль*; (1801-1872)). В *статистике математической термин* "**генеральный**" используется для различения *параметров*, характеризующих *совокупности*, и *статистик* (параметров), характеризующих *выборки* из совокупностей. Генеральные параметры обозначаются греческими буквами, а выборочные параметры (оценки генеральных) - соответствующими латинскими буквами. Например, $б^2_x$ - генеральная дисперсия (дисперсия совокупности, $s^2_x$ - выборочная дисперсия; $M_x$ - *математическое* *ожидание случайной величины* (генеральный параметр совокупности), $m_x$ - *оценка* математического ожидания (*среднее значение* выборки).

**Дифференциал** (< *лат.* differentia - разница, различие) - главная *линейная* часть приращения *функции*. Для того чтобы удостовериться в этом, давайте выражение для *производной*:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y', \tag{1.61}$$

запишем в виде:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \varepsilon, \tag{1.62}$$

где $\Delta x$ и $\varepsilon$ бесконечно малые величины, причём $\Delta x \to 0$ и $\varepsilon \to 0$. При умножении этого равенства на $\Delta x$ получим линейное *уравнение*:

$$\Delta y = y' \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x. \tag{1.63}$$

Из последнего равенства очевидно, что приращение $\Delta y$ функции $y$ включает в себя два бесконечно малых слагаемых: $y' \cdot \Delta x$ и $\varepsilon \cdot \Delta x$. Первое слагаемое есть бесконечно малая величина первого порядка по отношению к $\Delta x$, ибо отношение её к $\Delta x$ есть собственно производная $y'$, постоянное число, отличное от нуля (за исключением экстремумов). Второе слагаемое есть бесконечно малая величина более высокого порядка по отношению к $\Delta x$, поскольку отношение её к $\Delta x$, равное, очевидно, $\varepsilon \cdot \Delta x / \Delta x = \varepsilon$, стремится к нулю. В такой ситуации $\Delta y$ и $y' \cdot \Delta x$ оказываются эквивалентными бесконечно малыми величинами, причём $y' \cdot \Delta x$ является главной частью бесконечно малого приращения $\Delta y$ (*Г.М.Фихтенгольц*; р.5.06.1888). Эта главная часть называется дифференциалом функции и обозначается символом:

$$dy = y' \cdot \Delta x. \tag{1.64}$$

Таким образом, с точностью до бесконечно малых высшего порядка, приращение функции можно заменить её дифференциалом:

$$\Delta y \approx dy. \tag{1.65}$$

Дифференциал - одно из важнейших *понятий математического анализа*. Дифференциальное исчисление основано на *методе бесконечно* малых величин или методе *пределов*. Задача дифференцирования функций является предметом дифференциального исчисления, начала которого были разработаны Г.В.Лейбницем (*G.W.Leibniz*; 1646-1716) и И.Ньютоном (*I.Newton*; 1643-1727) и приоритет в открытии которого был причиной многолетних, достаточно жёстких споров между этими великими учёными [49].

См. также *БЕЗКОНЕЧНЫЙ, Бесконечность, Интеграл, Кривая, Переменная, Производная, Функция.*

**Доверительная вероятность** - *вероятность* достоверности принимаемой *гипотезы*, характеристика надёжности, полученной по *выборке* *оценки* того или иного *параметра*:

$$P=P\{|\beta-b|\leqslant\varepsilon_p\}, \qquad (1.66)$$

где $\beta$ - *генеральный параметр*; $b$ - его оценка; $\varepsilon_p=f(p)$ - *ошибка* определения генерального параметра; $P$ - вероятность настолько большая, что *событие* $|\beta-b|\leqslant\varepsilon_p$ можно считать практически достоверным. Очевидно, что диапазон *возможных* с вероятностью $P$ значений ошибки от замены $\beta$ на $b$ равен $\pm\varepsilon_p$. Вероятность появления ошибок, больших по *абсолютной величине*, чем $\varepsilon_p$, или вероятность событий $|\beta-b|\geqslant\varepsilon_\beta$ называется *уровнем значимости*:

$$\alpha=1-P=P\{|\beta-b|\geqslant\varepsilon_p\}. \qquad (1.67)$$

Иначе выражение (1.66) может быть интерпретировано как вероятность того, что неизвестное значение параметра $\beta$ находится в *пределах*:

$$b-\varepsilon_p\leqslant\beta\leqslant b+\varepsilon_p, \qquad (1.68)$$

где выборочный параметр $b$, по существу, *случайная величина*, а ошибка его определения ($\beta-b$) в выражениях (1.66) и (1.67) также случайная величина. *Интервал* $I_p=b\pm\varepsilon_p$ называется *доверительным интервалом*. Границы интервала $b_{min}=b-\varepsilon_p$ и $b_{max}=b+\varepsilon_p$ называются доверительными *границами*. Доверительный интервал при принятой доверительной вероятности определяет точность оценки. Величина доверительного интервала зависит от принимаемой доверительной вероятности, т.е. от той вероятности, с которой гарантируется нахождение искомого параметра $\beta$ внутри доверительного интервала. Другими словами: чем выше гарантия надёжности оценки, тем больше величина интервала, в котором может находится *генеральный параметр*. В исследованиях прикладного характера доверительная вероятность обычно принимается $P=0,95$. Соответственно, *уровень значимости* $\alpha=1-P=0,05$. В случае нормально распределённой случайной величины это соответствует вероятности попадания случайной величины в интервал $M_x-2\sigma\leqslant X\leqslant M_x+2\sigma$ или, по аналогии с вероятностью 0,997, правилу двух сигма (вероятность попадания случайной величины в интервал $P(M_x-3\sigma\leqslant X\leqslant M_x+3\sigma)=0,997$ называется *прави-*

*лом трёх сигма,* (1.255)).

См. также *Значимость параметра, Уровень значимости.*

**Доверительное отклонение** - *функция* от *результатов наблюдений* и *доверительной вероятности,* позволяющая *оценить* доверительный *интервал,* который с вероятностью $P=1-\alpha$ "накрывает" неизвестное значение *параметра*:

$$s_x^{\alpha} = \pm \frac{s_x}{\sqrt{n}} \cdot t_{\nu}^{\alpha}, \tag{1.69}$$

где $s_x$ - *квадратичное (стандартное) отклонение*; $n$ - *количество* наблюдений в *выборке*; $t$ - *критерий Стьюдента, случайная величина,* характеризующая *соотношение* неизвестной ошибки определения $M_x$ и *квадратичного отклонения* $s_x$:

$$t_{\nu}^{\alpha} = \frac{(\bar{x}-M_x)}{s_x}\sqrt{n}, \tag{1.70}$$

где $\nu=n-1$ - *степеней свободы число,* $\alpha$ - *значимости уровень, вероятность* ошибочно отвергнуть *нулевую гипотезу,* когда она верна. Критерий Стьюдента вычисляется независимым путём и табулируется для ряда значений чисел степеней свободы $\nu$ уровней значимости $\alpha$. Центральный момент при вычислении доверительного отклонения заключается в том, уровнем значимости исследователь задаётся до начала исследований исходя из *сущности* задачи, природы процесса, явления и степени риска.

При выборе уровня значимости следует учитывать ущерб, *неизбежно* возникающий при использовании любого *критерия* значимости. Так, например, если уровень значимости чрезмерно велик, то основной ущерб будет происходить от ошибочного отклонения правильной гипотезы; если же уровень значимости мал, то ущерб будет, как правило, возникать от ошибочного принятия гипотезы, когда она ложна. Эти ошибки неравноценны. Исследователь (руководитель) должен решать, какой риск при отклонении основной (нулевой) гипотезы является допустимым.

Критерий Стьюдента зависит от *степеней свободы числа* $\nu$ выборочной *дисперсии* и *уровня значимости* $\alpha$. (Сравните с (1.129), (1.130), (1.138), (1.235)). Необходимо отметить, что доверительное отклонение не зависит ни от *математического ожидания* $M_x$, ни от *генерального параметра* $\sigma_x$. Это *случайная величина,* зависящая только от квадратичного отклонения $s_x$ и принимаемого исследователем уровня значимости $\alpha$.

См. также *Дисперсия воспроизводимости, Доверительная вероятность, Значимость параметра, Параллельные измерения.*

**Доверительные границы** см. *Дисперсия воспроизводимости, Доверительная вероятность, Доверительное отклонение, Доверительный интервал, Значимость параметра.*

**Доверительный интервал** - *статистическая оценка параметра* исследуемого *вероятностного распределения*, имеющая вид *интервала*, границами которого служат *функции* от *результатов наблюдений* и *доверительной вероятности*, который с вероятностью $P$ "накрывает" неизвестное значение параметра. Дело в том, что значение оценки в каждом конкретном случае может отличаться от *истинного* значения параметра (*математического ожидания, генеральной дисперсии* и др.), и, следовательно, в *интерпретации* результатов *эксперимента* имеется некоторая доля неопределённости. При грубых *оценках* величина этой неопределённости выражается с помощью *выборочной дисперсии* или *квадратичного отклонения*, т.е. вполне *возможно*, что неизвестный *генеральный параметр* $M_x$ находится в интервале $x_{cp} \pm s_x$; также возможно, что он находится в интервале $x_{cp} \pm 2s_x$ и т.д. Другими словами, для верной интерпретации результатов эксперимента важно установить для оценки генерального параметра $M_x$ **интервал** вместо отдельной точки $x_{cp}$, причём хотя бы одна точка этого интервала, а именно $x_{cp}$, и рассматривалась бы как "наилучшая" оценка для $M_x$. Задача определения доверительного интервала решалась бы достаточно просто, если бы был известен *закон* распределения оценки $x_{cp}$ (1.55):

$$P\{|M_x - \bar{x}| \leqslant \varepsilon_p\} = \int_{-\varepsilon_p}^{+\varepsilon_p} p(x)\,dx = P. \qquad (1.71)$$

Также просто решалась бы эта задача при известной *генеральной* дисперсии $\sigma^2_x$ (знание генеральной дисперсии $\sigma^2_x$ позволяет оценивать доверительный интервал даже по одному наблюдению), но, к сожалению, генеральную дисперсию $\sigma^2_x$ *невозможно* получить из наблюдений, её можно только оценить при помощи выборочной дисперсии $s^2_x$. Так, для *выборки* объёма $n$ оценки математического ожидания $M_x$ и генеральной дисперсии $\sigma^2_x$ соответственно равны:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i; \qquad (1.72)$$

$$s^2_x = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2, \qquad (1.73)$$

С 1809 года было известно, что распределение *случайных ошибок наблюдений* подчиняется *закону нормального распределения*, открытого К.Гауссом (*Gauss Carl Friedrich*; 1777-1855). (Хронологически, нормальное распределение было впервые найдено в 1733 году А.Муавром (*A.de Moivre*; 1667-1754). Позднее, в 1770-1771 гг. Д.Бернулли (*Daniel Bernoulli*; 1700-1782) *независимо* вывел *локальную* предельную теорему Муавра-Лапласа и составил первую небольшую таблицу нормального распределения). В 1894 году К.Пирсон (*Pearson Karl*; 1857-1936) ввёл в *статистику математическую* 12 типов распределений (1.152) - (1.173), познее названных его именем. Одно из них, в частности тип 7, (1.165), оказалось предшественником *Стьюдента распределения*, (1.252).

В 1908 году У.Госсет (*William Sealy Gosset*; 1876-1937), известный под псевдонимом Student, решил проблему *оценки доверительного интервала* для *математического ожидания* нормально распределённой *случайной величины*:

$$\bar{x} - \frac{s_x}{\sqrt{n}} \cdot t_\nu^\alpha \leqslant M_x \leqslant \bar{x} + \frac{s_x}{\sqrt{n}} \cdot t_\nu^\alpha, \qquad (1.74)$$

где $t_\nu^\alpha$ - *Стьюдента критерий*, случайная величина, зависящая только от *степеней свободы числа* $\nu$ выборочной дисперсии и *уровня значимости* $\alpha$ (сравните с (1.128)). То, что доверительный интервал зависит от объёма выборки $n$, очевидно, но на доверительный интервал влияет также такая важная величина в *процедуре* проверки *статистических гипотез*, как *уровень значимости* $\alpha$. Чем меньше уровень значимости, тем больше критерий Стьюдента. Значения критерия Стьюдента для ограниченного *количества* чисел степеней свободы $\nu$ и уровней значимости $\alpha$ приведены в Приложении 6.

См. также *Доверительная вероятность, Доверительное отклонение, Доверительные границы, Значимость параметра.*

**Достоверность** - *правильная*, точная, не вызывающая сомнений мысленная *модель* предметов и *явлений* окружающего мира. Достоверность применяется в качестве характеристики знания как обоснованного, доказательного, бесспорного и как *синоним истины*. В естествознании достоверными нередко называют *события*, *суждения* о которых рассматриваются как *эмпирически* (*экспериментально*) подтверждённые или, шире, общественной практикой.

Достоверное событие - *неизбежное* событие, событие *вероятность* которого равна единице. Например, при бросании одной игральной кости вероятность выпадения **любого** результата от 1 до 6 равна 1, это достоверное событие.

В случае непрерывных *распределений вероятностей случайной величины* попадание случайной величины в *интервал* ($-\infty \div +\infty$) является достоверным событием, но *вероятность* каждого отдельного значения может быть равна нулю (1.191), (1.192).

*Больших чисел закон*, по существу, указывает на вероятности, сколь угодно близкие к достоверности. Из закона больших чисел вытекает удивительное "следствие, что, если бы наблюдения над всеми событиями продолжать всю вечность (причём вероятность наконец перешла бы в полную достоверность), то было бы замечено, что всё в мире управляется точными отношениями и постоянным законом изменений, так что даже в вещах, в высшей степени случайных, мы вынуждены были бы признать как бы некоторую необходимость" и даже неизбежность. [4, с.59].

Вероятность достоверности принимаемой *гипотезы*, характеристика надёжности, полученной по *выборке оценки* того или иного *параметра*, называется доверительной вероятностью. Доверительная вероятность всегда меньше единицы.

В большинстве случаев *мерилом* (мерилом оценки) для *определения* достоверности, соответствия человеческого знания *объективной* реальности, а также признаком, на основании которого производится оценка, определение или классификация чего-либо, является критерий.

См. также *Адекватность*, *Состоять*.

# З

**Зависимость** - "**ЗАВИСЕТЬ** отъ чего, отъ кого, быть подъ властью, подъ полнымъ вліяньемъ, быть въ чьей воле; || быть следствіемъ известной причины. (...) ***Зависимый***, зависящій. ***Зависимость***, состоянье зависящаго. (...)" (*В.И.Даль*; 1801-1872) [82].

Необходимо добавить, что *статистическая* зависимость, как бы ни была она сильна, никогда не может установить *причинной связи*: наши идеи о причине и *следствии* должны приходить извне *математической* *статистики*, в *конечном* счёте из некоторой другой *теории*. Предположения о причинах и следствиях следует искать вне статистики, в частности, в сфере *физической сущности явления*. Зависимость по существу предполагает наличие причины и следствия. Другими словами, говорить о "статистической зависимости" некорректно. Правильнее говорить о статистической связи. См. также *Независимость*, *Отношение*.

"Знание законов заключается не в том, чтобы помнить их слова, а в том, чтобы постигать их смысл." (*Марк Туллий Цицерон*; 106-43 до Р.Х.).

**Закон** - естественная, всеобщая, *необходимая* и существенная *связь* и *взаимозависимость процессов* и *явлений* в природе, обществе, *популяциях* и в мышлении; перманентное, повторяющееся, достаточно редко меняющееся, идентичное в явлении.

В науке прогресс неразрывно связан с открытием законов природы. Фундаментальные законы природы достаточно просты, они мало что объясняют и только констатируют факты. Например, в явлениях переноса импульса, энергии и массы фундаментальные законы: основополагающий закон равновесия (во *множестве* смыслов этого *понятия*), закон Авогадро, закон Архимеда, закон гидростатики Паскаля, законы *состояний идеальных* газов (законы Амага, Авогадро, Бойля-Мариотта, Гей-Люссака, Дальтона, Шарля), законы Ньютона (инерции, сохранения *количества* движения, равнодействия сил, всемирного тяготения), законы *сохранения*, закон *причинности* и многие другие. Недоказуемые фундаментальные законы называются также *постулатами*. Большинство законов формализуют факт или явление вне связи с пространством и временем, причём *формализация* достаточно краткая. См. также *Физика*.

**Закон больших чисел** см. *Больших чисел закон*.

"Чем фундаментальнее закономерность, тем проще её можно сформулировать." (*Пётр Капица*; 1894-1984).

**Закономерность** (*досл.* **мера закона**) - проявления *законов* природы, социальных *отношений*, взаимоотношений в *популяциях*, выявляемые на *количественном* уровне в *результате экспериментов* и *наблюдений*. В отличие от фундаментальных законов, только констатирующих факты и мало что объясняющих, закономерности *формализуют математические*, *физические*, химические, физиологические, (зоо)психологические и т. д. *причинно-следственные связи* в виде математических *уравнений*, *систем* уравнений, графических *зависимостей* и различных теорий.

Частным случаем закономерности является *правило*, которое отражает действующие *нормы*, постоянное *соотношение* каких-либо *явлений* или *событий*, устоявшиеся причинно-следственные связи.

В области физических, химических, физиологических и некоторых других наук исследования тех или иных закономерностей изучаемого явления или проверка правильности и границ применимости найденных *теоретическим* путём результатов осуществляются путём физического *моделирования*. Физическое моделирование - это *метод* изучения *объекта*, *явления*, *процесса* путём экспериментального исследования его модели, имеющей ту же физическую природу, но другие компоненты и масштабы.

В тех случаях, когда объект, явление, процесс не могут быть воспроизведены частично или полностью на физической модели, применяются различные методы математического моделирования. При математическом моделировании исследование *свойств* объекта сводится к задаче изучения свойств математической модели, представляющей собой систему *уравнений* математического описания, отражающую моделируемое поведение оригинала. Математическая модель с помощью определённого алгоритма позволяет прогнозировать это поведение при изменяющихся условиях *функционирования* объекта. В *зависимости* от целей математического моделирования и исходной информации об объекте моделирования и условиях его функционирования применяют различные по форме и *структуре* математического описания модели. К числу наиболее распространённых типов моделей относятся *детерминистические*, *статистические* и экспериментально-статистические.

"Как показывает опыт, ничто с такой силой не побуждает высокие умы к работе над обогащением знания, как постановка трудной и вместе с тем полезной задачи." (*Иоганн Бернулли*; 1654-1705). (Примечание. В книге Е.Вигнера [14] опечатка либо в годах, либо в имени. Справка: Бернулли Якоб (1654-1705), Бернулли Иоганн (1667-1748), Бернулли Николай (1695-1726), Бернулли Даниил (1700-1782), Бернулли Иоганн (1744-1807; внук И.Бернулли), Бернулли Якоб (1759-1789; внук И.Бернулли) [48].

См. также *Измерение*, *Мера*.

**Значимости уровень** *статистического критерия* - *вероятность ошибочно* отвергнуть основную (*нулевую*) проверяемую *гипотезу*, когда она верна. *Понятие* "уровень значимости" возникло в *связи* с задачей проверки согласованности *теории* с *опытными данными*. Если, например, в *результате наблюдений* регистрируются значения $n$ *случайных величин* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ и требуется по этим данным проверить гипотезу $H_0$, согласно которой совместное *распределение* величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ обладает некоторым определённым *свойством*, то соответствующий *статистический* критерий **конструируется** с помощью подходящим образом подобранной *функции* $\theta=f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Эта функция обычно принимает малые значения, когда гипотеза $H_0$ верна, и большие значения, когда $H_0$ ложна; такую гипотезу ещё называют **гипотезой об отсутствии различия**, или **нулевой гипотезой**. Соответствующий *критерий значимости* представляет собой *правило*, согласно которому значимыми считаются значения $\theta$, превосходящие некоторое *критическое* значение $\theta^{\alpha}$. В свою очередь выбор величины $\theta^{\alpha}$ определяется заданным уровнем значимости $\alpha$, который в случае отклонения гипотезы $H_0$ совпадает с *вероятностью события* $\{\theta>\theta^{\alpha}\}$. Центральный момент при проверке гипотезы $H_0$ заключается в том, что уровнем значимости $\alpha$ задаются до *анализа выборки* на основании *физической сущности* задачи и *последствий* от ошибочного принятия решения. Диапазон значений уровней значимости, принимаемых в науке, технике и технологии, достаточно широк: 0,001; 0,01; 0,02; 0,05; 0,1; 0,2 и т.д. Наиболее употребительно значение $\alpha$=0,05; оно соответствует *доверительной вероятности* $P$=0,95 или, по аналогии с вероятностью 0,997 (см. *Трёх сигма правило*), правилу двух сигма, т.е. вероятности попадания нормально распределённой случайной величины в интервал $(M_x-2\sigma \leqslant X \leqslant M_x+2\sigma)$. Соответствующая вероятность $P$=0,954. При этом следует иметь в виду, что общая вероятность (общая площадь под кривой плотности вероятностей гипотетического критерия $p(\theta)$) равна единице, а уровень значимости $\alpha$ соответствует площади под крайней ветвью кривой при $\theta>\theta^{\alpha}$.

В теории статистической проверки гипотез уровень значимости называется *вероятностью ошибки первого рода*. Вероятность такой ошибки не больше **принятого** уровня значимости. Например, при $\alpha$=0,05 можно совершить ошибку первого рода в пяти случаях из ста. Принятие основной проверяемой гипотезы, когда она неверна, называется *ошибкой второго рода*. *Фиксация* уровня значимости находится целиком в компетенции исследователя: он должен решать, какой риск при отклонении *нулевой* гипотезы является допустимым.

В геологии обычно имеют дело с обстоятельствами большой неопределённости, например, объём образцов (кернов), извлекаемых из скважин при разведочном бурении, *несоизмеримо* меньше объёма исследуемой залежи. Нулевой гипотезой в данном случае будет являться гипотеза об отсутствии различия образцов исследуемой залежи от пустой породы; подтверждение гипотезы будет означать бесперспективность дальнейшего бурения, а опровержение - наличие той или иной нефтегазоносности. Если позволить допустить ошибку в одном случае из ста ($\alpha$=0,01) или даже в одном случае из двадцати ($\alpha$=0,05), то, имея в распоряжении керны из нескольких скважин, будет трудно отвергнуть нулевую гипотезу (т.е. доказать перспективность залежи), и возникнет *необходимость* во всё большем и большем объёме образцов, получить которые непросто. Принимая более скромные уровни значимости ($\alpha$>0,1), можно быстрее прийти к заключению, хотя вероятность получить ошибочные выводы может оказаться очень высокой в сравнении со *стандартами*, принятыми в других областях.

Критерий значимости, с помощью которого гипотеза проверяется, конструируется таким образом, чтобы критическое значение критерия могло быть вычислено *независимым* путём в предположении, что проверяемая гипотеза верна. При этом значения собственно критерия располагаются вдоль оси абсцисс, функция представляет собой некоторую *кривую*, площадь под которой равна единице, а критерий значимости $\alpha$ точно равен площади под кривой в критической области, т.е. в области отклонения проверяемой гипотезы. Примерный характер кривых приведён на рис. 1.7, 1.8, 1.21, 1.22, 1.23, 1.36, 1.37, 1.38, 1.39, 1.40, 1.41, 1.42, 1.44, 1.45, 1.48, но в общем случае он может быть иным (полезно сопоставить с *вероятностью* наблюдения случайной величины $Z$ за пределами *интервала* $(-z \div z)$ в разделе 2.9.).

Представим себе, что нефтяная компания сконструировала статистический критерий прогноза нефтегазоносности $\Theta$, состоящий из некоторых *количественных переменных*, позволяющих определять приоритеты при бурении. Цель применения статистического критерия - сделать более или менее верный прогноз продуктивности скважин. Нулевая гипотеза $H_0$ состоит в том, что керны отобраны из *совокупности* бесперспективных разрезов, альтернативная $H_1$ - что керны отобраны из нефтяного или газового месторождения. Альтернативных гипотез может быть несколько.

Если принять уровень значимости, например $\alpha$=0,05 (рис.1.7, а), то очень малая часть образцов окажется отличающейся от неперспективной породы (нулевой совокупности). Если же окажется, что образцы отличаются от неё, то это почти наверняка даст открытие месторождения при бурении. Компания получит очень высокое *соотношение* для числа успехов при бурении, но при этом пропустит много залежей, которые могли бы оказаться продуктивными. Другими словами, компания будет редко бурить, редко совершать *ошибки* первого рода, но, соответственно, оставит много месторождений неоткрытыми.

Если принять уровень значимости побольше, например $\alpha$=0,40 (рис.1.7, б), то придётся осуществлять частую сеть бурения, соответственно *частота* неперспективных скважин будет значительно выше, но *вероятность* пропуска залежи будет меньше. При такой практике принятия решений компания будет часто бурить, часто ошибаться, но и значительно меньше месторождений нефти останется неоткрытыми.

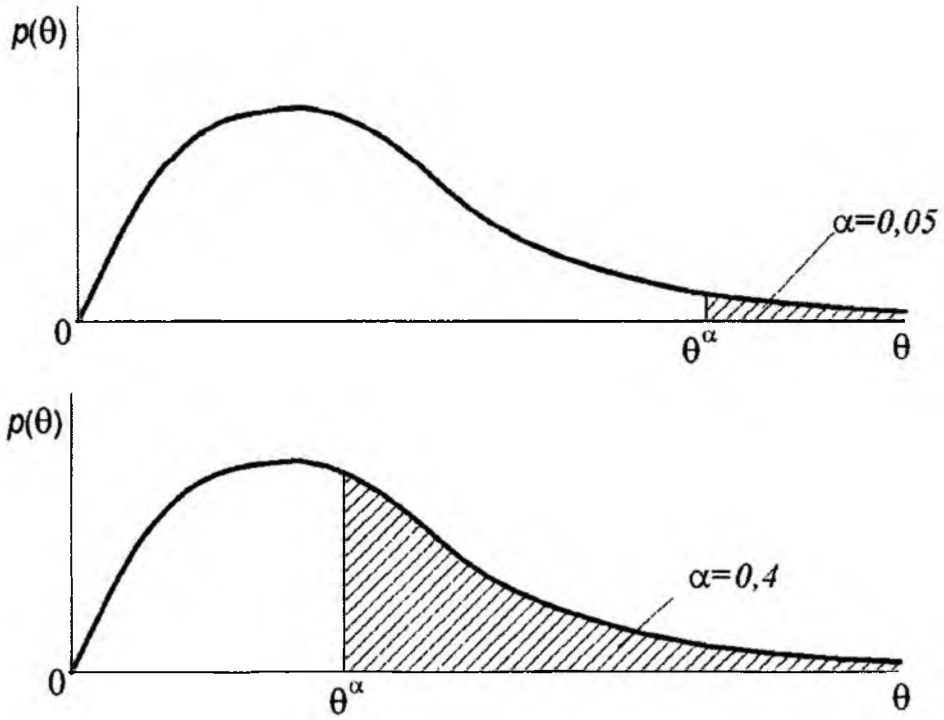



Рис.1.7. Распределение статистики гипотетического критерия $\theta$ с критической областью $\alpha$ отклонения гипотезы о бесперспективности бурения (гипотезы об отсутствии различия между сравниваемыми комплексами величин) (общая площадь под кривой плотности вероятностей равна 1)

В нефтяной промышленности случаи получения отрицательного *результата* при бурении перспективных площадей встречаются значительно чаще, чем последствия получения положительного результата при бурении пустых скважин. *Причина* этого состоит в том, что финансовый успех одного большого открытия может покрыть стоимость нескольких десятков пустых скважин. *Оценка* вероятности успеха бурения *методом* "дикой кошки" в нефтяной промышленности США примерно равна 10%. Если бы эти скважины были пробурены на основе применения статистических критериев, то эта оценка соответствовала бы *уровню значимости* примерно $\alpha$=0,9.

Рассмотренный выше пример иллюстрирует выбор уровня значимости так называемого одностороннего критерия, поскольку нефть либо есть в залежи, либо нет, т.е. соответствующий критерий располагается только в положительной области. В тех случаях, когда *физическая* величина может принимать значения как положительные, так и отрицательные, либо критерий, соответствующий нулевой гипотезе, может располагаться в обеих областях декартовой *системы* координат, применяют двусторонний критерий значимости. *Термин* "нулевая гипотеза" возник оттого, что *математическое ожидание* критерия, соответствующее подтверждению основной проверяемой *гипотезы*, равно нулю (рис. 1.8, 1.21, 1.22, 1.36, 1.37, 1.40, 1.41, 1.42,а).

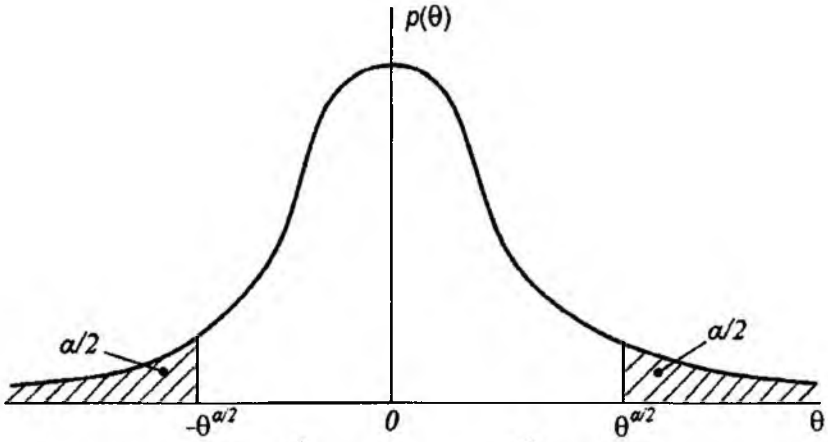



Рис.1.8. Левая ($-\theta^{\alpha/2}$) и правая ($\theta^{\alpha/2}$) критические области гипотетического двустороннего критерия $\theta^{\alpha}$ (общая площадь под кривой плотности вероятностей равна 1)

Очевидно, что вероятность попадания критерия как в левую область, так и в правую одинакова, соответственно одинакова и вероятность попадания критерия θ как в левую, так и в правую *критические* области. Таким образом, уровень значимости α, т.е. вероятность отклонения нулевой гипотезы, распадается на две равные площади, каждая из которых равна $\alpha/2$. Критическое значение θ при этом увеличивается. Из этого следует важный вывод - приняв уровень значимости α для проверки гипотезы $H_0$, табличное значение критерия θ следует брать для вдвое меньшего значения, т.е. для $\alpha/2$. Соответствующие значения критериев иногда записывают, например, так: для левой критической области $\theta^{1-\alpha/2}$, для правой - $\theta^{\alpha/2}$.

При выборе уровня значимости следует учитывать ущерб, *неизбежно* возникающий при использовании любого *критерия* значимости. Так, например, если уровень значимости чрезмерно велик, то основной ущерб будет происходить от ошибочного отклонения *правильной* гипотезы; если же уровень значимости мал, то ущерб будет, как правило, возникать от ошибочного принятия гипотезы, когда она ложна. Пример Дж.С.Дэвиса - крайний случай, но он показывает, что исследователь должен принимать решения на границе области риска и выбирать уровень значимости в соответствии с конкретными обстоятельствами.

См. также *Нормальное распределение, Нулевая гипотеза, Основная гипотеза, Правило определения критического значения статистического критерия, Статистических гипотез проверка, Степеней свободы число, Стьюдента критерий, t-критерий, Стьюдента распределение, Фишера критерий, F-критерий, Фишера распределение, Хи-квадрат критерий, Хи-квадрат распределение.*

**Значимость параметра** - факт отличия *выборочного параметра* от нуля. Некоторая неопределённость ответа на вопрос о равенстве параметра нулю, свойственная начинающим исследователям, заключается в том, что при вычислении параметра по данным *выборки* ноль получить практически *невозможно*. Параметр может быть очень малым *числом*, но не нулём, при этом его *величина* будет соответствовать его *сущности* и он будет значимым. Например, $k$=0,00000789±0,000000789. И наоборот, вычисленный параметр может быть весьма значителен по величине, но по *физической* сущности задачи должен быть равен нулю, например $k$=15789±15987.

Проблема решается путём сравнения параметра с его *квадратичным отклонением*, $s_k$, которое также не может иметь нулевого значения. Квадратичное отклонение также может быть и очень малым числом, и очень большим, вопрос в *соизмеримости* $k$ и $s_k$. Здесь *возможны* варианты: $|k|<|s_k|$ и $|k|>|s_k|$ (равенство $k=s_k$ возможно только теоретически). Если $|k|<|s_k|$, то это означает, что ноль попадает в выборочные стандартные границы параметра $k$ и *нулевая гипотеза* в первом приближении подтверждается. С другой стороны, если $|k|>|s_k|$, то этот факт ещё не означает значимого отличия параметра $k$ от нуля, поскольку *доверительный интервал* зависит ещё и от *соотношения Стьюдента критерия* и *числа опытов* $n$, см. (1.69) и (1.250).

См. также *Доверительное отклонение, Доверительный интервал, Квадратичное отклонение, Мера, Статистических гипотез проверка.*

# И

**Идеальная** монета, идеальная игральная кость - *симметричная* монета или игральная кость, которые не имеют *флуктуаций* плотности по объёму и у которых *центр* тяжести расположен в *центре*. Предполагается, что идеальная монета не может встать на ребро, а игральная кость не может встать на угол или ребро. Идеальный газ - газ, молекулы которого не взаимодействуют друг с другом и при столкновениях ведут себя как упругие шары. В *действительности* всё сложнее - "Ничто так не компрометирует идеалы, как реальность" (*Аркадий Давидович*; р. 12.06.1930).

"Именно абсолютность, и, следовательно, недостижимость идеала и является лучшей гарантией бесконечности движения к нему." (*С.Н.Булгаков*; 1871-1944).

**Идеальное** (**идея** < *польск.* idea, *нем.* Idee, *франц.* idee < *лат.* idee, *греч.* ιδεα : ιδετν "видеть". *М.Фасмер*; 1886-1962. [100]) - 1.

Воображаемое, реально не существующее. 2. Совершенное, образцовое, безукоризненное, безупречное, соответствующее идеалу. 3. *фил. Относящееся* к *идеям*, к *функционированию* мышления; духовное, психическое в противоположность *физическому*.

См. также *Бернулли испытания, Вероятность классическая* (*априорная*), *Вероятность статистическая* (*апостериорная*), *Закон, ИДЕЯ, Максвелла распределение, Нормальное распределение, Понятие, Экспоненциальная функция*.

"**ИДЕЯ** ж. латин. понятіе о вещи; умопонятіе, представленье, воображенье предмета; умственное изображенье. || Мысль, выдумка, изобретенье, вымыселъ; || Намеренье, замыселъ. (...) ***Идеалъ*** м. мысленный образецъ совершенства чего либо, въ какомъ либо роде; первообразъ, прообразъ, началообразъ; представитель; образецъ-мечта. ***Идеаловый***, къ идеалу относящійся; ***идеальный***, воображаемый, думный, мысленный; первообразный, прообразный или началообразный. ***Идеальность*** *противоположна реальности*, мыслимый первообразъ насущному. (...)" (*В.И.Даль*; 1801-1872). [82]. См. также *Идеальное*.

**Измерение -** нахождение значения *физической величины опытным* путём с помощью специальных приборов. Различают прямые и косвенные *измерения*. При прямом измерении *результат* получают непосредственно из измерения самой физической величины, например, измерение длины предмета проградуированной линейкой или рулеткой, измерение массы тела на равноплечих весах с помощью гирь и т.п. Однако прямые измерения не всегда возможны (например, измерение температуры возможно только косвенным путём) или недостаточно точны. При косвенном измерении искомое значение величины находят на основании известной *зависимости* между этой величиной и величинами, доступными прямым измерениям (например, плотность жидкостей можно *определить* взвешиванием пикнометра с известным объёмом; предварительно калибровка пикнометра производится по дистиллированной воде и т.п.).

Измерение является основным средством в практике научных исследований, в технике и технологии. Полностью измерение включает в себя следующие *элементы*: (1) *объект* (*процесс* или *явление*), ту или иную физическую характеристику которого *необходимо* измерить; (2) конкретизированную единицу этой физической величины; (3) технические средства измерения, проградуированные в выбранных единицах; (4) *метод* измерения; (5) приёмник результата измерения (наблюдателя или регистрирующее устройство); (6) значение измеряемой величины; (7) *статистическую оценку* точности результата (имеется в виду факт *невозможности абсолютно* точного измерения).

Всякое измерение *неизбежно* *связано* с *погрешностью измерения*. По источникам погрешностей измерений различают методические и инструментальные погрешности. Методические погрешности являются результатом несовершенства метода, инструментальные обусловлены несовершенством технических средств (приборов), используемых при измерении. По поведению погрешностей различают систематические погрешности и *случайные*. Характер поведения систематических погрешностей доступен обнаружению, *фиксации* и *формализации*, поскольку они ведут себя *закономерно* (в лучшем случае, постоянны) и могут быть учтены соответствующими поправками. Случайные *ошибки* являются результатом влияния *множества факторов* на сам процесс (явление) и на измерение. К ним относятся случайные колебания *параметров* окружающей *среды* - температуры, атмосферного давления, освещённости, уровня вибрации и другие *шумы*, а также *субъективные* факторы. Влияние случайных погрешностей исключить невозможно, их можно оценить методами *математической статистики*. Для этого измерения производят многократно.

Единством измерений занимается метрологическая служба, поддерживающая такое *состояние* измерений, при котором их результаты выражены в *системных* единицах и *пределы* погрешности измерений известны.

См. также *Количество, Мера.*

**Интеграл** (< *лат.* integer - нетронутый, незатронутый, невредимый, целый; чистый, несмешанный; (rebus integris *Cs*, *VP* (re integra *C*) когда дело ещё было в исходном положении *или* не было решено); aliquem in integrum restituere *юр.* *C*, *Cs* восстановить кого-л. в прежнем положении (правах); *или* < *лат.* integro - восстановление, возобновление.- *И.Х.Дворецкий*, (1894-1979). [84]) - (1) первообразная *функция* от *производной* и (2) площадь, объём, длина дуги, работа сил за время $\Delta\tau$ и т.п., одно из важнейших *понятий математики*. Впервые слово "интеграл" употребил в 1690 году Якоб Бернулли (*Jacob Bernoulli*; 1654-1705). Интегральное исчисление основано на *методе бесконечно* малых *величин* или методе *пределов*. Первым в истории математики примером интегрирования является метод вычисления площади круга, описанный Архимедом ('Ἀρχιμήδης; ок. 287-212 до Р.Х.) [49].

Неопределённый интеграл представляет собой семейство первообразных функций вида $\int f(x)dx=F(x)+C$, где $F(x)$ - первообразная функция, $f(x)$ - её производная, а $C$ - так называемая постоянная интегрирования.

Определённый интеграл функции $f(x)$ с нижним *пределом* $a$ и верхним пределом $b$ можно определить выражением $_a\int^b f(x)dx=F(b)-F(a)$, где $F(x)$ есть первообразная функция $f(x)$. Подробнее см. [47, 48].

См. также *БЕЗКОНЕЧНЫЙ, Бесконечность, Дифференциал, Кривая, Математическое ожидание, Переменная, Производная.*

**Интервал** (<*лат.* intervallum - промежуток, расстояние, промежуток времени, **интервал**) - (1) *мат. совокупность* всех действительных *чисел* (или точек), заключённых между двумя данными числами $a$ и $b$ (или точками), не содержащая их. *Обозначается* $(a, b)$; (2) перерыв, промежуток, расстояние в пространстве или во времени; (3) *муз. Соотношение* двух звуков по их высоте.

**Интерпретация** ( < *лат.* interpretatio - разъяснение, истолкование, перевод) - 1. Разъяснение, истолкование, объяснение смысла, значения чего-либо. 2. Внесение личных характеристик, *определяемых* индивидуальными особенностями исполнителя, в реализацию какого-либо (художественного) произведения. Интерпретация **- процесс творческий.**

**Информация** (< *лат.* informatio - разъяснение, осведомление, истолкование) - подмножество цепочек *причинно-следственных связей* (ПСС), *выбранное* из *множества бесконечных* цепочек ПСС. Подмножество цепочек ПСС можно *классифицировать* следующим образом. 1. Сведения, сообщения о чём-либо, передаваемые людьми (первоначальное традиционное *понимание* информации). 2. Уменьшаемая, снимаемая неопределённость в *результате* получения сведений о пропущенных *элементах* цепочек ПСС (по *вероятностно-статистической теории* информации). 3. Передача, отражение разнообразия цепочек ПСС (наиболее общая *интерпретация понятия* информации). Информация представляется в виде чертежей, рисунков, текста, звуковых и световых сигналов, энергетических и нервных импульсов и т.п. и передаётся сигналами какой-либо *физической* природы по линиям связи источника с получателем. Информация может носить *непрерывный* (аналоговый) или прерывный (*дискретный*) характер. Информация - основное понятие кибернетики. Кибернетика изучает машины и живые организмы исключительно с точки зрения их способности воспринимать *определённую* информацию, сохранять её, передавать по каналам связи, перерабатывать по соответствующему алгоритму и использовать. Интуитивное представление об информации *относительно* каких-либо *величин* или *явлений*, содержащейся в некоторых *данных*, в кибернетике ограничивается и уточняется.

"Истины бывают ясные и глубокие. Каждой истине противостоит ложь. Глубокой истине противостоит другая истина, не менее глубокая..." (*Нильс Бор*; 1885-1962).

**Истина** - *адекватное* отражение *объекта* познающим *субъектом*, воспроизведение его таким, каким он существует сам по себе, вне и *независимо* от человека и его сознания; *объективное* содержание чувственного, *эмпирического опыта*, *понятий*, идей, *суждений*, *теорий*, учений и целостной картины мира в *диалектике* её развития. *Категория* "истина" характеризует как *результаты процесса* познания с точки зрения их объективного содержания, так и *методы*, с помощью которых осуществляется познавательная деятельность. Истина - внутренне противоречивый процесс, *связанный* с постоянным преодолением заблуждений, *бесконечный* процесс движения от знания ограниченного, приблизительного ко всё более всеобщему, глубокому, точному. В сознании каждого человека истина интерпретируется по-своему, индивидуализируется. Истинная вера, по существу, представляет собой знание.

См. также *Абсолютный*.

"Полагаю, что истину знает один только Бог и, может быть, узнает душа человека, когда оставит это тело, то есть эту мрачную темницу." (*Аврелий Августин*; 354-430 г.).

**Истинное значение** - *абстрактный объект* ("истина" или "ложь"), сопоставляемый высказыванию в *зависимости* от того, является это высказывание истинным или ложным. "Истина" - это то общее, что присуще всем истинным высказываниям. При *статистической обработке экспериментальных данных* (в задачах восстановления зависимости) и в *моделировании* под истинным значением обычно подразумевается то неизвестное значение *параметра*, *оценка* которого получается в *результате* обработки данных. Как это ни прискорбно, но истинное значение параметра, *определяемого* по результатам *наблюдений* и экспериментов, получить ***невозможно***. См. также *Абсолютный*.

# К

**Категория** (< *нем.* Kategorie, *франц.* categorie <*греч.* κατηγορα - обвинение < *греч.* κατηγορειν - порицать, упрекать, обвинять.

*М.Фасмер;* (1886-1962). [100]) - (*фил.*) *совокупность* предметов, *явлений*, *субъектов*, имеющая какие-либо общие и существенные *свойства*, признаки, *связи* и *отношения* (материя, время, пространство, движение, *причинность*, *качество*, *количество*, противоречие и т.д.).

Категории образовались в *результате* попыток философов выявить основные *принципы* бытия. Аристотель (Ἀριστοτέλης; 384-322 до Р.Х.) первый обобщил попытки предшествующей философской мысли выделить наиболее общие *понятия* о мире и способах его познания. Составленный им свод категорий включал такие категории, как *сущность* (*субстанция*), количество, *качество*, *отношение*, место, время, положение, *состояние*, действие и страдание. Аристотель утверждал, что категории - наиболее высшие, логические *понятия*, под которые подводятся все остальные понятия, что они, по существу, "высказывания о сущем". Аристотель отрицал изменчивость категорий, он полагал, что категории не только вечны и неизменны, но и не переходят друг в друга, не превращаются во что-нибудь более общее. Кроме этого, классификация Аристотеля была неполная, например, отсутствовали категории содержание и *форма*, *возможность* и *действительность* и др. Классификация Аристотеля оказала определяющее влияние на развитие учения о категориях вплоть до Иммануила Канта.

И.Кант (1724-1804) рассматривал категории как *априорные* формы мышления человека, характеризующие не мир "вещей в себе", а самого человека и *структуру* его мышления. Классификация категорий И.Канта включает в себя: качество (реальность, отрицание, ограничение), количество (единство, *множество*, цельность), отношение (субстанция и свойство, причина и действие, взаимодействие), модальность (возможность и *невозможность*, действительность и недействительность, *необходимость* и *случайность*).

Новый подход к *диалектике* категорий выдвинул Г.Гегель (*Hegel Georg Wilhelm Friedrich;* 1770-1831). В основе его классификации идея о взаимосвязях и взаимопереходах категорий: бытие (качество, количество, *мера*), сущность (основание, явление, действительность. Действительность включает субстанцию, причину и взаимодействие), понятие (*субъект*, *абсолютная идея*, *объект*). Диалектический материализм рассматривает категории как результат обобщения *опыта* исторического развития познания и общественной практики.

Развитие науки и техники сопровождается трансформацией категорий, понятий и *терминов* (например, *информация*, *симметрия* из терминов превратились в категории). На основе результатов развития отдельных наук *система* категорий обобщает историю развития наук и способствует прогрессу познания мира. Современный этап развития науки характеризуется как появлением новых категорий в конкретных науках, так и превращением некоторых понятий в категории. Последнее наблюдается с теми понятиями, которые приобретают общенаучный характер (например, информация, саморегуляция, симметрия).

В этом издании предельно кратко описаны только некоторые категории, имеющие прямое или косвенное отношение к *статистическим методам анализа*. При желании, в философской литературе можно найти более подробные описания категорий времён античности, средних веков, XIX и XX в.

См. статьи *Бесконечность, Возможность, Действительность, Истина, Качество, Количество, Конечное, Мера, Необходимость и случайность, Отношение, Причинность, Симметрия, Сущность, Явление.*

См. также *БЕЗКОНЕЧНЫЙ, Величина, Выборка, Константа, Математическое ожидание, Множество, ОБОЗНАЧАТЬ, Определение, ОПРЕДЕЛЯТЬ, Оценка, Переменная, Совокупность, Состояние, Состоять, Среднее, среднее значение, Суждение, Функция.*

"**Качество** ср. свойство или принадлежность, все, что составляетъ сущность лица или вещи. *Количество* означает счот, весъ и меру, на вопрос *сколько*; *качество*, на вопрос какой, поясняетъ доброту, цветъ и другіе свойства предмета. || Народъ понимаетъ *качество человека* въ дурномъ знач. *За нимъ, кажись, никакихъ качествъ нетъ.* **Качественный**, к качеству отнсщ. [См. какъ]." (*В.И.Даль*; 1801-1872) [83].

"Не забывайте о качестве. Гроб, например, должен быть сделан так, чтобы его хватило на всю жизнь." (*Курт Тухольский*; 1890-1935).

**Качество** (*лат.* qualitas - качество, свойство, характер, природа) - философская *категория*, выражающая *совокупность свойств*, указывающих на то, что собой представляет данный *объект*. От *состояния* качество отличается тем, что последнее *обозначает* прочное, а первое изменчивое *определение сущности*; состояние может изменяться (например, агрегатные состояния вещества), причём содержание остаётся тем же, состояние более или менее *случайное* свойство *объекта*, между тем как качество - существенное его определение.

Впервые категория "качество" была *проанализирована* Аристотелем (Ἀριστοτέλης; 384-322 до Р.Х.), определявшим её как видовое отличие *сущности*. Аристотель отмечал текучесть качеств как состояний вещей, их способность превращаться в противоположное. Р. Декарт (*Descartes Rene*; 1596-1650) и Д. Локк (*J. Locke*; 1632-1704) "ввели различение качества на первичные и вторичные: первичные принадлежат самим вещам, каковы *величина*, *форма*, движение, а вторичные - цвета, тоны, запахи и т.п. - *субъективны* и обусловливаются свойствами воспринимающего впечатления от вещей лица, его телесной и духовной организации...". Г. Гегель (*Hegel Georg Wilhelm Friedrich*; 1770-1831) определил качество как логическую категорию, составляющую *начальную* ступень познания вещей и становления мира, как непосредственную характеристику бытия объекта. Позже, в XIX веке, наука (в частности, физиология органов чувств и философия признали субъективными качествами многое такое, что прежде приписывалось самим объектам; качественные различия были возведены к *количественным*, например, различение цветов и звуков. Чисто же качественные различия не могут быть сведены к чему-либо третьему.

Качество выражает неотделимую от бытия объекта его существенную определённость, ограничивающую данный объект от всех других объектов и с исчезновением которой объект перестаёт существовать как данный объект. Исчезновение качества влечёт за собой коренное изменение данного объекта. Именно благодаря качеству каждый объект существует и мыслится как нечто ограниченное от других объектов. С другой стороны, качество характеризует и то общее, что свойственно классу однородных объектов.

Качество объекта обнаруживается в совокупности его свойств. При этом объект не состоит из свойств, а обладает ими, - "...существуют не качества, а только вещи, обладающие качествами, и притом бесконечно многими качествами" (*Ф. Энгельс*; (*F. Engels*; 1820-1895)). Под свойством *понимается* способ проявления определённой стороны качества объекта по *отношению* к другим объектам, с которыми данный объект вступает во взаимодействие. Категория качества объекта не сводится к отдельным его свойствам. Она выражает целостную характеристику *функционального* единства существенных свойств объекта, его внутренней и внешней определённости, относительной устойчивости, его отличия от других объектов или сходства с ними.

Категория "качество" выражает определённую ступень познания человеком (исследователем) объектов, *процессов* и *явлений*. На *начальном* этапе познания объект исследования выступает прежде всего каким-либо отдельным свойством или рядом свойств. В непосредственно чувственном восприятии качество выступает как некоторое *множество* свойств. Другими словами, вначале возникают ощущения, впечатления, на основе которых формируются *понятия*, качества (определения объекта, процесса, явления) и, наконец, *количества*. Познание идёт от качества к количеству и далее к их единству - *мере*. Любой объект, процесс, явление представляет собой единство качества и количества.

См. также *Отношение*.

**Квадратичное отклонение**, квадратичное уклонение - *мера* отклонения (разброса, рассеяния) *случайной величины* $X$ от *оценки математического ожидания* $M_x$. Другими словами, квадратичное отклонение характеризует *вариацию* признака относительно *среднего значения выборки - параметра*, определяемого *сущностью* задачи и *концепцией* исследователя.

В общем случае, квадратичное отклонение *величин* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ от $m_x$ - выражение:

$$s_x = \pm\sqrt{\frac{(x_1-m_x)^2 + (x_2-m_x)^2 + \ldots + (x_n-m_x)^2}{n}}, \qquad (1.75)$$

где $m_x$ - оценка математического ожидания $M_x$ или значение какого-либо параметра *распределения*, определяемого сущностью задачи и *концепцией* исследователя.

Минимальное значение квадратичное отклонение имеет при $m_x = x_{ср}$, где $x_{ср}$ - *среднее арифметическое* величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$x_{ср} = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}. \qquad (1.76)$$

В общем случае анализа несимметричных распределений в качестве оценки $m_x$ неизвестного математического ожидания $M_x$ могут быть использованы *медиана*, *мода*, *начальный* момент первого порядка, *арифметическое среднее*, *арифметическое взвешенное среднее*, *взвешенное степенное среднее*, *гармоническое среднее*, *геометрическое среднее*, *среднее квадратичное*, *среднее кубическое*, *арифметико-геометрическое среднее* и др. параметры, определяемые сущностью задачи и концепцией исследователя. Дисперсия будет определяться выражением:

$$s^2_x = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2, \qquad (1.77)$$

где $m_x$ - оценка математического ожидания $M_x$, а $s^2{}_x$ - оценка *генеральной дисперсии* $\sigma^2{}_x$, или, точнее, выборочная дисперсия.

Употребляется также более общее *понятие взвешенного* квадратичного отклонения, *определяемого* как выражение:

$$s_x=\pm\sqrt{\frac{W_1(x_1-m_x)^2 + W_2(x_2-m_x)^2 +\ldots+ W_n(x_n-m_x)^2}{W_1 + W_2 +\ldots+ W_n}}; \qquad (1.78)$$

числа $W_1$, $W_2$,..., $W_n$ называют при этом *весами*, соответствующими величинам $x_1$, $x_2$,..., $x_n$. Взвешенное квадратичное отклонение достигает наименьшего значения при $m_x$, равном взвешенному среднему. Такое представление о квадратичном отклонении соответствует использованию квадратичного отклонения в *теории ошибок* и в экспериментальных исследованиях.

В *вероятностей теории* квадратичное отклонение $\sigma_x$ *случайной* величины $X$ (от её *математического ожидания*) определяют как квадратный корень из *дисперсии* $\sqrt{DX}$ и в англо-американской литературе называют *стандартным отклонением величины* $X$ или просто *стандартом*. Для любой случайной величины $X$ с математическим ожиданием $M_x$ и стандартным отклонением $\sigma_x$ *вероятность* отклонений $X$ от $M_x$, больших по *абсолютной* величине $k\sigma_x$, $k>0$, не превосходит $1/k^2$. В случае *нормального распределения* указанная вероятность при $k=1$ равна 0,3174, при $k=2$ равна 0,0456 и при $k=3$ равна 0,0027. В практических задачах, приводящих к нормальному распределению, отклонения больше, чем утроенный стандарт (квадратичное отклонение) практически *невозможны*, или, другими словами, на практике пренебрегают возможностью отклонений от среднего, больших $3\sigma_x$ (*Трёх сигма правило*).

В *статистике математической* квадратичное отклонение употребляют как *меру качества* статистических *оценок* и называют в этом случае *квадратичной погрешностью* (*ошибкой*). Одним из частных определений *закона больших чисел* является тот факт, что квадратичное отклонение стремится к нулю с ростом $n$ и при фиксированном $n$ оно не превосходит $1/2\sqrt{n}$. См. *Среднее, среднее значение*. См. также раздел 2.5.

**Квадратичное среднее** см. *Концепция, Середа, Среднее, среднее значение*.

**Квантиль** (< *лат.* quantum - сколько; quantillus - что за (какой же) маленький; quantitas - количество, величина, размеры; quantulus

- насколько (же) маленький, какой ничтожный) - одна из *числовых* характеристик *распределения вероятностей*. Если *функция распределения* $F(x)$ *случайной величины* $X$ *непрерывна* и строго монотонна, то для любого $p$, $0<p<1$, *квантиль* порядка $p$ распределения случайной величины $X$ *определяется* как корень $K_p$ *уравнения* $F(K_p)=p$ или, иначе, как значение (при данном $p$) функции $F^{-1}(p)$, обратной к $F(x)$. Из определения следует, что при $p<p'$ вероятность $P(K_p<X<K_{p'})$ равна $p'-p$. Квантиль $K_{1/2}$ есть *медиана* $X$; квантили $K_{1/4}$ и $K_{3/4}$ называются *квартилями*, соответственно, нижней и верхней. Знание квантиля для некоторого *множества* значений $p$ даёт представление о расположении и рассеянии значений случайной величины и, в частности, о виде функции распределения.

**Квартиль** - частный случай *квантиля*.

**Кодирование переменных** см. раздел 2.7.

"**Количеством** называется то, что делимо на составные части, каждая из которых, будет ли их две или больше, есть по природе что-то одно и определённое нечто. Всякое количество есть множество, если оно счислимо, а величина - если измеримо" (*Аристотель*, ('Αριστοτέλης; 384-322 до Р.Х.), Met. V 13, 1020 a 7-10; рус. пер., Соч., т.1, М., 1975). См. также *Мера*.

"**Количество** (< коли', коль "если", *укр.* коли' "когда. если", *блр.* колі "когда", *ст.-слав.* **коль**..., *словен.* koli "насколько, сколько"... *М.Фасмер*; (1886-1962). [100]) - "**КОЛИ** нар. когда, въ какую пору, въ какое время. (...) ***Количество*** ср. мера чего либо, счетомъ, весомъ, по величине или объёму. (...) *Количество* противополагается *качеству*, степени доброты, хотя оба понятія эти взаимно несоизмеримы. ***Количественный***, к количеству относящийся. (...)" (*В.И.Даль*; 1801-1872) [83].

См. также *Величины соизмеримые и несоизмеримые, Измерение, Мера*.

**Количество** - философская *категория*, формализующая общее и единое в предметах и *явлениях*, *объективная определённость* предмета и *явления*, в силу которой их можно разделить на однородные части. Количество предмета или явления - это то, что может быть *измерено*, а также увеличено или уменьшено. Так *число*, время, протяжённость в пространстве и т.п. - суть количества. В *математике* количества *обозначаются* символами и классифицируются на известные и неизвестные, числа действительные и мнимые, постоянные и *переменные*, числа рациональные и иррациональные, числа простые, натуральные, *транс-*

*цендентные* и др. Количество - это такая определённость предметов, явлений, *процессов* материального и духовного мира, изменения которых до определённого *момента* (см. *Мера*) не вызывает коренных, *качественных* изменений, а лишь подготавливает их.

Количество как проблему первыми формализовали пифагорейцы в *связи* с изучением природы чисел и их использованием в процессе познания мира. Аристотель (Ἀριστοτέλης; 384-322 до Р.Х.) выделил "количество" в особую категорию (см. выше). Категория "количество" получила развитие в трудах Р.Декарта (*Descartes Rene*; 1596-1650), И.Ньютона (*Newton Isaac*; 1643-1727) и Г.Лейбница (*Leibniz Gottfried Wilhelm*; 1646-1716) в связи с исследованиями движения и введением переменных величин в *математику*, в *результате* которых "количество" стало включать в себя не только постоянные величины, но и переменные, а также *отношения* порядка и сравнения. Г.Гегель (*Hegel Georg Wilhelm Friedrich*; 1770-1831) впервые выявил *диалектическую* взаимосвязь категорий количества и качества: если при изменении качества происходит превращение данной вещи в другую вещь, то количественное изменение в известных границах не вызывает подобного превращения.

Познание реальности начинается с познания качественных характеристик предмета и явления. Количественная определённость предмета и явления производится путём сравнения пространственных характеристик, *динамических* составляющих и др. с единицами измерения *физических* величин. Сложность явления в значительной *степени* определяется возможностью использования количественных *методов* при его изучении. Например, социальные процессы, культурные явления.

"Количество находится в единстве с качественной определённостью явлений, вещей, процессов; это единство составляет их меру. Изменение количественной определённости предметов и явлений в границах меры не затрагивает их качества. За этими пределами количественные изменения сопровождаются изменениями качества." [101].

См. также *Мера, Отношение*.

**Комплекс** (*англ.* complex - комплекс < *лат.* complexus - объятие; сочетание; связь, от complecti (complectere) - обхватывать; содержать в себе, от com- (из con-) - с- (со-), вместе и plectere - плести, сплетать) - 1. *Совокупность*, сочетание *предметов*, *явлений*, действий, свойств. 2. Болезненная отрицательная *оценка* собственной личности. 3. Одно из основных понятий комбинаторной топологии.

"**КОНЕЦЪ** м. (умал. *конъ*) пределъ въ пространстве, въ протяженiи, во времени, в действiи и пр., противоположное *началу*. Въ пространстве или въ размерахъ предмета, *начало* и *конецъ* одно и то же, потому, что всякiй край, пределъ предмета, условно, может быть принят за *начало* и за *конец* его. || ...*Конечная величина* матемт. всякая цыфра или величина, которую можно выразить числомъ, въ противоположность *безконечно малой* или *великой*. (...)" (*В.И.Даль*; 1801-1872) [82].

См. также *Конечное, Начало, Предел, ПРЕДЕЛЪ, Предельный, Причина, Причинность, ПРИЧИНЯТЬ*.

**Конечное** - философская *категория*, характеризующая всякую *определённость* и ограниченность *объектов* (тел, *процессов, явлений, состояний, свойств* и т.д.). Определённость конечному придаёт его граница. Граница может быть *количественной* и *качественной*. С точки зрения количества граница может быть пространственной и/или временной, например, геометрические размеры объектов, расстояния, длительность протекания процессов и явлений. Примерами качественных границ являются фазовые переходы, границы многофазных *систем*, например, пар-вода-лёд. *Диалектическая* противоречивость конечного заключается в том, что, с одной стороны, конечное обладает самостоятельным, обособленным бытиём, а, с другой стороны, обусловлено окружающими его объектами. Граница и отделяет конечный объект от других и *связывает* его с ними. Достаточно полное представление о конечном даётся знанием присущей ему *меры*, которая предполагает *возможность* выхода за неё, т.е. перехода или превращения его в качественно и/или количественно другое конечное. Рассмотрение изменения конечного, в процессе которого совершается выход за его границу, приводит к идее *бесконечного*. По определению Ф. Энгельса, (1820-1895) познание "заключается в том, что мы выходим и констатируем бесконечное в конечном, вечное - в преходящем".

См. также *Конец, Начало, Предел, ПРЕДЕЛЪ*.

**Константа** (*нем.* Konstante - постоянная величина, константа (от konstant - постоянный), *фр.* constante - константа < *лат.* constans, род. п. constantis - постоянный, неизменный, от constare - стоять твёрдо, оставаться неизменным; быть определённым, твёрдым, решённым, от con- - с-, вместе и stare - стоять) - постоянная *величина*. Постоянство величины $x$ записывают $x=const$. Константу обычно *обозначают* буквами *К*, *С* или const. *Термин* "константа" более значителен, фундаментальнее, чем термин *коэффициент*. Например, мировая константа, но не мировой коэффициент. Как правило, константа - *независимая* постоянная величина. Но бывают исключения. Например, константа скорости химической реакции константой, по существу, не является, т.к. зависит от температуры. См. также *Коэффициент*, *Параметр*.

**Концепция** (< *лат.* conceptio - соединение, сумма, совокупность, система; резервуар, хранилище; зачатие, принятие семени; словесное выражение.- *И.Х.Дворецкий*; (1894-1979). [84]) - *система понятий* о *состояниях*, *событиях*, *явлениях* и *процессах* в природе, технологии, обществе и мышлении. Концепция является основополагающей *идеей* какой-либо *теории*; это единый, определяющий замысел, ведущая мысль художника, писателя, учёного, политика и т.д. Как правило, концепции формулируются выдающимися личностями и оказывают влияние на развитие науки, техники и общества в целом. Коротко обсудим только концепции, имеющие непосредственное отношение к технологическим процессам и к *статистическим методам обработки данных*.

### концепция времени

В процессе развития цивилизации время претерпело несколько концепций. В теологии время рассматривалось как преходящая и *конечная форма* проявления вечности, присущей Богу или абсолютному духу. В *субъективно-идеалистических* концепциях время толковалось как форма упорядочения комплексов ощущений, как априорная форма чувственного созерцания, как форма субъективного существования человека, исчезающая вместе со смертью личного "Я".

В естествознании и натурфилософии XVII-XIX веков различалось *абсолютное* время как внешнее условие бытия и *относительное* время, выражающее длительность конкретных состояний и процессов.

В соответствии с современной концепцией время проявляется как всеобщая и всегда сохраняющаяся форма бытия материи на всех её *структурных* уровнях. Время одномерно, *асимметрично* и необратимо, все изменения в мире происходят от прошлого к будущему. <u>Время не явление и не процесс</u>. Однонаправленность времени обусловлена асимметрией *причинно-следственных связей*, общей необратимостью процесса развития материальных *систем*. Специфическим *свойством* времени является длительность, характеризующая последовательность существования и смены состояний систем, и *гомохронность* (секунда практически не изменилась за 5500 лет с времён Древнего Вавилона).

### концепция пространства

Концепция *пространства* рассматривает такие специфические *свойства* пространства, как протяжённость, *связность*, трёхмерность, *симметрия* и асимметрия, концентрацию вещества и поля, наличие и отсутствие границ. Протяжённость тесно связана со *структурностью* материальных систем, она означает рядоположенность и сосуществование различных *элементов*, а также возможность *количественного* изменения состава системы. Связность и *непрерывность* означают отсутствие каких-либо "разрывов" в пространстве, т.е. сплошность *среды*. Трёхмерность является свойством пространства, обнаруживающимся на всех известных структурных уровнях. Известные физические (гидродинамика, массообмен, теплообмен и их сочетания - абсорбция, адсорбция и десорбция, растворение, плавление и кристаллизация, испарение, сублимация и конденсация, сушка, экстрагирование), физико-химические, химические, физиологические процессы и взаимодействия реализуются в пространстве трёх измерений (и во времени). С другой стороны, наука допускает существование миров с большим *числом* измерений.

В современной *математике* и в *математическом моделировании* и оптимизации технологических процессов широко применяются *абстрактные* (концептуальные) многомерные пространства, образуемые путём добавления к трём пространственным координатам координаты времени и других *факторов*, учёт взаимного влияния которых необходим для полного описания процесса. Более того, $(k+1)$-мерное пространство может быть сформировано для $k$ любых факторов и любой целевой *функции*, представляющей интерес в математическом моделировании и оптимизации технологических процессов.

Концепция Г.В.Лейбница (*Leibniz Gottfried Wilhelm*; 1646-1716), трактовавшего пространство и время как определённые типы *отношений* между *объектами* и их изменениями, не имеющими самостоятельного существования, была развита А.Эйнштейном (*A.Einstein*; 1879-1955) в *теорию* относительности, которая раскрыла неразрывную *связь* пространства и времени как единой формы существования материи (*пространство-время*), установила единство пространственно-временной и причинно-следственной структуры мира, обнаружила относительность пространственно-временных характеристик тел и явлений.

## концепция среды

Концепция среды рассматривает пространство, содержащее *множество* однородных или разнородных функционально связанных элементов, находящееся в контакте с другим пространством или *субстанцией*. Среда может быть внешняя и внутренняя, *сплошная* и *дискретная*. Для среды характерно сопротивление производимым в ней извне изменениям - перемещениям элементов, изменениям *количества* и *качества*, нарушению *функционирования*, *структурным* изменениям и т.п. В случае однородных элементов можно говорить о средах: *сплошной*, языковой, интеллектуальной, культурной, криминальной, среде общения и др.; в случае относительно разнородных элементов: о среде обитания, образовательной, операционной (в ЭВМ), производственной, социальной и других средах.

**концепция объективной причинности**

Концепция *объективной причинности* заключается в *постулате*, согласно которому любое явление природы и общества есть следствие той или другой причины, причём одинаковые причины в одних и тех же условиях вызывают одинаковые следствия. Нет явлений, которые не имели бы своих причин, и так же точно нет явлений, которые бы не порождали тех или иных следствий. Последовательность явлений, связанных друг с другом *отношением* внутренней *необходимости*, называют *причинно-следственной* цепью или "цепью причинения". Любая из цепей причинения не имеет ни *начала*, ни *конца*, и любые попытки найти "первопричину" или последнее следствие бесперспективны.

**концепция среднего значения совокупности чисел**

В случае несимметричных *распределений случайных величин* имеется проблема выбора *среднего значения* из множества возможных - *моды*, *медианы*, начального *момента* первого порядка и *средних* (*арифметического*, *арифметического взвешенного*, *взвешенного степенного*, *гармонического*, *геометрического*, *квадратичного*, *кубического*, *арифметико-геометрического*) и др. Проблема выбора решается концепцией среднего значения в *зависимости* от природы *совокупности*.

Проблема выбора среднего значения из множества возможных с большей остротой возникает при статистическом анализе социальных процессов, в статистике народонаселения, производства и потребления и многих других цивилизационных явлениях.

См. также *Причина, Причинность, ПРИЧИНЯТЬ, Связать, СВЯЗЫВАТЬ, Связь, СЛЕДИТЬ, Сущность.*

**Корреляционная таблица** - таблица *экспериментальных данных* или *результатов наблюдений*, подготовленная для построения *графика*, предварительного *анализа* и численной обработки. Пример корреляционной таблицы - см. пример 4.

См. также *Данных обработка математическая, Корреляция, Корреляционное поле, Корреляционный анализ, Корреляции коэффициент.*

**Корреляционное поле** - *система* координат $y$-$x$ с нанесёнными на координатную плоскость двумерных *выборочных* точек. Корреляционное поле, по существу, *график экспериментальной зависимости* $y=f(x)$ (если таковая имеется, например, рис.1.9).

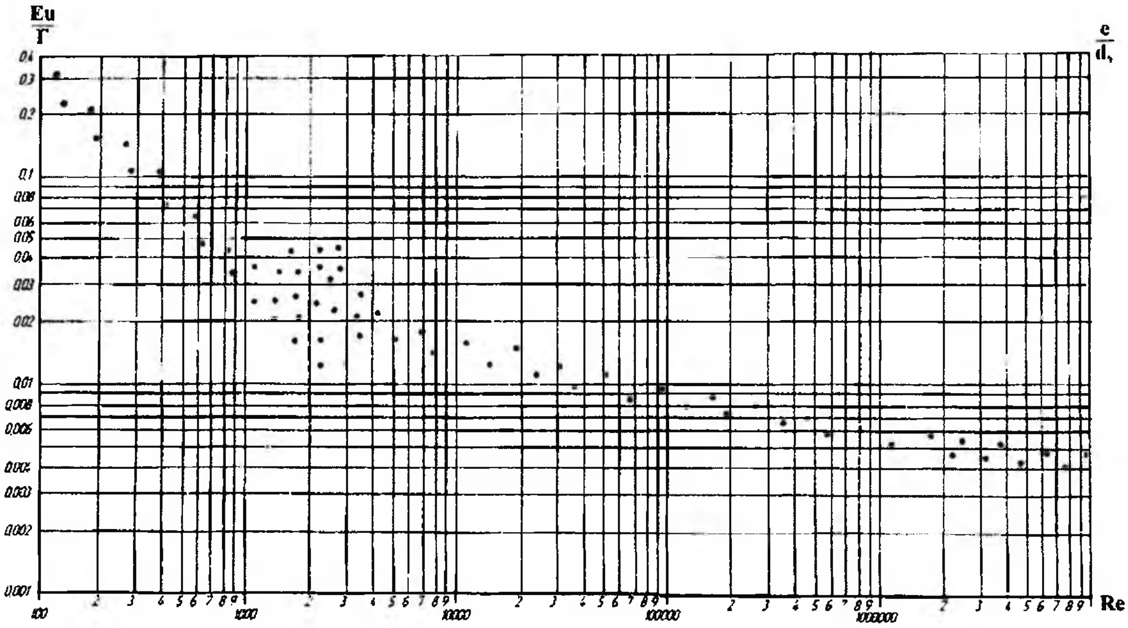



Рис.1.9. Корреляционное поле зависимости критерия Эйлера (точнее, соотношения критериев Eu/Г) от критерия Рейнольдса для гладких труб (реконструкция автора)

По виду расположения точек поля можно сделать предварительное заключение о наличии и *форме* зависимости *случайных величин* $Y$ и $X$. В случае *критериальной* зависимости очевидно, что до значения критерия Re≈2000 (в области ламинарного течения жидкости) и после Re≈3000 имеется отрицательная *линейная корреляция*, т.е. $Eu/Г=f(Re)$, а в области зарождения турбулентных пульсаций корреляция отсутствует (рис. 1.9). *Данные* после визуального *анализа* группируют в виде *корреляционной таблицы* для последующей численной *обработки*.

См. также *Данных обработка математическая, Детерминизм, Корреляционный анализ, Корреляция.*

**Корреляционный анализ** - совокупность основанных на математической *теории корреляции* методов обнаружения *функциональной зависимости* между *случайными величинами* или *признаками*. В отличие от тех статистических методов, предметом которых являются *выборки*, характеризующие один *признак совокупности*, предметом корреляционного анализа являются *выборки*, характеризующие два и более признака. В этой связи корреляционный анализ занимает промежуточное положение между классическими статистическими методами анализа и методами математического моделирования.

Достаточно часто между случайными величинами существует такая *связь*, что с изменением одной величины меняется *распределение* другой. В случае парных зависимостей изменение случайной величины $y$, соответствующее изменению величины $x$, разбивается при этом на две (три) компоненты: функциональную (связанную с зависимостью $y=f(x)$) и случайную (третьей компонентой могут быть влияния неизвестных исследователю факторов или пренебрегаемых им, при этом можно говорить о различных "сечениях" многомерного пространства). Если первая компонента отсутствует, то величины $y$ и $x$ независимы; в случае наличия зависимости $y=f(x)$ большая или меньшая точность *эксперимента* и измерений обусловливают больший или меньший вклад *случайности* в общую картину результатов *наблюдений*, вплоть до затушёвывания следов существующей функциональной зависимости*. *Соотношение* между функциональной и случайной компонентами определяет силу (тесноту) связи. Важнейшим показателем этой связи является *корреляции коэффициент* (1.81), (1.82). Процедура корреляционного анализа включает в себя: (1) построение *корреляционного поля* и построение *корреляционной таблицы*; (2) вычисление *выборочных* коэффициентов корреляции и корреляционных *отношений*; (3) проверку *статистической гипотезы* о *значимости* (силе) связи. При подтверждении корреляционной связи производится регрессионный анализ с целью установления вида функциональной зависимости $y=f(x)$.

См. также *Данных обработка математическая*, *Детерминизм* и раздел 4.

**Корреляция** (<*позднелат.* correlatio - соотношение) - *вероятностная* или *статистическая зависимость* между двумя и более *случайными величинами*. В отличие от *функциональной* зависимости (рис. 1.10, а) корреляция возникает тогда, когда зависимость одного признака (случайной величины $Y$) от другого (от другой случайной величины $X$) осложняется случайными *факторами*. Такого рода зависимости обычно выявляются визуально с помощью *графиков* и последующего регрессионного *анализа*.

Поскольку в природе всё происходит в пространстве и во времени, реально следует говорить о ситуациях, когда случайная величина $Y$ зависит от трёх координат. В случае концептуальных многофакторных пространств случайная величина $Y$ зависит от множества случайных ве-

---

*Примечание 14. Достаточно часты ситуации, когда парная корреляция является грубым приближением и нужно учитывать другие факторы, оказывающие существенное влияние на характер течения жидкости. Например, область зарождения турбулентных пульсаций при возрастании критерия Re, см. рис.1.9.

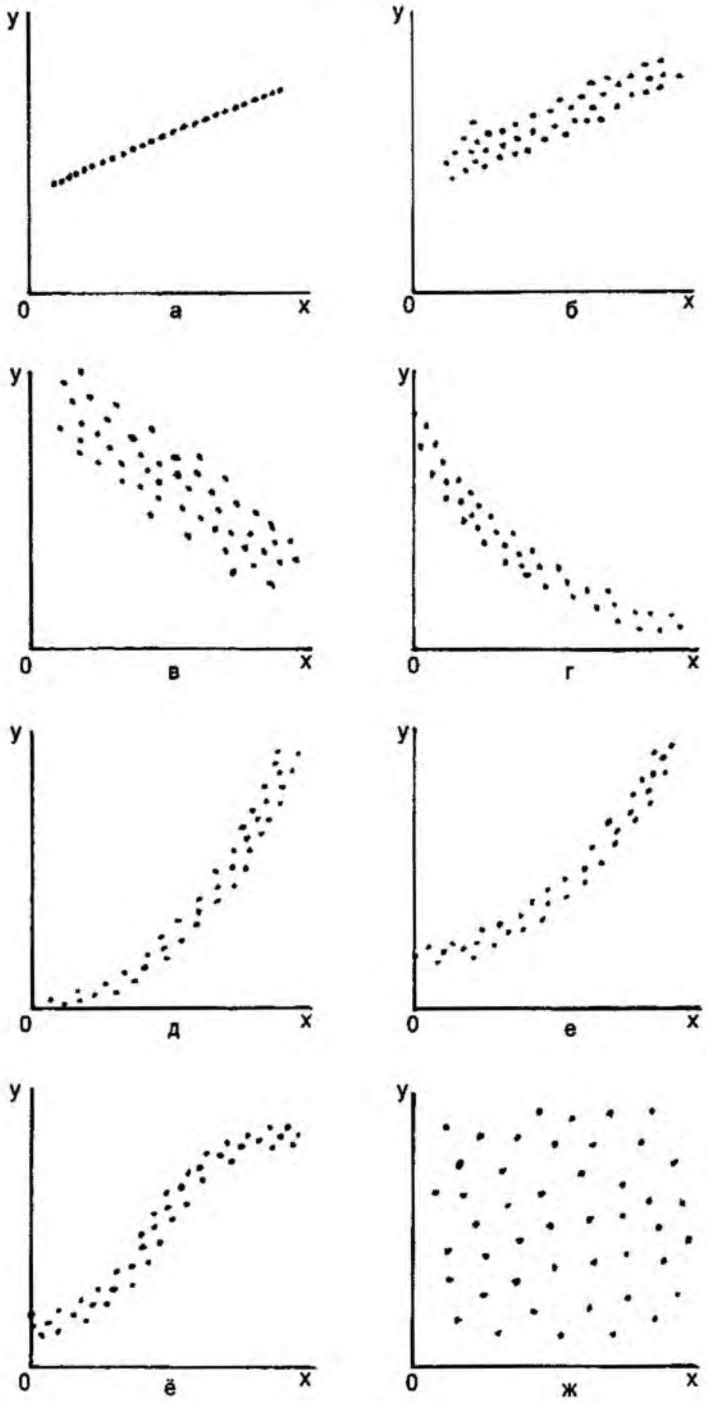



Рис.1.10. Примеры тесноты (силы) связи случайных величин $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$: а - идеальная линейная корреляция; б - положительная линейная корреляция со средним рассеиванием; в - отрицательная линейная корреляция со значительным рассеиванием; г - экспоненциальная или гиперболическая корреляция; д - положительная параболическая корреляция; е - положительная параболическая корреляция со свободным членом; ё - $S$-образная нелинейная корреляция; ж - случай отсутствия корреляции, так называемое "звёздное небо", ($r \approx 0$)

личин $X_1$, $X_2, \ldots$, $X_k$. Бывают и более сложные случаи, когда среди условий, от которых зависят две (три, четыре...) случайные величины, например $Y$ и $Z$, имеются общие для них обеих условия $X_1$, $X_2, \ldots$ $X_k$. При этом корреляционная зависимость не очевидна, многомерное пространство на листе бумаги или экране монитора представить невозможно да и мысленное моделирование проблематично. В таких случаях корреляционную зависимость выявляют с помощью корреляционного анализа. Необходимо отметить, что статистическая зависимость, как бы ни была она сильна, никогда не может установить *причинной связи*: предположения о *причинах* и *следствиях* следует искать вне *статистики*, например, в сфере *физических сущностей явления*.

В основе математической *теории* корреляции лежит предположение о том, что все явления в природе в большей или меньшей *мере* подчинены *определённым вероятностным закономерностям*. Зависимость между двумя случайными *событиями* проявляется в том, что условная вероятность наступления одного из них при наступлении другого отличается от безусловной вероятности. Или, другими словами, влияние одной из них (например $X$) на другую (например $Y$) не вполне конкретно, не жёстко *функционально*, хотя при возрастании случайной величины $X$ другая, $Y$, имеет тенденцию возрастать (рис. 1.10,б, рис. 1.10,д, рис. 1.10,е, рис. 1.10,ё) или убывать (рис. 1.10,в, рис. 1.10,г). Это характеризуется тем, что при каждом фиксированном значении $X$ в *результате наблюдений* получается *множество* значений $Y$, характеризующееся некоторым *распределением вероятностей*. В таких случаях *функция* $y=f(x)$ называется регрессией *величины* $Y$ по $X$, а *график* такой зависимости - линией регрессии $Y$ по $X$. При более близком рассмотрении зависимостей рис. 1.10 для случаев (рис. 1.10,б и рис. 1.10,в) можно предположить линейную корреляцию, для случая (рис.1.10,г) можно предположить гиперболу или обратную экспоненту, для случаев (рис. 1.10,д и рис. 1.10,е) - параболу. Рис. 1.10,ё является достаточно определённой $S$-образной зависимостью.

Зависимость, представленную на рис. 1.10,а *экспериментируя* получить *невозможно*, это результат расчёта ($r\approx1$), а в рис. 1.10,ж налицо отсутствие корреляции ($r\approx0$), так называемое "звёзное небо" (см. также пример 6 и рис. 4.2).

Иногда полезно иметь в виду, что собственно парных зависимостей не так уж и много. В природе всё происходит в пространстве и во времени, т.е. в четырёх измерениях. Все фундаментальные математические уравнения переноса количества движения, теплоты и массы, полученные около 100-140 лет назад - уравнения в частных производных, в большинстве случаев неразрешимые для конкретных аппаратов и условий. Их упрощали. Рассматривали только стационарные процессы, пренебрегали изменениями функции ещё по двум осям и приходили к парным зависимостям. Например, вида $y=-k\cdot \mathrm{grad}x$: *закон* фильтрации А.Дарси $w=-k\cdot(dp/dl)$, закон вязкого трения И.Ньютона $б_t=-\mu\cdot(dw/dl)$, диссипация в потоке жидкости $\varepsilon_{дv}=-б_t\cdot(dw/dl)$, закон плотности тока Г.Ома $\delta=-g\cdot(dU/dl)$, закон диффузии А.Фика $g_1=-D_1\cdot(dc_1/dl)$, закон теплопроводности Ж.Фурье $q=-\lambda\cdot(dT/dl)$. Это, и другие, простые линейные модели в своё время сыграли важную роль в развитии науки о переносе субстанции. По существу, это "сечения" реальных многомерных моделей в частных производных. Подобный приём обработки данных применяется и поныне.

См. также *Данных обработка математическая, Детерминизм, Корреляционная таблица, Корреляционное поле, Корреляционный анализ, Коэффициент корреляции.*

**Коши распределение** - *непрерывное распределение вероятностей* с *плотностью вероятностей*:

$$p(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\lambda}{\lambda^2+(x-\mu)^2}, \qquad -\infty<x<\infty, \tag{1.79}$$

и *функцией распределения*:

$$F(x) = \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-\mu}{\lambda}, \tag{1.80}$$

где $-\infty<\mu<\infty$ и $\lambda>0$ - *параметры*. Распределение Коши одновершинно и *симметрично* относительно точки $x=\mu$, являющейся *модой* и *медианой* этого распределения вероятностей (рис. 1.11).

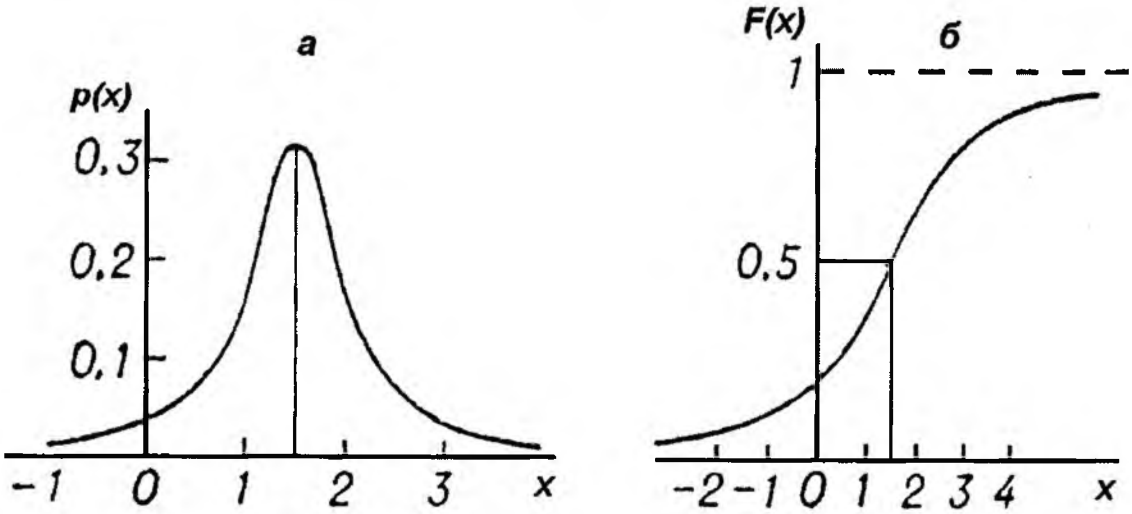



Рис.1.11. Распределение Коши:
а - плотность вероятности; б - функция распределения
(площадь под кривой плотности вероятностей равна 1)

Ни один из *моментов* порядка $\beta>0$, в том числе и математическое ожидание, не существуют. Также, как и *нормальное распределение*, распределение Коши принадлежит к классу устойчивых распределений.

Так, сумма *независимых случайных величин*, имеющих распределение Коши, в свою очередь имеет распределение Коши; *арифметическое среднее* случайных величин, имеющих распределение Коши, снова распределение Коши. Распределение Коши подчиняются *линейным* преобразованиям, а именно, если случайная величина $X$ имеет распределение Коши с *параметрами* $\lambda$ и $\mu$, то случайная величина $Y=b_0+b_1X$ также имеет распределение Коши с параметрами $\lambda'=|b_1|\lambda$ и $\mu'=b_0+b_1\mu$. Распределение Коши с параметрами $\lambda=1$ и $\mu=0$ есть *t-распределение Стьюдента* со *степеней свободы числом* $\nu$, равным 1. Распределение Коши было рассмотрено около 1830 г. С.Пуассоном (*Poisson Simeon Denis*; 1781-1840) и в 1853 г. О.Коши (*Cauchy Augustin Louis*; 1789-1857).

**Коэффициент** (<*лат.* co (cum) - совместно и efficiens (efficientis) - производящий, выполняющий) - *числовой* множитель при буквенном выражении, известный множитель при той или иной *степени* неизвестного или постоянный множитель при *переменной величине*, множитель, обычно выражаемый цифрами. Если произведение содержит одну или несколько переменных (или неизвестных) *величин*, то произведение всех постоянных, в т.ч. и выраженных буквами, также называется коэффициентом. Многие коэффициенты имеют особые названия, например, коэффициент трения, коэффициент теплопроводности, коэффициент гидравлического сопротивления т.д.. См. также *Константа, Параметр.*

**Коэффициент корреляции** - *количественная* характеристика силы или тесноты *связи* между *случайными величинами*. Например, характеристикой связи случайных величин $X$ и $Y$ является *безразмерный коэффициент* корреляции, $\rho_{xy}$:

$$\rho_{xy} = \frac{\mathbf{E}[(X-M_x)(Y-M_y)]}{б_x б_y}, \tag{1.81}$$

где $б_x$ и $б_y$ - *генеральные квадратичные отклонения* случайных величин $X$ и $Y$; $\mathbf{E}$ - *математическое ожидание*. Коэффициент корреляции характеризует не всякую *зависимость*, а только *линейную*. Линейная *вероятностная* зависимость случайных величин заключается в том, что при возрастании одной случайной величины другая имеет тенденцию возрастать или убывать с некоторым постоянным коэффициентом *пропорциональности*, т.е. по линейному *закону*. Коэффициент корреляции характеризует *степень* тесноты линейной зависимости. Если случайные величины $X$ и $Y$ связаны точной линейной *функциональной* зависимостью $y=b_0+b_1x$, то $\rho_{xy}=\pm1$, причём знак соответствует знаку коэффицента $b_1$

(рис. 1.10,а). В общем случае, когда величины $X$ и $Y$ связаны произвольной вероятностной зависимостью, коэффициент корреляции может иметь значение в пределах $-1<\rho_{xy}<+1$. При $\rho_{xy}>0$ существует положительная корреляционная связь между величинами $X$ и $Y$ (рис. 1.10,б), при $\rho_{xy}<0$ - отрицательная (рис. 1.10,в). Для *независимых* случайных величин $\rho_{xy}=0$ (рис. 1.10,ж).

Подобно *математическому ожиданию* случайной *физической* величины, которое невозможно определить в *результате эксперимента*, коэффициент корреляции, $\rho_{xy}$, также является некоторой *абстрактной* величиной; отчасти по этой причине его называют *генеральным*. Реальный, *выборочный* коэффициент корреляции, $r_{xy}$, определяется по результатам эксперимента, только при этом используются выборочные *средние* $x_{ср}$ и $y_{ср}$ и выборочные *дисперсии* $s^2{}_x$ и $s^2{}_y$:

$$r_{xy}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{(n-1)s_x s_y}=$$

$$=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_i y_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\sum_{i=1}^{n}y_i}{\sqrt{\left[n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right]\cdot\left[n\sum_{i=1}^{n}y_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2\right]}}. \qquad (1.82)$$

*Степеней свободы число* $\nu$ для найденного таким путём коэффициента корреляции $r_{xy}$ равно $\nu=n-2$, поскольку вычисление $x_{ср}$ и $y_{ср}$ соответствует наложению на выборку двух связей. Далее необходимо проверить, значимо ли отличается от нуля выборочный коэффициент корреляции $r_{xy}$. *Нулевая гипотеза* предполагает, что две *переменные* независимы и любое ненулевое значение $r$ возникло из-за случайных *флуктуаций*, т.е. $H_0:\rho_{xy}=0$. Альтернативной гипотезой будет $H_1:\rho_{xy}\neq 0$. *Опытный Стьюдента критерий* вычисляется по *формуле*:

$$t^{оп}=\frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}. \qquad (1.83)$$

Опытный критерий Стьюдента сравнивается с табличным для числа степеней свободы $\nu=n-2$ и принятого *уровня значимости* $\alpha$.

См. *Статистических гипотез проверка.*

Коэффициент корреляции одинаково отмечает и слишком большую долю случайности (большие *ошибки наблюдений*), и значительную *криволинейность* этой связи. В таких случаях в той или иной степени $-1<r_{xy}<1$ всегда. Между *величинами* $X$ и $Y$ может быть достаточно определённая нелинейная функциональная зависимость, а коэффициент корреляции будет меньше единицы (в таких случаях можно произвести преобразование *факторного* пространства с целью нахождения *системы* координат, в которой линеаризуется исходная экспериментальная зависимость). И наоборот, между величинами $X$ и $Y$ может явно отсутствовать какая-либо зависимость, а выборочный коэффициент корреляции будет отличаться от нуля.

Необходимо отметить, что *статистическая* зависимость, как бы ни была она сильна, никогда не может установить *причинной* связи: наши идеи о причине должны приходить извне *математической статистики*, в *конечном* счёте из некоторой другой *теории*. Например, очевидна связь между количеством выпавших дождей и величиной урожая - дожди влияют на урожай и, совершенно определённо, урожай не воздействует на дожди. Но нет никаких ***статистических*** *причин* для отказа от идеи зависимости дождей от урожая: отказ сделан на основе совершенно других соображений. И даже если бы дожди и урожай были в полном функциональном соответствии, то всё равно нет оснований для *обращения* этой очевидной причинной связи.

См. также *Данных обработка математическая, Корреляция, Параметр.*

"Кривая - это прямая, отредактированная жизнью." (*Аркадий Давидович*; р. 12.06.1930).

**Кривая** - (*мат.*) обычно *линия* вообще, не исключая и частного случая - *прямой*. См. также *КРИВОЙ*.

**Кривизна** - (*мат.*) *величина*, характеризующая отклонение *кривой* (поверхности) от *прямой* (плоскости). *Степень* кривизны можно охарактеризовать с помощью так называемой *средней* кривизны $k_{ср}=\alpha/\Delta l$, где $\alpha$ - *величина* угла между касательными в двух точках $a$ и $b$, а $\Delta l$ - длина дуги $ab$. См. также *Кривой*.

"**Кривой**, непрямолинейный, идущій не по прямой черте. ***Косой***, уклонившийся отъ уровня или отвеса; ***кривой***, уклонившійся отъ прямой черты, гнутый, лучковый, луковатый, излучистый. (...) || **Кривина**, **кривизна** ж. свойство, состояніе кривого, кривость на деле; погибъ, лука, дуга. (...) **Кривота**, ж. кривизна, кривда, криводушіе, какъ свойство, состоянiе кривого, одноглазаго. (...)" (*В.И.Даль*; 1801-1872) [83].

"Критерий - способ интерпретации реальности, адекватный нашим задачам в ней." (*Александр Круглов*; р. 1954).

**Критерий** (<*греч.* κριτηριο - критерий, признак, по которому можно судить верно) - *мерило* для *определения* достоверности, соответствия человеческого знания *объективной* реальности, а также признак, на основании которого производятся *оценка*, определение или классификация чего-либо, мерило оценки. Критерии являются частным случаем философской *категории* - *отношения*.

*Статистические* критерии, по существу, являются соотношениями *параметров*, характеризующих те или иные *свойства совокупностей*. В *математической статистике* различают *опытные* и табличные критерии, которые собственно и сравнивают при проверке *статистических гипотез*. Главной особенностью табличных критериев является из *независимость* - табличные критерии вычисляются независимым от эксперимента путём. В большинстве случаев статистические критерии являются *предельными* соотношениями параметров при принятии или отклонении статистической гипотезы.

Например, *Стьюдента критерий* является соотношением параметра и его квадратичного отклонения, опытный *Фишера критерий* характеризует соотношение *дисперсий*, а его табличный аналог характеризует предельное соотношение однородных дисперсий и т.д.

Физические критерии характеризуют соотношения сил, действующих в системе (движущейся жидкости или газе), или соотношения потоков массы, энергии, импульса и т.п.

См. также *Правило определения критического значения статистического критерия*.

**Критерий опытный** (*статистика критерия*) - фактическое *соотношение параметров* (параметров, определённых по *выборке*), характеризующих те или иные *свойства совокупности*. Например, *Стьюдента критерий* является соотношением выборочного параметра (в частности, *среднего арифметического*) и его квадратичного отклонения, а его табличный аналог характеризует предельное соотношение параметра и его квадратичного отклонения в соответствии с проверяемой гипотезой. *Фишера критерий* является соотношением двух дисперсий - дисперсий адекватности и воспроизводимости, дисперсии факторной и дисперсии ошибок и т.п.

См. также *Критерий табличный, Правило определения критического значения статистического критерия.*

**Критерий табличный** (*статистический*) - *критическое соотношение параметров*, характеризующих те или иные *гипотетические свойства совокупности*. Главная особенность табличного критерия - *независимость от эксперимента*. В большинстве случаев статистический критерий является *предельным* соотношением параметров при принятии или отклонении статистической *гипотезы*. Например, табличный критерий Фишера характеризует предельное соотношение однородных *дисперсий*, а его опытный аналог характеризует фактическое соотношение дисперсий (соотношение *выборочных* дисперсий).

См. также *Критерий опытный, Правило определения критического значения статистического критерия.*

**Критический** (< *греч.* κριτικοζ - способный разбирать, судить, разбирающий, судящий, критик; κριτικη - искусство разбирать или судить, критика) - 1. Относящийся к критике, содержащий критику, способный к критике. 2. Относящийся к кризису, находящийся в состоянии кризиса, решающий, переломный, опасный.

**Критическое значение** - *численное значение* какого-либо *параметра системы* или *процесса*, при котором происходят *качественные* изменения. Для систем характерно нарушение равновесия системы, например, *явление* изгибания сжатого упругого тела - стержня, пластины, - при превышении некоторого критического значения сжимающей силы, так называемой Эйлеровой силы. Для процессов свойственно резкое изменение каких-либо *параметров*, например, превышение некоторого критического значения *скорости* вращения вала приводит к резкому возрастанию амплитуды вибрации. Превышение некоторого критического значения температуры приводит к таянию льда (плавлению металлов и их солей), к процессу кипения и к исчезновению границы раздела фаз между жидкостью и паром. *Статистические критерии*, по существу, являются *предельными соотношениями* однородных *дисперсий*, *оценок* параметров и их (*квадратичных*) *стандартных отклонений* и др.

См. также *Правило определения критического значения статистического критерия.*

**Кубическое среднее** см. *Концепция, Середа, Среднее, среднее значение.*

**Кумуляция** (< *позднелат.* cumulatio - скопление, нагромождение < *лат.* cumulo - складывать, сгребать, собирать в кучу, накоплять, усиливать) - накопление, приумножение, усиление, добавление, присоединение, заполнение и т.п. (*И.Х.Дворецкий*; (1894-1979). [84]).

# Л

**Лапласа-Гаусса распределение** см. *Нормальное распределение.*

**Лапласа интеграл** - интеграл:

$$L(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-z^2} dz, \qquad (1.84)$$

связанный с *функцией стандартизованного нормального распределения* (2.24) *формулой* $L(z)=2\Phi(\sqrt{2}z)-1$. Интеграл Лапласа - приближённое значение (при больших $n$) *вероятности* того, что *число* "успехов" в $n$ *Бернулли испытаниях* с вероятностями "успеха" $\mathbf{p}$ и "неудачи" $q=1-\mathbf{p}$ будет заключено в *интервале* $n\mathbf{p}-z\sqrt{2n\mathbf{p}(1-\mathbf{p})}$ и $n\mathbf{p}+z\sqrt{2n\mathbf{p}(1-\mathbf{p})}$ (так называемая предельная формула Лапласа). Однако *соотношение*, где нормальное распределение появляется как предельная *форма биномиального* с $\mathbf{p}={}^1/_2$, было найдено в 1733 г. А.Муавром (*Moivre Abraham de*; 1667-1754).

**Лапласа распределение**, *двустороннее показательное распределение, двойное экспоненциальное распределение* - *непрерывное распределение вероятностей* с *плотностью*:

$$p(x)=\frac{\lambda}{2}\cdot\exp(-\lambda|x-\alpha|), \qquad -\infty<x<+\infty, \qquad (1.85)$$

где $\alpha$ - *параметр* сдвига, $-\infty<\alpha<+\infty$, $\lambda$ - масштабный параметр, $\lambda>0$. Плотность распределения Лапласа *симметрична* относительно точки $x=\alpha$ (рис. 1.12), *производная* плотности имеет разрыв при $x=\alpha$.

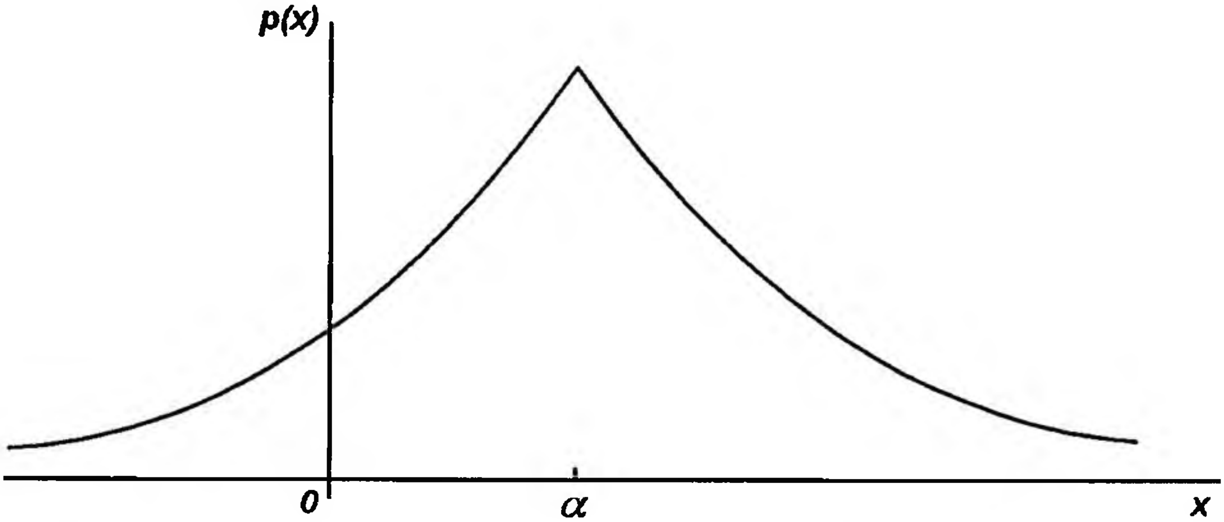



Рис.1.12. Плотность распределения Лапласа
(площадь под кривой плотности вероятностей равна 1)

Распределение Лапласа имеет *конечные моменты* любого порядка, в частности, *математическое ожидание* $M_x=\alpha$, *дисперсия* $DX=2/\lambda^2$, *мода* и *медиана* совпадают с $\alpha$; *асимметрии коэффициент* $A_x=0$, эксцесс $E_x=6\lambda-3$.

Распределение Лапласа было впервые введено в 1812 г. П.Лапласом (*Laplace Pierre Simon*; 1749-1827), его часто называют "первым *законом* распределения Лапласа" в отличие от "второго" - *нормального распределения*.

**Лапласа функция** - *функция стандартизованного нормального распределения*, определяется выражением:

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz = F(z)-F(0)=F(z)-\frac{1}{2}, \qquad (1.86)$$

где $z$ - *стандартизованная случайная величина*, *плотность вероятностей* которой выражается *формулой* (2.21), а *функция распределения* - выражением (2.24).

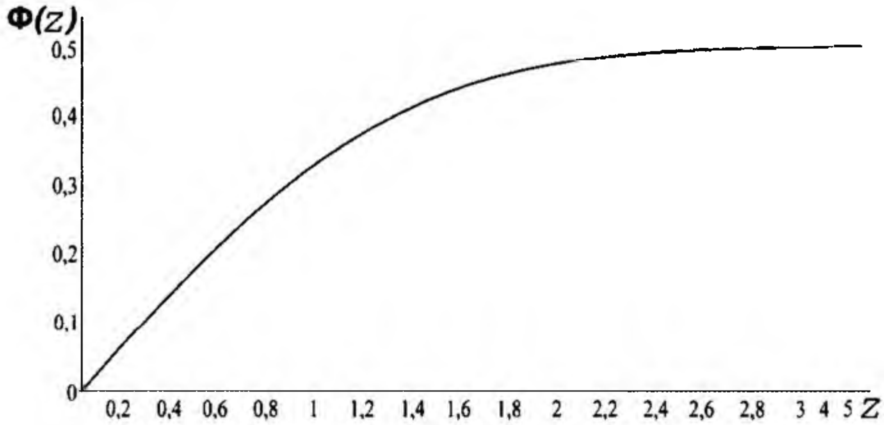


Рис.1.13. Функция Лапласа

Значения функции Лапласа приведены в Приложении 2. С помощью функции Лапласа легко вычислить *вероятность* попадания стандартизованной случайной величины $Z$ в *интервал* $z_1 \div z_2$:

$$P(z_1<Z<z_2) = \Phi(z_2)-\Phi(z_1). \qquad (1.87)$$

Функция Лапласа - нечётная функция, т.е. $\Phi(-z)=-\Phi(z)$.

В общем случае вероятность *наблюдения* случайной величины $X$ в интервале $x_1 \div x_2$:

$$P(x_1<X<x_2) = P\left(\frac{x_1-m_x}{s_x}<Z<\frac{x_2-m_x}{s_x}\right) = \Phi\left(\frac{x_2-m_x}{s_x}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-m_x}{s_x}\right), \qquad (1.88)$$

где $P(x_1<X<x_2)$ - доля от единицы [2]. Сравните с (2.5).

При проверке *статистических гипотез* практический интерес представляют *критические* значения стандартизованной случайной величины $z^{\alpha}$, которые определяют для принимаемого *уровня значимости* $\alpha$, руководствуясь *правилом*:

$$P\left(z > z^{\alpha}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z^{\alpha}}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = \alpha, \qquad (1.89)$$

где $\alpha$ - площадь под *кривой* стандартизованной *плотности вероятностей* $p(z)$, характеризующая *вероятность ошибочно* отвергнуть верную *нулевую гипотезу* (рис. 2.29). См. также уравнения (1.180) - (1.183). Табулированные значения $z$ при различных уровнях значимости $\alpha$ приведены в Приложении 4.

**Линеаризация** (*лат.* linearis - состоящий из линий, штриховой, линейный) - *математическая* аппроксимация на относительно коротком *интервале* сложной *функциональной зависимости* простейшей зависимостью, задаваемой *линейными функциями*.

См. также *Линейный, ЛИНІЯ, Линия,*

**Линейный** (*лат.* linearis - состоящий из линий, штриховой; линейный, геометрический) - (*мат.*) *относящийся* к *линии*, имеющий вид линии; относящийся к первой *степени* (например, линейное *уравнение*, линейная *функция*), простейший вид *функциональной зависимости*; линейное преобразование пространства; линейная алгебра; линейные системы. Линейный - к линии относящийся.

См. также *Линеаризация, ЛИНІЯ, Линия,*

"**ЛИНІЯ** ж. черта; порядокъ, строй или рядъ; направленіе. *Линія прямая*, кратчайшее соединеніе двухъ точекъ; она бываетъ *уровнем, отвесная, косвеная: - кривая*, лучковая, гнутая, дуга. (...) || Как мера протяженія, *линия* двенадцатая часть дюйма. (...) ***Линейный***, къ линіи относящійся. *Линейная мера*, служащая для измеренія длины, ширины, вышины: верста, сажень, аршинъ, футъ ипр. (...)" (*В.И.Даль*; 1801-1872) [82].

См. также *Линеаризация, Линейный, Мера.*

"Линия - длина без ширины." (*Неизв.*)

**Линия** (*лат.* linea - льняная нить, нитка; отвес; линия, черта; граница, *предел*) - (*мат.*) общая часть двух пересекающихся поверхностей, черта на поверхности; черта, *определяющая* направление, *пре-*

*дел*, уровень чего-либо; единица длины в русской системе мер, отменённой в 1918 г., равная 1/10 дюйма (ещё раньше - 1/12 дюйма).

См. также *Линеаризация, Линейный, ЛИНІЯ.*

**Логарифм** *числа N* по основанию $a \neq 1$ (< *греч.* **λογοζ** - слово [сказанное, не грамматическое], условие, учение, дело, счёт (число), соотношение, пропорция, разум, причина, мнение, понятие, смысл; **αριθμοζ** - число, количество; мера или протяжение; счёт, счисление; счёт [как искусство или наука]; количество [как противоположность качеству]. *А.Д.Вейсман*; (1834-1913). [80]. См.также ...*Логия*) - показатель *степени* $x$, в которую нужно возвести $a$, чтобы получить *число N*. *Обозначение*: $\log_a N=x$. Запись $\log_a N=x$ равнозначна записи $a^x=N$. Из *определения* логарифма вытекает следующее тождество:

$$a^{\log_a x} = N. \tag{1.90}$$

*Термин* "логарифм" предложил Дж.Непер (*John Napier*; 1550-1617) на основе сочетания греческих слов **λογοζ** (здесь - *отношение*) и **αριθμοζ** (число). Дело в том, что в античной *математике* квадрат, куб и т.д. отношения $a/b$ назывались "двойным", "тройным" и т.д. отношением. *Возможно*, по *аналогии* для Дж.Непера словосочетание **λογοζ αριθμοζ** означали "число (кратность) отношения", т.е. "логарифм" у Дж.Непера - вспомогательное число для *измерения* отношения двух чисел.

Открытие логарифма было связано с усовершенствованием астрономических *наблюдений* и усложнением астрономических расчётов. Настоятельная потребность в умножении, делении, возведении в степень и извлечении корня с использованием многозначных чисел явилась *причиной* поиска *методов* замены этих трудоёмких действий простыми - сложением и вычитанием. Авторы первых таблиц логарифмов исходили из *зависимости* между *свойствами геометрической прогрессии* и составленной из показателей степени её членов *арифметической прогрессии*. Частично эти зависимости были подмечены в 3 в. до Р.Х. ещё Архимедом (**'Αρχιμηδηζ**; ок. 287-212 до Р.Х.). Первые таблицы логарифмов с основаниями, близкими к единице, были составлены почти одновременно швейцарцем Й.Бюрги (ок. 1590 г., $a$=1,00001) и шотландцем Дж.Непером ($a$=1-0,0000001). Й.Бюрги (*Burgi Jobst*; 1552-1632) опубликовал "Таблицы арифметической и геометрической прогрессий) в 1620 г.; раньше (в 1614 г.) вышли в свет таблицы Дж.Непера.

Основные свойства логарифмов: (1) логарифм произведения равен сумме логарифмов сомножителей: $\log(xy)=\log(x)+\log(y)$; (2) логарифм частного равен разности логарифмов делимого и делителя: $\log(x/y)=\log(x)-\log(y)$; (3) логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм её основания: $\log x^y=y\log(x)$; (4) логарифм корня равен частному от деления логарифма подкоренного числа на показатель корня: $\log\sqrt[y]{x}=(\log x)/y$ (здесь и выше подразумевается одинаковое основание $a$). (5) скорость изменения логарифмической функции обратно пропорциональна аргументу, т.е. $(\ln x)'=1/x$.

Некоторые **частные случаи** общих *формул*:

$$\log_a x=\log_b x\cdot\log_a b;\quad \log_a x=\log_b x/\log_b a;\quad \log_a b=1/\log_b a. \quad (1.91)$$

Когда основание $a$ фиксировано, говорят об определённой *системе* логарифмов. Наиболее употребительными стали десятичные логарифмы ($a$=10). *Идея* составления десятичных логарифмов принадлежит Дж.Неперу и английскому математику Генри Бригсу (*Briggs Henry*; 1561-1630). Они совместно *начали* работу по пересчёту таблиц Непера на новое основание 10. После смерти Дж.Непера в 1617 г. Г.Бригс продолжил эту работу и в 1617 г. оубликовал 8-значные таблицы для чисел первой тысячи, а в 1624 г. 14-значные от 1 до 20 000 и от 90 000 до 100000 (поэтому десятичные логарифмы ещё называют бригсовыми). При десятичной системе счисления логарифмы с основанием 10 имели определённые преимущества, суть которых в следующем. Для рациональных чисел, отличных от $10^k$ с целым $k$, десятичные логарифмы - *трансцендентные* числа, которые приближённо выражают в десятичных дробях. Целую часть числа называют **характеристикой**, дробную - **мантиссой**. Так как $\lg(10^k\cdot x)=k+\lg x$, то десятичные логарифмы чисел, отличающихся множителем $10^k$, имеют одинаковые мантиссы и разные характеристики. Это свойство и лежит в основе таблиц логарифмов, которые содержат лишь мантиссы логарифмов целых чисел.

Если для практических расчётов наиболее удобны десятичные логарифмы, то в теоретических исследованиях исключительно важно другое основание, а именно иррациональное трансцендентное число $e$=2,718281828459045... Этот поразительный на первый взгляд факт полностью объясняется в высшей математике и подтверждается *уравнениями* химической кинетики, термодинамики и *процессов* переноса импульса, энергии (теплоты) и массы (*экспонента* описывает многие динамические процессы). Так вот, число $e$ есть *предел*, к которому стремится выражение $(1+1/n)^n$ при $n \to \infty$. Логарифмы, в которых основанием является число $e$, называются **натуральными** логарифмами, быть может потому, что *экспонента* описывает множество процессов в природе. Переход от натуральных логарифмов к десятичным логарифмам и обратно осуществляется по формулам:

$$\lg x = \ln x / \ln 10 = \ln x \cdot 0,43429; \tag{1.92}$$

$$\ln x = \lg x / \lg e = \lg x \cdot 2,30258. \tag{1.93}$$

Термин "натуральный догарифм" принадлежит П.Менголи (1625 - 7.06.1686) (1659) и Н.Меркатору (ок. 1620-1687) (1668), "характеристика" - Г.Бригсу (1561-26.01.1630) (1624), "мантисса" и "основание" логарифма в нашем смысле - Л.Эйлеру (*Leonhard Euler*; 1707-1783), (1748), *понятие* о *модуле* перехода ввёл Н.Меркатор. Современное определение логарифма было дано в 1742 г. У.Гардинером (*Gardiner William*; 18 в.).

См. также *Показательная функция, Логарифмически нормальное распределение, Мера, Экспоненциальная функция.*

**Логарифмирование** - действие, заключающееся в нахождении *логарифма числового*, алгебраического или иного выражения. Логарифмирование - одно из двух действий, обратных возведению в *степень*: если $y=x^n$, то $x=\sqrt[n]{y}$, $n=\log_x y$.

**Логарифмически нормальное распределение**, логнормальное распределение - *закон распределения случайной величины* по её *логарифмам*. Например, распределение частиц дисперсной фазы по логарифмам размеров частиц. Логнормальный закон получается из *нормального закона* (2.20) в результате замены *аргумента* $x$ на логарифм диаметра частиц:

$$p(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi 6_\lambda^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(\lambda - M_\lambda)^2}{2 6_\lambda^2}\right), \tag{1.94}$$

где $\lambda=\ln d$, $p(\lambda)$ - *плотность вероятностей случайной величины* $\lambda$, $M_\lambda$ - *математическое ожидание* случайной величины $\lambda=\ln d$, $6^2{}_\lambda$ - *генеральная дисперсия* (вместо диаметра (радиуса) может быть любой определяющий размер частиц, например, для твёрдых частиц неправильной формы (1.219)). *Кривая* такого распределения подобна *форме* кривой нормального закона как на рис. 2.25.

Известно, что многие геологические характеристики не подчиняются закону нормального распределения. Концентрация селена в растительном веществе, концентрация йода в пробах грунтовых вод, распределения частиц по размерам в осадочных породах, длина русел первого порядка в речных бассейнах заданного порядка, коэффициент проницаемости осадочных пород, содержание редких элементов в породах, длина морских кос некоторых участков берега, площади, занимаемые речными золотоносными отложениями, - эти и другие геологические характеристики подчиняются закону логнормального распределения [25, 39].

*Степень* минерализации породы может убывать по *экспоненциальному закону* в *зависимости* от расстояния до источника минерализации. Такая же экспоненциальная зависимость существует между размерами переносимых частиц осадка и скоростью потока. Экспоненциальная зависимость характерна для законов охлаждения тел, колебания маятника, колебательных *явлений* в радиоконтуре, формулы Циолковского для скорости ракеты, роста клеток и др.

Если распределение массы частиц по размерам подчиняется логнормальному закону, то распределения частиц дисперсной фазы по размерам, по удельной поверхности частиц, по скоростям витания частиц, при ламинарном режиме обтекания также будут подчиняться логнормальному закону [25]. Логнормальному распределению подчиняются многие геологические *структуры*, например, объёмы нефтяных залежей [25], эволюционные процессы (например, изменения размеров колоний микробов и численности *популяций* за *фиксированные интервалы* времени и другие).

На рис. 1.14 представлена *гистограмма* распределения объёмов нефтяных полей, а на рис. 1.15 - гистограмма распределения концентрации меди в осадочном русле на Юконе. Эти распределения достаточно асимметричны. Асимметричное распределение типично для многих геологических характеристик [25].

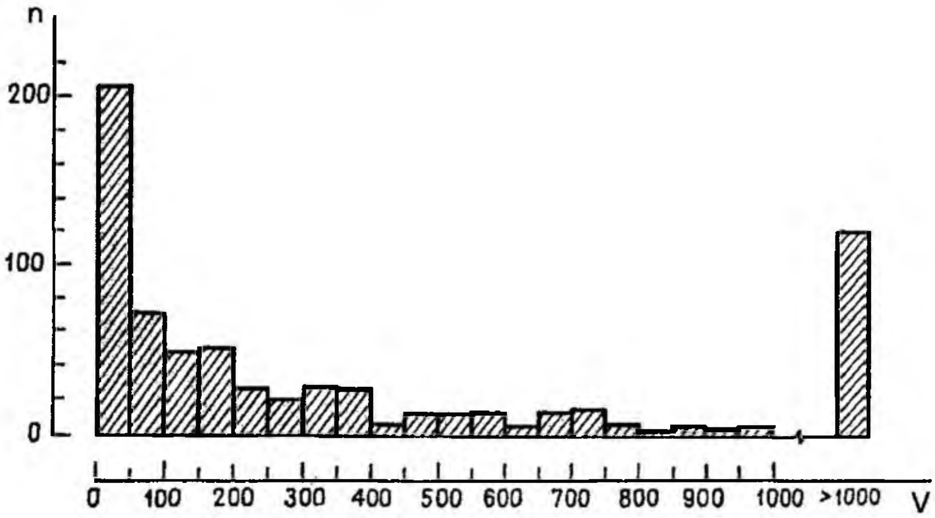



Рис.1.14. Гистограмма распределения продуктивности нефтеносных полей открытых в Денверском бассейне в 1969 г. $V$ - продуктивность поля, тыс. баррелей, $n$ - число полей в каждом классе

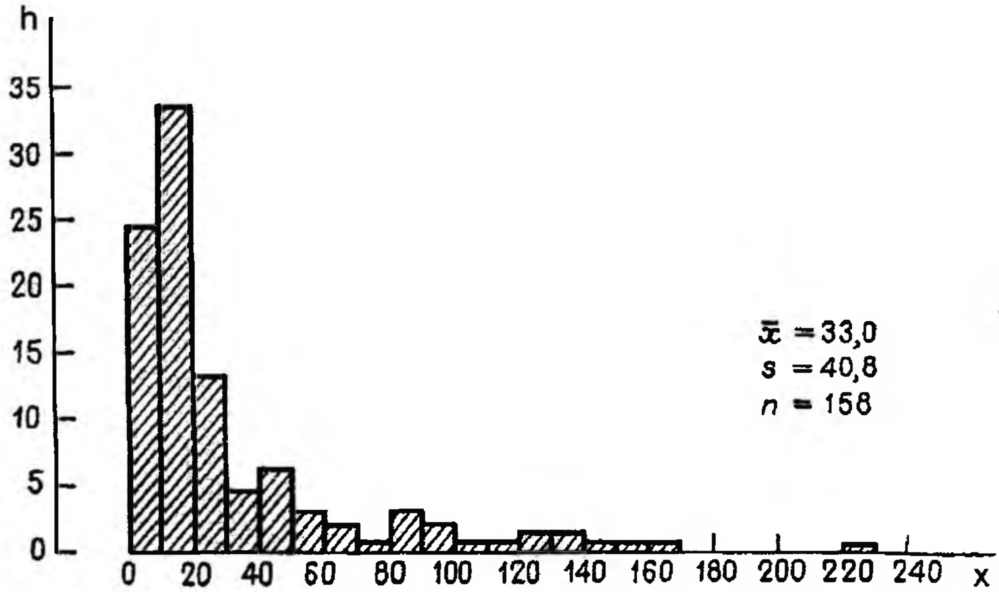



Рис.1.15. Гистограмма содержания меди в осадочных породах на площади Нансен в Юконе. $x$ - содержание меди в породе, г/т, $h$ - частота, %

Если распределения геологических характеристик, представленных на рис. 1.14 и 1.15, представить в логарифмической форме, т.е. вместо *переменной* $x$ *формул* (1.225), (2.20) использовать переменную $\lambda = \ln x$ (или, как в данном примере, $\lambda = \log x$), то эти распределения станут похожими на нормальные (рис. 1.16 и рис. 1.17) [25].

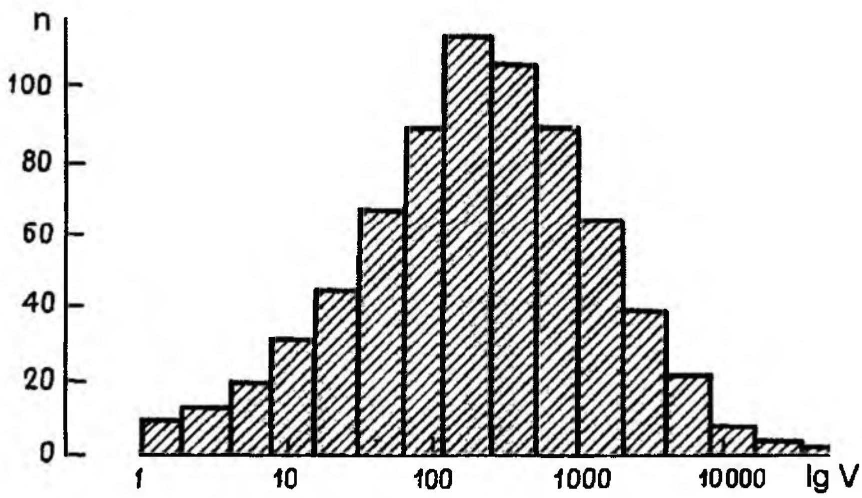



Рис.1.16. Гистограмма распределения продуктивности нефтеносных полей открытых в Денверском бассейне в 1969 г. Масштаб логарифмический;
$V$ - продуктивность поля, тыс. баррелей,
$n$ - число полей в каждом классе

Логарифмически нормальный закон *формализует* взаимодействие механических сил, возникающих при измельчении твердых тел, и их результат, силы физико-химического взаимодействия в *процессах* кристаллизации, конденсации, гидратации окислов, мицеллообразования, агрегации, растворения, осадкообразования и т.п., приводящие к об-

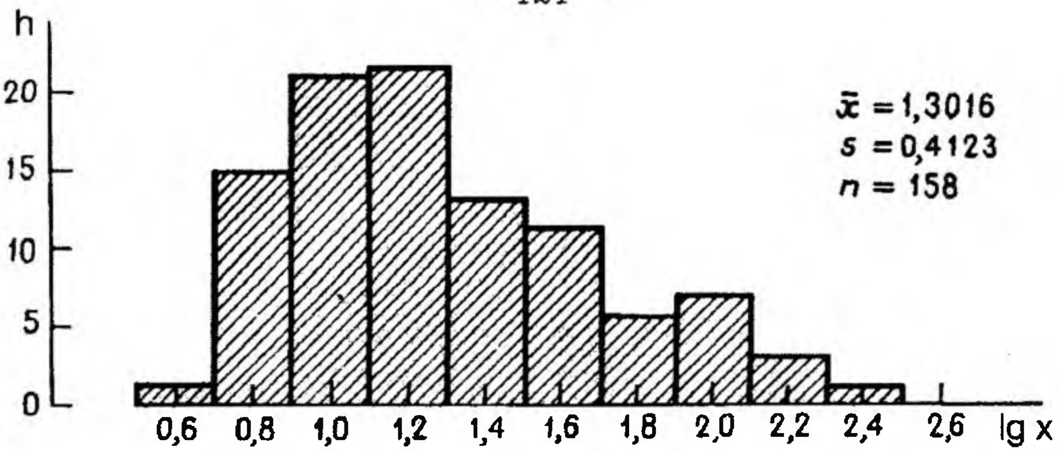



Рис.1.17. Гистограмма содержания меди в осадочных породах на площади Нансен в Юконе. $x$ - содержание меди в породе, г/т, $h$ - частота, %. Представлена в логарифмическом масштабе

разованию и распаду дисперсных систем. В середине XX в. Разумовский Н.К. отмечал, что на основании *результатов* многих исследований "вырисовывается весьма важных факт - участие логарифмически нормального закона во всех тех случаях, где мы имеем дело с частицами вещества, индивидуализирующимися в пространстве тем или иным способом, будь то механическое дробление и химическое выпадение или сегрегация одного соединения среди других, ему подобных (как, например, в горных породах)".

Проявления этого закона невозможно объяснить без привлечения законов термодинамики, физической химии и специальных разделов математики в случаях выпадения осадков из растворов (например, в результате химических реакций), в процессах массовой кристаллизации (например, образование и рост кристаллов сахара в "маточном растворе" и т.п.), конденсации и кристаллизации веществ в парогазовых смесях, образования мицелл в коллоидных растворах и многих других процессах. Достаточно просто проявление закона логнормального распределения для размеров частиц, наблюдаемых в естественных осадках и в раздробленном (измельчённом, раскрошенном, растолчённом) твёрдом веществе, объясняет так называемая "теория дробления".

Если взять некоторое *множество* частиц одинакового размера и каждую частицу расколоть надвое случайным образом, то в общем случае один из обломков каждой исходной частицы будет больше, другой меньше. Если затем каждый из этих обломков снова расколоть надвое случайным образом, то из малых кусков получатся ещё меньшие, в то время как каждый большой обломок даст снова больший и меньший куски. Если этот процесс повторять многократно, то в результате получится очень большое число очень малых частиц и немного частиц, размеры которых близки к исходным. Таким путём и формируются логнормальные распределения некоторых осадков в природе и продуктов перемалывания (дробления, измельчения, крошения, раскалывания, истолчения и т.п.).

Среднее значение и дисперсия логарифмически преобразованной переменной $\lambda$ вычисляется, как обычно, по формулам (1.122) и (1.124):

$$\lambda_{cp} = \bar{\lambda} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n}{n}. \tag{1.95}$$

$$s_\lambda^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \bar{\lambda})^2. \tag{1.96}$$

Представляет интерес тот факт, что среднее арифметическое (1.95) соответствует среднему геометрическому (1.219) исходной переменной $x$:

$$\bar{\lambda} = \sqrt[n]{\Pi x_i}\ , \tag{1.97}$$

а дисперсия логарифмически преобразованной переменной (1.96) называется геометрической дисперсией и эквивалентна:

$$s_\lambda^2 = s_g^2 = \sqrt[n-1]{\prod_{i=1}^{n} \left( \frac{x_1}{x_{g.cp}} \right)}\ . \tag{1.98}$$

Одним из возможных объяснений появления логнормальных распределений может быть возникновение условий, когда совокупное влияние множества случайных факторов, так или иначе влияющих на развитие процесса, не аддитивно, как в случае нормального распределения, а мультипликативно. Большинство случайных возмущений, как бы перемноженные, дают значение совокупного влияния, близкое к геометрическому среднему. В редких случаях может возникать случайное сочетание очень малых возмущений, и их произведение будет близко к нулю. Так же редко может возникать случайное сочетание очень больших возмущений, и их произведение будет достигать экстремально больших значений. Результатом подобного развития событий будут распределения, аналогичные гистограммам, рис. 1.16 и 1.17 [25].

В общем случае, случайная величина $X$ будет подчиняться закону логнормального распределения:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot exp\left( - \frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma^2} \right), \tag{1.99}$$

где $a$=**E**ln$X$ - математическое ожидание натурального логарифма случайной величины $X$, $б^2$=**D**ln$X$ - математическое ожидание дисперсии натурального логарифма случайной величины $X$. Логнормальное распределение является унимодальным распределением и имеет положительную асимметрию. *Моменты* случайной величины $X$ подчиняющейся закону логнормального распределения с параметрами $a$ и $б^2$ выражаются формулой [47]:

$$\mathbf{E}m_\beta = \exp(\beta a+\beta^2 б^2/2), \tag{1.100}$$

откуда математическое ожидание и дисперсия случайной величины $X$ соответственно равны:

$$\mathbf{E}X=\exp(a+б^2/2), \tag{1.101}$$

$$\mathbf{D}X=\exp(2a+б^2)\cdot(\exp(б^2)-1). \tag{1.102}$$

См. также *Воспроизводимость, Детерминизм, Причина, Причинность, ПРИЧИНЯТЬ, Связь, Следствие, Сущность, Экспоненциальная функция, Явление.*

**Локализация** (< *лат.* localis - местный) - ограничение распространения или развития какого-либо *процесса* или *явления* какими-либо *пределами*. См. также *Локальный*.

**Локальный** (< *лат.* localis - местный) - свойственный данному месту, не выходящий за *определённые пределы*, **местный**.

# М

**Максвелла распределение** - непрерывное *распределение вероятностей* с *плотностью вероятностей*:

$$p(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cdot\dfrac{x^2}{б^3}\cdot e^{-x^2/2б^2}, & x\geqslant 0, \\ 0, & x<0, \end{cases} \tag{1.103}$$

где $б$ - *параметр*, $б>0$. *Функция распределения* Максвелла имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 2\Phi(x/б) - \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cdot\dfrac{x^2}{б^3}\cdot e^{-x^2/2б^2} - 1, & x\geqslant 0, \\ 0, & x<0, \end{cases} \tag{1.104}$$

где $\Phi(x)$ - *функция стандартизованного нормального распределения*. Распределение Максвелла имеет *конечные моменты* любого порядка и положительный *асимметрии коэффициент*, оно унимодально - единственная *мода* при $x=\sigma\sqrt{2}$. *Математическое ожидание* и *дисперсия* равны, соответственно:

$$EX=2\sigma_x\sqrt{2/\pi}\,; \tag{1.105}$$

$$DX=\frac{3\pi-8}{\pi}\,\sigma_x^2. \tag{1.106}$$

Распределение Максвелла может быть получено как распределение длины *случайного* вектора, координаты которого в трёхмерной декартовой *системе* координат *независимы* и нормально распределены с *параметрами* 0 и $\sigma^2$. Распределение Максвелла известно как распределение скоростей частиц макроскопической *физической* системы, находящейся в *статистическом* равновесии, при условии, что движение частиц (молекул) подчиняется *законам* классической механики (например, *идеальный* газ). Впервые установлено Дж.Максвеллом в 1859 г. (*Maxwell James Clerk*; 1831-1879) при решении задачи о распределении скоростей молекул идеального газа.

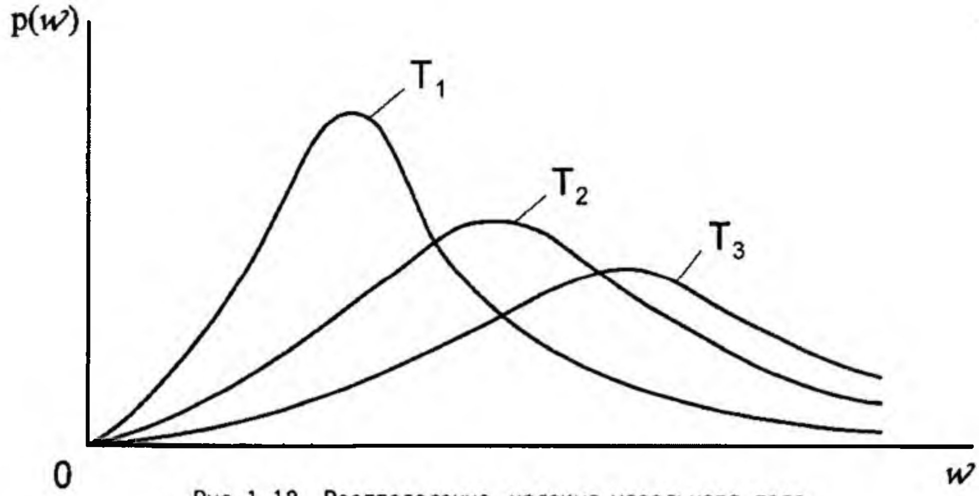



Рис.1.18. Распределение молекул идеального газа по скоростям при различных температурах: $T_1<T_2<T_3$ (площадь под каждой кривой плотности вероятностей равна 1)

Согласно распределению Максвелла *вероятное число* молекул в единице объёма $f(w)$, проекции векторов скоростей которых лежат в *интервалах* от $w_x$ до $w_x+dw_x$, от $w_y$ до $w_y+dw_y$ и от $w_z$ до $w_z+dw_z$, описываются функцией распределения Максвелла:

$$f(w)=n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\cdot\exp\left(-\frac{m(w_x^2+w_y^2+w_z^2)}{kT}\right). \tag{1.107}$$

где $m$ – масса молекулы, $n$ – число молекул в единице объёма, $k$ – постоянная Больцмана. Распределение числа молекул, *абсолютные* значения скоростей которых находятся в интервале от $w$ до $w+dw$, имеет вид:

$$dn=F(w)\,dw=4\pi n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{mw^2}{2kT}\right)\cdot w^2\,dw. \qquad (1.108)$$

Распределение достигает *максимума* при скорости $w_в=\sqrt{2kT/m}$, называемой наиболее вероятной скоростью. Для молекул водорода при температуре 273,15 К $w_в$=1506 м/с. При возрастании температуры максимум распределения Максвелла (т.е. скорость $w_в$) смещается к более высоким температурам. Распределение Максвелла справедливо также для *идеальных* жидкостей, для броуновских частиц, взвешенных в жидкости или газе, и для стрельбы по сферической цели.

**Максимум** (< *лат.* maximum - чрезвычайно сильно, изо всех сил) - наибольшая, наивысшая *величина*, *предельное количество* чего-либо (противоположное - *минимум*).

**Максимум функции** – наибольшее *значение функции*, принимающей действительные значения. Точку области *определения* рассматриваемой функции, в которой она принимает *максимум*, называют *точкой максимума*. Условием максимума функции является равенство нулю первой *производной* и отрицательное значение второй производной:

$$\frac{dy}{dx}=0; \qquad \frac{d^2y}{dx^2}<0. \qquad (1.109)$$

Если некоторая точка является точкой *абсолютного* (*локального*) максимума функции, строгого или нестрогого, то значение функции в этой точке называют *абсолютным* (локальным), соответственно, строгим или нестрогим максимумом. Максимум функции называют также её *экстремумом*.

**Марковский процесс** см. *Случайный процесс без последействия*.

**Массовые случайные явления** - *явления* многократного повторения *событий* при осуществлении одинаковой совокупности условий. В случайных явлениях мышления, физиологии, общества, природы, техники и технологии *закономерности* проявляются (и могут быть выявлены, формализованы) *статистическими методами* только в случаях многократного повторения события при осуществлении одинаковой совокупности условий. Массовые случайные явления в своём совокупном проявлении создают **математически строгие закономерности**, выявив которые, можно делать далеко идущие выводы. Но эти прогнозы основаны на законах *статистики математической* и, соответственно, имеют ту или иную вероятность реализации (вплоть до неосуществимости), направление того или иного течения.

Важно отметить, что каждое событие в момент своего осуществления уникально и обусловлено законами природы. Став единичным актом реальности, событие таковым и остаётся, если подобная совокупность условий больше не формируется. Если же подобная совокупность условий осуществляется многократно, то рассматриваемое нами событие соответственно повторяется и становится членом (*элементом*) массового случайного *явления*. Событие теряет свою индивидуальность и в массе приобретает новое *качество*, другими словами, *количество* переходит в новое качество.

События, случайные по существу своего проявления, не обладающие каким бы то ни было постоянством *частоты* во времени и/или в *пространстве*, разрозненные по своей природе, не могут служить основой каких бы то ни было статистических закономерностей и прогнозов. Такие события являются **частностями** для *наблюдателя*. С другой стороны, эти единичные и уникальные события обусловлены законами природы, здесь законы природы определяют всё или почти всё. Успешными могут быть построения *математических* моделей, описывающих физическую сущность процесса, явления. Это область естественных наук. Например, относительно редкие болезни, извержения вулканов, землетрясения, цунами, долгосрочные прогнозы погоды (больше двух недель), изменения климата и т.д.

Практическая невозможность прогнозирования землетрясений (цунами) обусловлена тем, что они являются результатами глобальной тектоники плит и циркуляции магмы в недрах Земли. Закономерности обоих процессов пока неизвестны, причинно-следственные связи в явном виде не присутствуют.

Достаточно часто бывает так, что с развитием науки при переходе к *совокупностям* более высокого уровня, большей сложности и организованности **частности** становятся **частотами** и появляется возможность *формализации* явления статистическими методами.

См. также *Случайная величина, Вероятность, Вероятность математическая, Вероятный, Воспроизводимость, Множество, Причина, Причинность, Связь, Следствие, Случайная величина, Случайное событие, СОБЫТИЕ, Событие, СОВОКУПЛЯТЬ, Совокупность, Статистика математическая.*

"Математика - единственный совершенный метод, позволяющий провести самого себя за нос." (*Альберт Эйнштейн*; 1879-1955).

**Математика** (*греч.* μαθημα - знание, познание, наука; μαθησιζ - учение, изучение, познание < μανθανω - учиться, узнавать, замечать, понимать (*первоначально*: "учусь через размышление")) - наука о *количественных соотношениях* и пространственных *формах* как окружающего нас четырёхмерного пространства-времени, так и пространств более высокого порядка. Современная математика состоит из *множества* разделов: арифметики, алгебры, геометрии, математического *анализа* (дифференциального и интегрального исчислений), *теории* множеств, *вероятностей теории*, *математической статистики* и многих других. Для математики характерна высокая *степень*: (1) *абстрактности* её *понятий* (точки без размеров, *линии* без толщины, *множества* любых *объектов* и т.п.); (2) общности понятий (например, в алгебре буква может *обозначать* всякое *число*, в теории *ошибок случайная* - любая ошибка: *измерения*, взвешивания, химического анализа и т.д.). Любая наука в *процессе* своего развития от изучения *качественных* сторон *явления* переходит к изучению количественных соотношений и привлекает математические *методы* для решения своих конкретных проблем.

См. также *Мера*, *ЧИСЛО*.

**Математическая модель** - *математическое описание* требуемых *свойств* реального *объекта* (*оригинала*), включающее в себя *интегральные* (алгебраические), *дифференциальные уравнения*, *системы* уравнений, *статистические зависимости*, *функции распределения вероятностей* входных и возмущающих переменных, функции распределения вероятностей переменных, характеризующих исследуемые свойства *объекта*.

См. также *Детерминизм*, *Детерминированно-стохастическая модель*, *Детерминистическая модель*, *Модель*, *ПОНИМАТЬ*, *Понятие*, *Причина*, *Причинность*, *ПРИЧИНЯТЬ*, *Связь*, *Следствие*, *Статистическая модель*, *Стохастическая модель*, *Сущность*, *Явление*.

**Математическая статистика** см. *Статистика математическая*.

"Если вопрос задан правильно, ответ будет неожиданным." (*Авессалом Подводный*; р. 1953).

**Математическое ожидание** - *мера центральной* тенденции в *распределении случайной величины* во времени и/или в пространстве. Математическое ожидание *определяет* положение *центра*, вокруг которого группируются все *возможные* значения случайной величины.

Математическое ожидание **EX** *дискретно* распределённой случайной величины определяется выражением (1.197), для случайных величин $X$ с *абсолютно непрерывным* распределением вероятностей выражением (1.198), для непрерывной случайной величины - *формулой* (1.116). В практике *наблюдений* и *экспериментальных* исследований математическое ожидание *понятие* достаточно *абстрактное* - для *физических величин* определяемых в *результате* наблюдений и экспериментов математическое ожидание определить невозможно, его можно только *оценить*. Абсолютно точно математическое ожидание можно указать только в некоторых азартных играх. Например, математическое ожидание *результата* бросания двух игральных костей равно 7 (точно!), в гипотетической игре с четырьмя костями - 14 (точно!), а в случае трёх игральных костей есть два наиболее вероятных результата - 10 и 11, но так называемый здравый смысл не хочет мириться с утверждением, что $M_x$=10,5, т.к. результат игры - натуральные числа. *Оценками* математического ожидания могут быть *мода, медиана, арифметическое* (или другое) *среднее* в зависимости от сущности задачи и *концепции*.

См. также *Среднее, среднее значение, Распределение вероятностей случайной величины, Эмпирическое распределение*. Подробно см. раздел 2.5.

**Медиана** (<*лат.* medianum - средняя часть, середина; medianus - находящийся посреди, средний, центральный), в *вероятностей теории* и *статистике математической*, - одна из *числовых* характеристик *распределения вероятностей случайной величины*. Для *непрерывно* распределённой случайной величины $X$ строго монотонной *функции* распределения $F(x)$ медиана $m$ *определяется* как единственный корень *уравнения* $F(x) = 1/2$ (или как *квантиль* $K_{1/2}$), т.е. условием, что случайная величина $X$ принимает с *вероятностью* 1/2 как значения, большие $x_{0.5}$, так и значения, меньшие $x_{0.5}$. *Выборочная* медиана определяется выражением:

$$\mu_n=\mu_n(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n)=\begin{cases} x_{(m)}, & \text{при } n=2m+1, \\ [x_{(m-1)}+x_{(m)}]/2, & \text{при } n=2m, \end{cases} \qquad (1.110)$$

где $x_{(m)}$ - *элементы вариационного ряда*, соответствующего *результатам наблюдений* $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n$. В общем случае медиана определяется неоднозначно, но для любой случайной величины существует, по крайней мере, одна медиана; в *симметричном* случае медиана (если она единственна) совпадает с *математическим ожиданием*, если оно существует. В условиях *асимметричных кривых* распределения медиана расположена между *арифметическим средним значением* и *модой* (рис. 1.33 и 2.12). См. также с. 71, 102, 153, 220, 269.

"**МЕРА** ж. способъ определенья количества по принятой единице; *мера* вообще прилагается къ протяженью и къ *пространству*, а отвлечённо, вообще пределъ ино пора, срокъ. *Погонная, линейная мера* служитъ для означенья разстоянiй или величины *линiй*; *квадратная* - плоскостей; *кубическая* - телъ, толщи. *Мера сыпучихъ и жидкихъ телъ* определяется единицею емкости. *Мера* и *мерка хлебная* четверикъ, маленка, пудовка, по осьми на четверть; местами (*влгд.*) *мерою* называють ОСЬМИННИКЪ, и даже (*кстр. буйс.*) три четверика. (...) || Пределъ, граница. (...) ***Мерочка***, умал. более употрб. какъ меньшая мера питiй: стаканчикъ, чарка. (...) ***Мерка*** умал. все, что служит для определенья величины, особенно въ работахъ; тесьма или бумажная лента, коею портные и сапожники *снимают мерку;* тесьма, бичевка или прутъ, с отметкою на немъ размеровъ вещи ипр. (...) ***Мерочный***, къ мерке (аршину, ведру ипр.) относящiйся. ***Мерить*** или ***мерять*** что, ***меривать*** (*мерить* и *меряю*), измерять, определять по известной мере или мерке величину или качество. (...)" (*В. И. Даль*; 1801-1872), [82].

См. также *Измерение, Линейный, Мера, Мера множества, Качество, Количество, Отношение.*

"Может ли мерить вещи тот, у которого нет мерки даже для самого себя?" (*Плиний Старший* (*Гай Плиний Секунд*); 23/24-79 гг.).

**Мера** - философская *категория*, выражающая единство *качественных* и *количественных* характеристик предмета, *явления*. Мера отражает *необходимую, закономерную связь* количественной и качественной стороны *объектов, явлений* и *процессов* окружающего мира.

Каждый предмет или явление имеют качественные характеристики (*форма*, состояние (например, фазовое), цвет, блеск, вкус, чистота в самом широком смысле этого слова и т.п.) и количественные (масса, вес, состав, скорость, интенсивность, доля и т. д.). Количественные характеристики могут меняться в *результате* развития предмета, явления или воздействия на предмет других явлений или предметов. Мера показывает границу, за которой изменение количества влечёт за собой изменение качества предмета, или границу, за которой изменение качества ведёт к изменению количества. Мера играет большую роль в познании и в науке, в частности. *Невозможно* познать процесс, описать его *математической моделью* без изучения количественных и качественных характеристик, не исследовав их взаимосвязи и *взаимоотношения*.

См. также *Измерение, Количество, МЕРА, Мера множества, Мера общая, Отношение.*

**Мера множества** - обобщение *понятия* длины отрезка, площади плоской фигуры и объёма тела на *множества* более общей природы.

См. также *МЕРА, Мера, Мера общая.*

**Мера общая** двух или нескольких однородных величин - *величина* того же рода, содержащаяся целое *число* раз во всех заданных величинах. Две величины, не имеющие общей *меры*, называются *несоизмеримыми*.

См. также *МЕРА, Мера, Мера множества, Величины соизмеримые и несоизмеримые.*

**Мета...** (*греч.* **μετα** (одного корня с русским *между*) - 1. Между, среди. 2. После, за (означает следование во времени, пространстве). 3. В сложных словах означает: 3.1) соучастие, общение; 3.2) промежуток в пространстве и времени; 3.3) следование за чем-либо; 3.4) переход из одного места или состояния в другое, как русское [*пере-*]. 4. Первая составная часть сложных слов: 4.1) *хим.* сокращённое *обозначение* положения двух заместителей в бензольном кольце - **между** *орто* и *пара*, а точнее - 1,3; 4.2) *хим.* тривиальное название кислот с различной *степенью* гидратации, например, $HPO_3$ - метафосфорная к-та, $H_3PO_4$ - ортофосфорная к-та; 4.3) обозначает следование за чем-либо, переход к чему-либо другому, перемену состояния, превращение, например, метаболиты, метагенез, метафаза, метастабильное состояние; 4.4) логическая система, служащая для исследования или описания других систем, например, металогика, метаматематика, метатеория, метафизика, метаязык.

**Метод** (*греч.* **μεθοδοζ** - научное исследование, способ исследования, ***метод***) - подход к *явлениям* природы и общества, способ познания; путь теоретического или практического исследования явлений природы и общества; приём, последовательность действий.

**Минимум** (< *лат.* minimum - наименьшее *количество*, крайне мало; minimus - наименьший, совершенно ничтожный) - наименьшая *величина*, наименьшее *количество* чего-либо (противоположное - *максимум*).

**Минимум функции** (< *лат.* minimum - наименьшее количество, крайне мало; minimus - наименьший, совершенно ничтожный) - наименьшее значение *функции*, принимающей действительные значения. Точку области *определения* рассматриваемой функции, в которой она принимает минимальное значение, называют точкой минимума. Условием минимума функции является равенство нулю первой *производной* и положительное значение второй производной:

$$\frac{dy}{dx} = 0; \qquad \frac{d^2y}{dx^2} > 0. \qquad (1.111)$$

Если некоторая точка является точкой *абсолютного* (*локального*) минимума функции, строгого или нестрогого, то значение функции в этой точке называют абсолютным (локальным), соответственно, строгим или нестрогим минимумом. Минимум функции называют также её *экстремумом*.

"**МНОГIЙ,** великiй числомъ, въ большомъ количестве; избыточный, изобильный; чаще употребл. во мн. числе: *многiе*, или как наречiе: ***много***, обильно, *юж. зап.* богато, *кал.* жуть, сев. дородно; в высш. степ. пропасть, бездна, вволю. (...) ***Множество*** ср. большое число, великое количество, много, въ избытке, обильно; страсть, тьма, пропасть, бездна, безъ числа. (...) ***Множить*** что умножать; увеличивать, усиливать; помножать, увеличивать кратно, в несколько разъ. (...) " (*В.И.Даль*; 1801-1872) [82]. См. также *Количество, Множество.*

"Множество - это соединение по сходству, создающее сущность из жизней, но не жизнь из сущностей." (*Виктор Кротов*; р. 1946).

**Множество** - *совокупность* каких-либо однородных *элементов* или элементов, обладающих общим характеризующим *свойством* (например, *результаты экспериментов, наблюдений, событий*, буквы алфавита, библиотека книг, фонотека, музыкальный ансамбль, собрание, коллекция и т.п.). Множество - самое широкое по объёму *понятие математики* и математической логики. Множество можно задать двояко: если множество *конечно*, его можно перечислить (в нашем случае это значения *факторов* $x_1$, $x_2, \ldots,$ $x_k$ или экспериментальные значения *функции* $y_1$, $y_2, \ldots,$ $y_m$), а можно дать *правило* для *определения* того, принадлежит ли рассматриваемый *объект* тому или иному множеству. Первое называется **перечислением** множества, второе - **описанием** множества. Интерес представляют также результаты расчётов по *математической модели*, которые также являются множеством.

В практике экспериментальных исследований и в *статистике математической* совокупность результатов *измерений* какой-либо *физической* величины, подверженной *случайным ошибкам*, также можно называть множеством. Для решения практических задач потенциально *бесконечное* множество значений физической величины интереса не представляет; практический интерес представляют те или иные характеристики *процесса* или *явления*. В этом случае конкретные результаты измерений (*выборка*) являются подмножеством бесконечной совокупности, по которым определяются *необходимые параметры*.

Множество точек плоскости с прямоугольными координатами ($x$, $y$), где $x \in X$, называется *графиком функции* $y=f(x)$.

Понятие множества ввёл в математику Г.Кантор (*Cantor Georg*; 1845-1918) в 80-х годах 19 в. ("Множество есть многое, мыслимое нами как единое"). В своей *теории* множеств Г.Кантор опирался на понятие актуальной, т.е. завершённой *бесконечности*. Канторовская теория множества исследовала общие свойства множеств, не зависящие от природы входящих в множество элементов.

См. также *Информация, Мера, МНОГIЙ.*

**Мода** (<*лат.* modus - мера, величина, размеры, положение) - одна из *числовых* характеристик *распределения вероятностей случайной величины*. Для случайной величины, имеющей *плотность вероятности* $p(x)$, *модой* называется любая точка *максимума* $p(x)$ (рис.1.33, 2.12, 2.25). Мода *определяется* и для распределений, не имеющих плотности. Распределения с одной, двумя или большим числом максимумов называется соответственно унимодальными (или одновершинными), бимодальными (рис.1.19, рис.1.35) или мультимодальными.

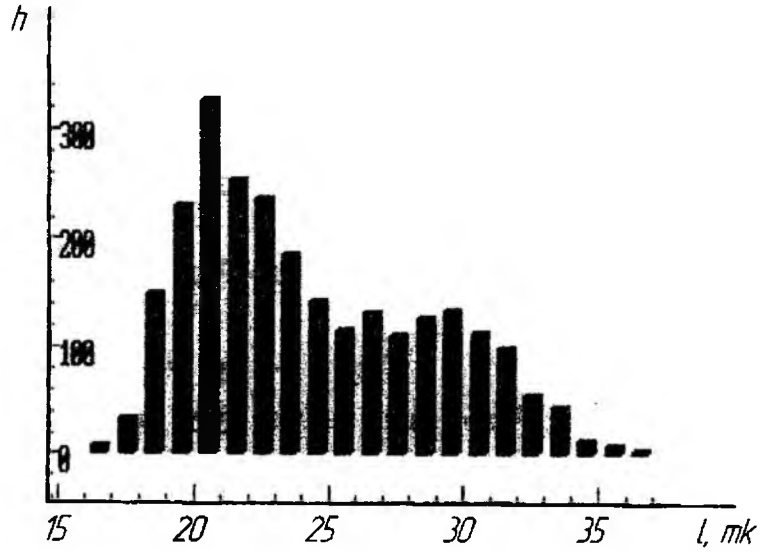



Рис.1.19. Распределение трипанозом в мухе цеце
в соответствии с длиной в микронах

Для многовершинных распределений *понятие* моды теряет смысл. В *вероятностей теории* и *статистике математической* наиболее важными распределениями являются унимодальные распределения. Для унимодального и *симметричного относительно* некоторой точки $a$ распределения мода равна $a$ и совпадает с *медианой* и *математическим ожиданием*, если последнее существует. Мода в статистике - то, что в обычной жизни считается массовым, типичным. Примером моды является цена, по которой данный товар чаще всего реализуется на рынке. В отличие от *среднего арифметического* вероятная *ошибка* определения моды поддаётся *оценке* в редких случаях.

См. также *Концепция, Среднее, среднее значение* и с.213, 269, 291.

**Модель** (*франц.* modele, *итал.* modello, <*лат.* modulus - мера, образец, норма) - отражение реального *объекта* в сознании человека, на бумаге и в пространстве. Модель в логике и методологии науки - аналог (схема, *структура*, знаковая *система*) определённого фрагмента природной или социальной реальности, порождения человеческой культуры - оригинала модели. Этот аналог служит для хранения и расширения знания (*информации*) об оригинале, конструирования оригинала, преобразования и управления им. Различают модели физические, *математические* (знаковые, символьные) и мысленные.

Физическая модель - устройство, установка, система машин или аппаратов и т.д. Первые и последние физические модели в жизни человека - игрушки. Человек играет всю жизнь - "Ребёнок играет куклой, кошка - мышью, а всяк - любимою мечтою".

*Математическая модель* - описание компонентов и *функций*, отображающее существенные *свойства* какого-либо *объекта, процесса* или *явления*.

Мысленная модель - образ, создаваемый человеком в своём разуме и изучаемый его же мысленным взором. Мысленные модели, по существу, - модели *детерминированно-стохастические*.

См. также *Детерминизм, Детерминистическая модель, Мера, Норма, ПОНИМАТЬ, Понятие, Причина, Причинность, ПРИЧИНЯТЬ, Связь, Следствие, Статистическая модель, Стохастическая модель, Сущность, Форма, Явление.*

**Модель экспериментально-статистическая** - *уравнение* регрессии вида:

$$\hat{y}=b_0+\sum_{j=1}^{k}b_jx_j+\sum_{\substack{l=1\\m=2\\l\neq m}}^{k}b_{l.m}x_lx_m+\sum_{j=1}^{k}b_{jj}x_j^2+\sum_{j=1}^{k}b_{jjj}x_j^3\ldots, \qquad (1.112)$$

а в случае парной зависимости вида $y=f(x)$:

$$\hat{y}=\sum_{j=0}^{k}b_jx^k, \qquad (1.113)$$

где $\hat{y}$ - *аналитическая функция*, т.е. функция, полученная в *результате анализа результатов экспериментов*, $x_1, x_2, \ldots, x_k$ - *независимые* переменные или *факторы*, а $b_0$, $b_j$, $b_{l.m}$, $b_{jj}$ - *коэффициенты уравнения*, которые достаточно легко можно вычислить *методом* наименьших квадратов. *Математические модели* вида (1.112), (1.113) находят применение в практике научных исследований, при решении задач оптимизации и в автоматизированных *системах* управления технологическими *процессами*, в тех случаях, когда не важен учёт *сущности*, *структуры объекта*, *процесса*, *явления*, а важна только формальная *зависимость* аналитической функции $y$ от факторов $x_j$:

$$y=f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_k). \tag{1.114}$$

Реальный объект при таком подходе рассматривается как "чёрный ящик", в котором есть **входы** $x_j$ и **выходы** $y_j$. С точки зрения *адекватности* модели и *оригинала*, чем этот "чёрный ящик" будет ***светлее***, тем лучше, иначе можно не отличить вход от выхода. В таком подходе есть определённое удобство - можно получить математическую модель сложного или неизученного процесса путём одновременной *фиксации* экспериментальных значений функции $y$, факторов $x_j$ и последующей *обработки данных* численными методами. Парадоксально, но факт - сложный объект достаточно просто описать *статистической моделью*. Практическая ценность экспериментально-статистических моделей заключается в относительной простоте получения уравнения регрессии и потенциальной возможности описания процесса любой сложности. Основные недостатки - формальность описания (физический смысл коэффициентов $b_0$, $b_j$, $b_{l,m}$, $b_{jj}$ крайне ограниченный), невозможность экстраполяции и незначительный вклад в познание физической *сущности* процесса. Необходимо добавить, что бывают случаи, когда даже интерполяция невозможна - уравнение *адекватно* только "в узлах таблицы". Самый главный недостаток *эмпирического* метода - уравнение несёт минимум *информации* о *структуре* системы, о *сущности* процессов, происходящих в ней.

С точки зрения обобщения, развития *теории* и прогресса в прикладных областях, *детерминистические* (*структурные*) модели - основа. С другой стороны, статистические методы необходимы при первичном анализе данных, при обработке экспериментальных результатов, для выявления значимых и незначимых факторов и т.д. Другими словами, мысленная модель, структурная модель - цель, а статистические методы - средство, инструмент исследователя. Этот же момент можно формализовать по другому. *Экспериментально-статистический метод* - **способ, приём, техника**, а построение структурной модели - путь научного познания, творческий процесс, искусство, здесь есть стиль исследователя, "авторский почерк", подход. "Выше всех умозрительных знаний и искусств стоит умение производить опыты, и эта наука есть царица наук" (*Роджер Бэкон*; 1214-1292).

См. также *Детерминизм, Детерминированно-стохастическая модель, Детерминистическая модель, Математическая модель, Модель, Понятие, Причина, Причинность, Связь, Следствие, Случайный процесс, Стохастическая модель.*

**Модуль** (< *лат.* modulus - *мера*) - 1. Модуль вектора - длина (*норма*) вектора. 2. Модуль действительного числа - то же, что *абсолютная величина*. См. *Абсолютный*.

"**МОМЕНТЪ** м. мигъ, мгновение, минтъ; || пора, срокъ, короткое, срочное время. ***Моментъ*** *силы*, въ механике: произведение силы на отвес. - *инерцiи*, косность, сила сопротивленья тела движению. ***Моментальный***, минутный, миговой, мгновенный." (*В.И.Даль*; 1801-1872) [82].

См. также *Мигать*.

**Момент** (<*лат.* momentum - движущая сила, толчок, побудительное начало, мгновение, момент; вес, важность, значение < movere - двигать) - 1. (*физ.*) Момент силы, момент инерции, момент *количества* движения (импульса), угловой момент. 1.1. *Начало* отсчёта времени, точка отсчёта. 1.2. Очень малая *причина* чего-либо, косвенная причина, *незначимый фактор*. 1.3. *Элементы* чего-либо. 1.4. Очень малый промежуток времени.

2. (*мат.*) Одна из *числовых* характеристик *распределения вероятностей случайной величины*. Начальным моментом порядка β (β>0, целое) *непрерывной* случайной величины X называется выражение:

$$m_\beta=\int_{-\infty}^{+\infty} x^\beta p(x)\,dx. \qquad (1.115)$$

Начальный момент первого порядка или первый начальный момент **характеризует** *математическое ожидание* случайной величины. Математическое ожидание *определяет* положение *центра*, вокруг которого группируются все *возможные* значения случайной величины. Математическое ожидание для непрерывной случайной величины определяется *формулой*:

$$M_x=m_1=\int_{-\infty}^{+\infty} x p(x)\,dx. \qquad (1.116)$$

Примечание: начальный момент первого порядка будет являться одной из возможных оценок математического ожидания (см. также *Концепция, Среднее, среднее значение, Эмпирическое распределение*).

Центральным моментом β-того порядка для непрерывной случайной величины называется выражение:

$$\mu_\beta = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_x)^\beta p(x)\,dx. \qquad (1.117)$$

Второй центральный момент характеризует рассеивание случайной величины *относительно* математического ожидания и называется *дисперсией, обозначаемой* $s^2{}_x$. Для непрерывной случайной величины определяется формулой:

$$\mu_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_1)^2 p(x)\,dx. \qquad (1.118)$$

Аналогично вычисляют моменты более высокого порядка.

Имеется прямая аналогия моментов в *вероятностей теории* с моментами, играющими важную роль в механике: момент первого порядка (оценка математического ожидания $M_x$) аналогичен статическому моменту, центральный момент второго порядка $\mu_2$ (дисперсия $s^2$) - моменту инерции, соответствующей формулой определяется момент распределения масс.

3. (*соц.*) - Особые *состояния, явления* и *процессы* в межличностных и социальных отношениях: точка зрения, точка отправления, попасть в самую точку, дойти (довести) до точки.

См. также *Концепция, Отношение, Понятие, Среднее, среднее значение. Элемент.*

**Моментов метод** в *вероятностей теории* и *статистике математической* - *метод* нахождения *распределения вероятностей* по его *моментам.*

В математической статистике метод *моментов* - это один из общих методов нахождения *статистических оценок* для неизвестных *параметров* распределений по *результатам наблюдений.* Метод моментов был использован для этих целей в 1894 г. К.Пирсоном (*Pearson Karl*; 1857-1936), при решении задачи аппроксимации *эмпирического* распределений с помощью *системы Пирсона распределений.*

*Процедура* метода моментов такова: *определяются выборочные моменты* (моменты эмпирического распределения) и в количестве, равном числу оцениваемых параметров, приравниваются к соответствующим моментам распределения, являющимся *функциями* от неизвестных параметров; полученные *уравнения* решают *относительно* параметров и находят искомые оценки. Практически метод моментов связан с весьма простыми вычислениями. При некоторых довольно общих условиях метод моментов позволяет найти оценки, которые при больших $n$ *асимптотически нормальны,* имеют *математическое ожидание,* лишь *величиной* порядка $1/n$ отличающееся от *истинного* значения (*генерального*) *параметра,* и *стандартное* значение - порядка $1/\sqrt{n}$. Однако оценки, найденные методом моментов, не являются наилучшими с точки зрения *эффективности* - их *дисперсия* не является наименьшей *возможной* дисперсией. В случае оценивания параметров нормального распределения метод моментов и метод максимального правдоподобия приводят к асимптотически *несмещённым* и асимптотически эффективным оценкам.

**Мощность критерия** - *вероятность* правильного отклонения ложной *нулевой гипотезы* $H_0$, т.е. вероятность (1-*P*) не совершить *ошибку второго рода*. Другими словами, мощность критерия - вероятность попадания *статистики критерия* в *критическую* область, при том, что справедлива конкурирующая гипотеза $H_1$ (т.е. нулевая $H_0$ ложна). Чем больше мощность критерия (1-*P*), тем вероятность ошибки второго рода меньше. Очевидно, что чем меньше вероятности ошибок первого и второго родов, тем **оптимальнее** критическая область.

Мощность критерия не сводится к *доверительной вероятности* $P$ и соотношению (1.57). Проблема в том, что для *данной выборки* одновременно уменьшить *уровень значимости* $\alpha$ и доверительную вероятность $P$ невозможно, т.к. $\alpha=1-P$. *Фиксация* уровня значимости находится целиком в компетенции исследователя: на основании *физической сущности* задачи и последствий от ошибочного принятия решения он должен решать, какой риск при отклонении нулевой гипотезы является допустимым. Единственная возможность одновременного уменьшения вероятностей ошибок первого и второго родов - увеличить размерность выборки. Подробнее см. [2, 13, 26, 34, 61].

# Н

"Наблюдения - это история естественных наук." (*Шарль Луи Монтескье*; 1689-1755).

**Наблюдение** (*лат.* observatio) - *метод* исследования предметов и *явлений* реальности в том виде, в каком они существуют и происходят в природе и обществе. Наблюдение отличается от простого восприятия *информации* наличием цели и активной позицией наблюдателя. "Испокон веков наблюдения были достаточно убедительны только для тех, кто способен рассуждать и желает знать истину." (*Галилео Галилей*; 1564-1642). Наблюдение отличается и от *эксперимента* отсутствием активного управляющего воздействия на явление или *процесс*. Наблюдение - это *фиксация* характерных признаков предмета или развития явления в пространстве и/или во времени. Ярким примером является древнейшая наука - астрономия. Можно также упомянуть наблюдателей на выборах, экологов, социологов, археологов, историков и т.д.

См. также раздел *СВЯЗИ, НЕОБХОДИМОСТЬ, СЛУЧАЙНОСТЬ*, раздел 2.1. и статьи *Причина, Причинность, ПРИЧИНЯТЬ, Связать, СВЯЗЫВАТЬ, Связь, Случайное событие, СОБЫТИЕ, событность, Событие.*

**Наблюдений обработка** см. *Данных обработка математическая.*

**Начальный момент** см. *Момент, Моментов метод* и раздел 3 (Метод моментов).

"**Начало** ср. чемъ начинается бытіе или действіе; одинъ изъ двухъ пределовъ, между коими заключено бытіе, вещественное либо духовное; починъ, зачинъ, исконъ, зачало, источникъ, корень, рожденье, исходъ; противоп. *конецъ*. (...) || **Межа**, грань, рубежъ, край, пределъ вещи, предмета или части его, откуда, условно, измеряютъ предметъ, до конца его. (..) || Первый источникъ или причина бытія; сила рождающая, производящая, создающая. (...) || **Начала** [мн.], нравственныя основы въ человеке, правила и убежденія, по коим он живетъ: *Въ комъ начала искажены, тотъ не можетъ возродиться.* || Первыя и главныя истины науки, основанья ея, основы знанья. *Начала чистой математики.* || *Начало,* стихія, одна изъ из основныхъ составныхъ частей, принимаемыхъ какъ бы за неделимое, за нечто целое, однородное. *Человек состоитъ изъ двухъ началъ: духовнаго и плотского, - духовное же изъ умственнаго и нравственнаго.* || Стихія химическая, составная часть какого-либо тела, вещество простое или однородное, неразлагаемое. (...)" (*В.И.Даль*; 1801-1872), [83].

См. также *Конечное, Математика, Мера.*

**Невозможность** - неосуществимость, невыполнимость; противоположно *Возможность* (см.). См. раздел *СВЯЗИ, НЕОБХОДИМОСТЬ, СЛУЧАЙНОСТЬ.*

См. также разделы 2.3. и 2.4. и статьи *Вероятность математическая, Доверительный интервал, Значимость параметра, Измерение, Истинное значение, Категория, Корреляция, Мера, Отношение, Причинность, Случайная величина, Статистических гипотез проверка, Степеней свободы число, Трёх сигма правило, Эмпирическое распределение, Выборочное распределение.*

"**НЕЗАВИСИМЫЙ**, ни отъ кого или чего не зависящій; вольный, свободный, неподчинённый, ничемъ не связанный, самостоятельный, самъ себе господин. (...)" (*В.И.Даль*; 1801-1872) [82].

См. также *Зависимость, Независимость.*

**Независимость** двух *случайных событий* в *теории вероятностей* - факт приближённого равенства *частоты* $h_B$ появления случайного события $B$ **во всех** испытаниях и частоты его появления в тех испытаниях, в которых наступает случайное событие $A$. Независимость - одно из важнейших специфических *понятий* теории вероятностей.

Перейдём к вероятностям независимых случайных событий. Пусть $P(A)$ и $P(B)$ - вероятности двух случайных событий $A$ и $B$. Условную вероятность $P(B|A)$ события $B$ при условии осуществления события $A$ (с $P(A)>0$) определяют *формулой*:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \qquad (1.119)$$

где $P(A \cap B)$ - вероятность совместного осуществления событий $A$ и $B$. Событие $B$ называется **независимым** от события $A$, если $P(B|A)=P(B)$. Это равенство может быть записано в виде, свободном от условия $P(A)>0$) и *симметричном* относительно $A$ и $B$:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \qquad (1.120)$$

Очевидно, что если событие $B$ не зависит от $A$, то и $A$ не зависит от $B$. Таким образом, независимость случайных событий указывает либо на отсутствие *связи* между наступлением этих событий, либо на несущественный характер этой связи.

При определении независимости нескольких (более двух) случайных событий различают попарную и взаимную независимость. Аналогично определение независимости для нескольких *случайных величин*.

См. также *НЕЗАВИСИМЫЙ, Статистических гипотез проверка, Связей число, Степеней свободы число, Уровень значимости статистического критерия.*

**Незначимость** *параметра* - факт наличия нуля в *пределах доверительного интервала*.

См. также *Доверительное отклонение, Значимость параметра, Квадратичное отклонение, Стандартное отклонение, Стьюдента критерий.*

**Неизбежность** (неминуемость, неотвратимость, непредотвратимость; фатальность) - факт осуществимости *события* с *вероятностью* 1; *достоверное* событие. Другими словами, то, что невозможно избегнуть, предотвратить.

См. также раздел *СВЯЗИ, НЕОБХОДИМОСТЬ, СЛУЧАЙНОСТЬ* и статьи *Вероятностей теория, Измерение, Отношение, Причина, Причинность, Связь, Следствие, Случайное событие* и высказывание Жана Лабрюйера на с. 13.

**Необходимость** см. раздел *СВЯЗИ, НЕОБХОДИМОСТЬ, СЛУЧАЙНОСТЬ.*

См. также раздел 2.3., статью *Необходимость и случайность*, а также статьи *Больших чисел закон, Вероятность математическая, Детерминизм, Закон, Мера, Нормальное распределение, Причина, Следствие, СЛУЧАЙ.*

**Необходимость и случайность** - *соотносительные* философские *категории*, которые вносят ясность и чёткость в представление о характере *взаимозависимостей событий и явлений*, выражают *формы причинно-следственных связей, степень детерминированности системы, процесса*, явления. Связь между случайностью и необходимостью проявляется в *законе больших чисел*, в силу которого совместное действие *множества* случайных *факторов* приводит, при некоторых весьма общих условиях, к *результату*, почти не зависящему от случая. Другими словами, естественную **связь** между **случайным** и **необходимым** формализует закон больших чисел.

Необходимость - присущая реальности тенденция развития, обусловленная фундаментальными законами четырёхмерного пространства-времени, в котором существует наша цивилизация. *Случайность* - это форма проявления необходимости, сопровождаемая множеством несущественных, неустойчивых причинно-следственных связей *элементов системы* друг с другом и с внешним миром.

По степени детерминированности, *причинам* возникновения и формам проявления необходимость может быть классифицирована на следующие основные виды: 1. Необходимость, выражающая *объективно* существующие причинно-следственные связи природы и общества; 2. Необходимость, выражающая объективно существующие связи мышления; 3. Внутренняя необходимость, обусловленная *структурой* систем, *сущностью* явлений и процессов природы; 4. Внешняя необходимость, порождаемая окружающей *средой*; 5. Необходимость, более общего, фундаментального порядка, действие которой распространяется на сравнительно широкий круг явлений *действительности*; 6. Необходимость менее общего порядка, действие которой охватывает сравнительно узкий круг явлений; 7. Сложная необходимость, *определяющая* поведение *совокупности* объектов, сложных систем, которая выражается *статистическими закономерностями*; 8. Простая необходимость, определяющая поведение индивидуальных макрообъектов, которая выражается детерминистическими закономерностями (все законы и закономерности так называемых точных наук); 9. Необходимость, управляющая явлениями действительности, которая может одновременно описываться как *статистическими*, так и *детерминистическими* закономерностями (так называемые *детерминированно-стохастические* процессы).

Случайность также подразделяется на ряд видов: 1. Внутренняя случайность, *физически* связанная с данной необходимостью (например, методические *ошибки*); 2. Внешняя случайность, являющаяся посторонней по *отношению* к данной необходимости и вызываемая побочными *факторами* (например, случайные ошибки измерений); 3. *Объективная* случайность, которая вызывается влиянием различных объективных условий; 4. *Субъективная* случайность, вызываемая *неразумными* и глупыми действиями людей; 5. Благоприятные или неблагоприятные случайности, соответственно ускоряющие или тормозящие развитие явлений, *событий*, процессов.

Необходимость и случайность разрабатывались в философии и естествознании начиная с глубокой древности, истоки необходимости и случайности - мышление, природа, техника, технология и социальные сообщества. Необходимость и случайность не бывают в чистом виде, при определённых условиях эти категории тождественны, т.е. случайное необходимо, а необходимое случайно. Событие бывает случайным только по отношению к другому событию, необходимому. Подробнее см. [86].

См. также раздел *СВЯЗИ, НЕОБХОДИМОСТЬ, СЛУЧАЙНОСТЬ*, раздел 2.3., а также статьи *Больших чисел закон, Вероятность математическая, Детерминизм, Закон, Мера, Нормальное распределение, Причина, Следствие, СЛУЧАЙ*.

**Непрерывность** - одно из важнейших *математических понятий*, встречающееся в двух основных *концепциях* - непрерывность *множества* и непрерывность отображенияя. Исторически раньше подверглось математической *обработке* понятие непрерывного отображения, или *непрерывной функции*, чем логически предшествующее ему понятие непрерывности множества. См. также *Непрерывный*.

"**Непрерывный, непрестанный**, длящiйся безперечь, безъ перерыва, непереставая; безпрерывный, безпрестанный, безперемежный, безпромежный, безотдышный, неотступный, неуёмный, сплошной, всегдашнiй; || весьма часто возобновляемый, повторяющiйся. (...) **Непрерывность** ж. состоянье, свойство по прлг. (...)" (*В.И.Даль*; 1801-1872) [83].

**Несмещённая оценка** - *статистическая оценка параметра распределения вероятностей*, вычисленная по *результатам наблюдений*, лишённая систематической *ошибки*. Например, если результаты наблюдений $x_1$, $x_2, \ldots,$ $x_n$ являются взаимно *независимыми случайными величинами*, имеющими одинаковое *нормальное распределение*, заданное *плотностью*:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi б_x^2}} \cdot e^{-(M_x-x)^2/2б_x^2}, \tag{1.121}$$

с неизвестными параметрами $M_x$ и $б^2{}_x$, то *среднее арифметическое*:

$$\bar{x} = (x_1+x_2+\ldots+x_n)/n \tag{1.122}$$

будет *несмещённой оценкой* для $M_x$. Используемая ранее для оценки $б^2{}_x$ *выборочная дисперсия*:

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i-\bar{x})^2 \tag{1.123}$$

не является несмещённой оценкой, так как среднее арифметическое само зависит от *элементов выборки* (сравните с (1.245) и (2.14)). Для устранения смещения оценки нужно *степеней свободы число* (1.242) в выражении для $s^2{}_x$ уменьшить на единицу. Несмещённой оценкой для $б^2{}_x$ служит:

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i-\bar{x})^2. \tag{1.124}$$

Попроще, оценка является несмещённой, если при любом $n$ её математическое ожидание точно равно величине оцениваемого параметра.

См. также *Квадратичное отклонение*, *Стандартное отклонение*.

**Несоизмеримые и соизмеримые величины** см. *Величины соизмеримые и несоизмеримые*.

"**НОРМА** ж. лат. общее правило коему должно следовать во всехъ подобныхъ случаяхъ; образецъ или примеръ. ***Нормальное*** *состоянье*, обычное, законное, правильное, не выходящее изъ порядка, не впадающее ни в какую крайность. *Нормальный весъ, мера*, принятые за общее где либо правило и служащіе основаньем; единица веса и меры. *Нормальная*, в математ. прямая черта, проходящая черезъ точку касанія и отвесно къ касательной. (...)" (*В.И.Даль*; 1801-1872) [82].

"Норма - то, что встречается лишь изредка." (*Сомерсет Моэм*; 1874-1965).

**Норма** (<*лат.* norma - руководящее *начало*, правило, образец, *норма*) - 1. Узаконенное установление, признанный обязательным порядок, строй чего-либо. 2. Установленная *мера*, *средняя величина* чего-либо. Норма - в некоторой *степени относительное понятие* (этимологически, *термин*), например, *случайность* (*ошибки*) в *эксперименте* - норма, в психологии норма - относительна. См. также *Правило*.

**Нормализация** - 1. Установление *нормы*, образца. 2. Приведение к норме, к нормальному состоянию, урегулирование. 3. Вид термической обработки стали. 4. Нормализация или *нормирование переменных* - преобразование переменных (температура, давление, концентрация и так далее) к нормированному виду, при котором все переменные, *независимо* от *физической сущности* и *величины*, изменяются в пределах от нуля до единицы.

См. также *Величина параметрическая, Приведение переменных*.

**Нормаль** (< *лат.* normalis - прямой) к *кривой линии* (поверхности) в точке $x_0$ - *прямая*, проходящая через точку $x_0$ и перпендикулярная к *касательной* прямой (касательной плоскости) в точке $x_0$ кривой (поверхности). Плоская гладкая кривая имеет в каждой точке только одну *нормаль*, пространственная кривая имеет в каждой точке *бесконечное множество* нормалей, лежащих в так называемых нормальных плоскостях.

**Нормальное распределение**, распределение Гаусса - *распределение вероятностей случайной величины* $x$, описываемое *функцией*:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi б_x^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-(x-M_x)^2/2б_x^2} dx, \qquad (1.125)$$

где $M_x$ и $б^2{}_x$ - *математическое ожидание* и *дисперсия* соответственно. Частный случай *Пирсона распределений*, тип 11, (1.173), рис. 1.20,а.

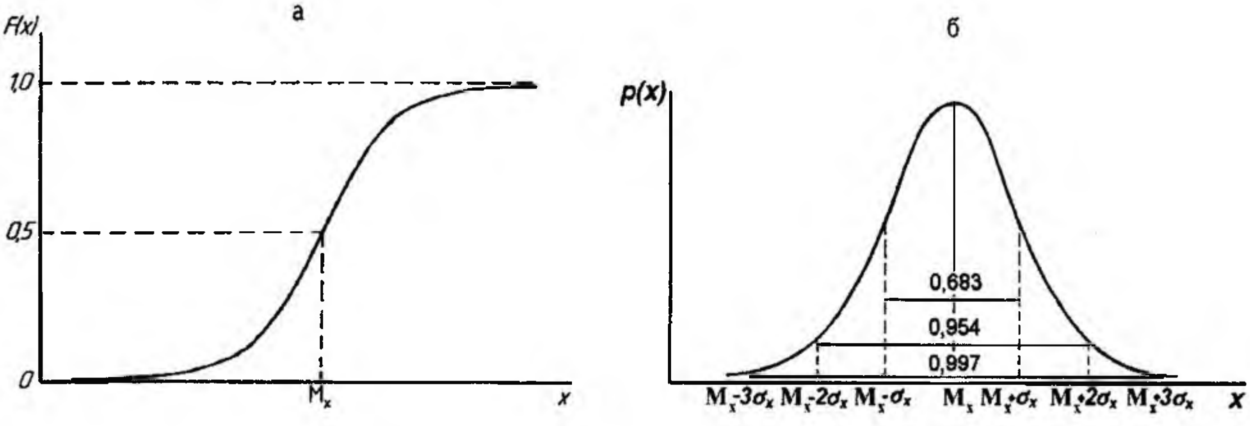



Рис.1.20. Функция $F(x)$ (а) и плотность $p(x)$ (б) нормального распределения (б) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)=1$; (площадь под кривой плотности вероятностей равна 1)

Согласно *закону* нормального распределения *вероятность* того, что случайная величина примет значение в *интервале* $M_x-б<X<M_x+б$ равна 0,683, вероятность попадания в интервал $M_x-2б<X<M_x+2б$ равна 0,954, а $P(M_x-3б<X<M_x+3б)=0,997$. Эти вероятности эквивалентны соответствующим площадям под *кривой* $p(x)$ (рис.1.20,б, 1.43). Последнее *соотношение* называется *правилом трёх сигма*. Что оно означает? То, что на практике при принятии решений относительно *возможных результатов событий* подчиняющихся закону нормального распределения пренебрегают возможностью отклонений от $M_x$, превышающих 3б (соответствующая вероятность меньше 0,003). См. также рис. 1.3, 1.43, 2.28.

Нормальное распределение также называют "*вторым законом распределения Лапласа*" в отличие от первого - *Лапласа распределения*, *законом Гаусса*, *Гаусса-Лапласа распределением*, *Лапласа-Гаусса распределением*. Нормальное распределение является предельным для *биномиального распределения* со *средним* значением $m_x$ и дисперсией $s^2{}_x$. Оно занимает *центральное* место в *статистике математической*, особенно в *ошибок теории*. Закон нормального распределения - предельный закон распределения *событий*, являющихся *результатом множества детерминированных причин* (*факторов*), каждая из которых по величине, по интенсивности не выделяется на фоне других (что и приводит к их взаимной компенсации, к появлению *симметрии кривой* распределения и к вышеупомянутым соотношениям вероятностей осуществления). *Сущность* закона нормального распределения объясняется *центральной предельной теоремой*, которая утверждает, что сумма большого числа совместно действующих *независимых* случайных величин в общем случае распределена по закону, близкому к нормальному. Это положение частично обосновано в разделе 2.6. и также отчасти иллюстрируют рис.1.34, 1.51, 2.10,б, 2.11, 2.14, 2.15, 2.24, 2.25, 2.28.

Нормальное распределение было впервые найдено в 1733 году А.Муавром (*A.de Moivre*; 1667-1754). Непосредственным поводом для исследования и доказательств *локальной* и интегральной предельных теорем послужило желание А.Муавра исследовать задачу о мужских и женских рождениях, а в более широкой перспективе - установить *критерий* для отличия *необходимого* (установленного провидением) от случайного [4, с.109]. Используя данные о частоте рождений мальчиков и девочек А.Муавр получил соотношение (18:17). В своих расчётах А.Муавр использовал приближённую *формулу* Дж.Стирлинга (*Stirling Jamas*; 1692-1770) (им же и уточнённую) для $n!$:

$$n! \approx Bn^n e^{-n}\sqrt{n}, \qquad \text{где } B=\sqrt{2\pi}. \qquad (1.126)$$

К сожалению, вплоть до рубежа XIX-XX веков заслуги А.Муавра явно недооценивались [4, с.107].

Позднее, в 1770-1771 гг. Даниил Бернулли (*Daniel Bernoulli*; 1700-1782) опубликовал мемуар, в котором, очевидно, не зная о результатах А.Муавра, независимо вывел локальную предельную теорему Муавра-Лапласа и составил первую небольшую таблицу нормального распределения. Как и А.Муавр, Даниил Бернулли исследовал *соотношение* мужских и женских рождений (использовав новые *статистические данные*) и даже отыскал его "истинное" значение (16:15) [4, с.110].

Некоторое время спустя нормальное распределение было снова открыто в 1809 году К.Гауссом (*Gauss Carl Friedrich*; 1777-1855) и в 1812 году П.Лапласом (*Laplace Pierre Simon*; 1749-1827). П.Лаплас доказал "теорему Муавра-Лапласа" заново, пользуясь *формулой* суммирования Эйлера-Маклорена, и именно его вывод стал широко известен [4, с.110]. Классические примеры возникновения нормального распределения как точного принадлежат К.Гауссу (закон распределения *ошибок наблюдений*) и Дж.Максвеллу (*Maxwell James Clerk*; 1831-1879) (закон распределения молекул *идеального* газа по скоростям). *Понятие* "нормальное распределение" принадлежит К.Пирсону (*Pearson Karl*; 1857-1936).

Примеры геологических характеристик, подчиняющихся закону *нормального распределения*: топография, плотность морского песка, показатель сферичности для заданного размера частиц, показатель окатанности галек разного размера, уровень воды в скважине в течение времени, плотность гидросети, удельный вес образцов из гранитного массива, плотность заполнения зёрен в песчанике, размеры беспозвоночных ископаемых организмов, угол наклона морского пляжа, угол склона речной долины, угол падения косой слоистости песчаника, пористость песчаника, содержание минералов в породах, содержание влаги в осадочных породах, содержание некоторых химических элементов [39].

См. также *Лапласа интеграл, Ошибок теория, Причина, Причинность, РАСПРЕДЕЛЯТЬ, Статистическая оценка, Шум, ШУМЬ.* Подробнее см. раздел 2.8.

**Нормальное** состояние см. *Норма.*

**Нормирование переменных** - частный случай преобразования *физических величин* к *безразмерному* виду путём деления исходной *переменной* величины на аналогичную постоянную. *Локализация* области варьирования *фактора* производится путём нормирования переменных, при этом *минимальное значение* фактора принимается за ноль, а *максимальное* за единицу. В *результате* безразмерная нормированная величина изменяется в *интервале* от нуля до единицы:

$$z_j = \frac{x_j - x_j^{min}}{x_j^{max} - x_j^{min}}. \qquad (1.127)$$

Например, в задачах оптимизации технологических *процессов* нормирование переменных позволяет перейти в факторное пространство, в котором все переменные находятся в положительной области и изменяются от нуля до единицы.

См. также *Нормализация, Стандартизация случайной величины* и раздел 2.7.

**Нулевая гипотеза** - *гипотеза* об отсутствии различия между *параметрами*, характеризующими те или иные *свойства выборки*. *Критерий*, конструируемый из этих параметров $\theta^{оп}$, сравнивается с *критическим* $\theta^{\alpha}$, вычисляемым *независимым* путём. Область значений $\theta^{оп}$, меньшая критического $\theta^{\alpha}$, считается областью принятия нулевой гипотезы (рис. 1.21. См. также рис. 1.8).

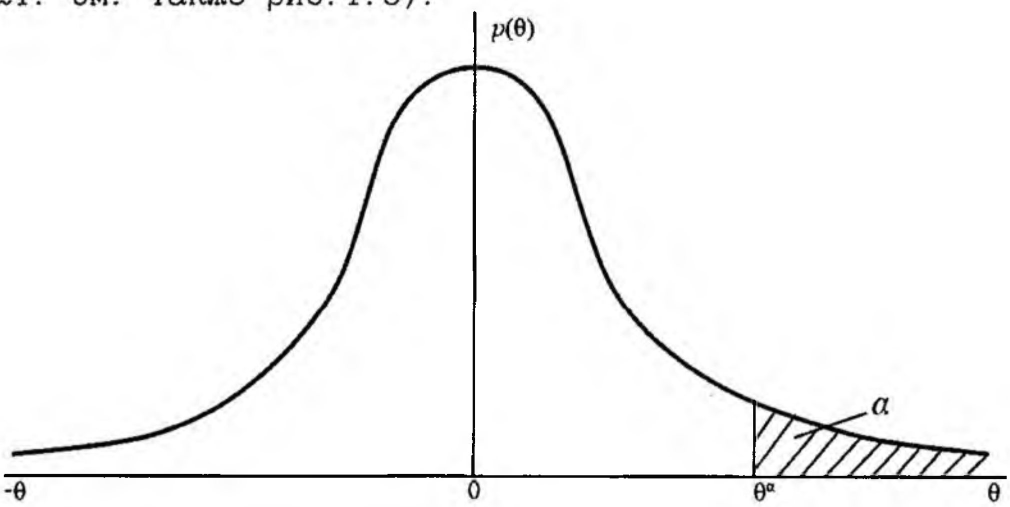



Рис.1.21. Плотность вероятностей гипотетического критерия $\theta$. Заштрихована критическая область, составляющая $\alpha$ площади под кривой (общая площадь под кривой плотности вероятностей равна 1)

Например, при *определении оценки* $m_x$ неизвестного *математического ожидания* $M_x$ подходящей нулевой гипотезой будет предположение об отсутствии различия между нулём и *арифметическим средним выборки*, $x_{ср}$, т.е. $H_0: x_{ср}=0$:

$$\bar{x} - \frac{s_x}{\sqrt{n}} \cdot t < 0 < \bar{x} + \frac{s_x}{\sqrt{n}} \cdot t, \qquad (1.128)$$

где $t$ - *Стьюдента критерий* (сравните с (1.74)). Критерий конструируется в виде *отношения арифметического среднего* $x_{ср}$ и его *квадратичного отклонения* $s_x$:

$$t_{\nu}^{оп} = \frac{(\bar{x}-M_x)}{s_x}\sqrt{n}\,. \qquad (1.129)$$

где $\nu=n-1$ - *степеней свободы число* (сравните с (1.69), (1.70), (1.138), (1.235)). В условиях нулевой гипотезы $M_x=0$ и *опытный* критерий Стьюдента вычисляется по *формуле*:

$$t_{\nu}^{оп} = \frac{(\bar{x}-0)}{s_x}\sqrt{n} = \frac{\bar{x}}{s_x}\sqrt{n}\,. \qquad (1.130)$$

Опытный критерий Стьюдента сравнивается с критическим $t^{\alpha}$, определяемым *распределением* Стьюдента, и если $t^{оп}<t^{\alpha}$, то нулевая гипотеза с *доверительной вероятностью* $P=1-\alpha$ принимается (рис.1.22).

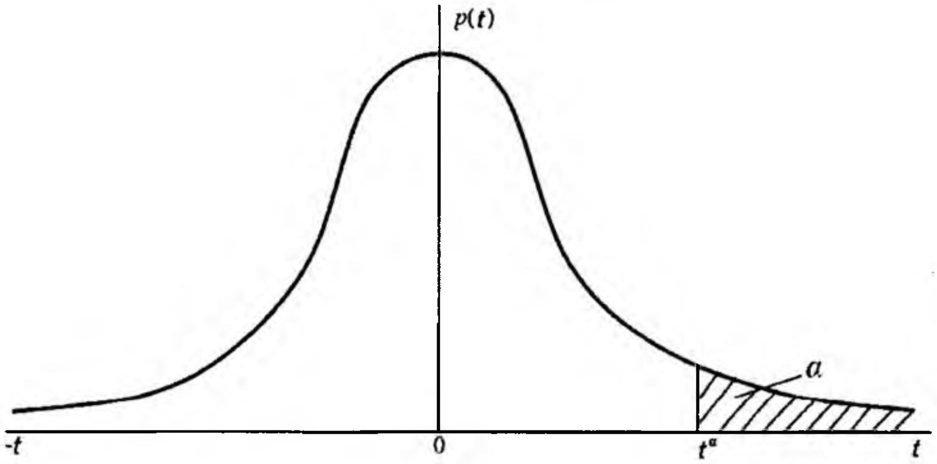



Рис.1.22. Плотность вероятностей $t$-критерия.
Заштрихована критическая область, составляющая $\alpha$ площади под кривой (общая площадь под кривой плотности вероятностей равна 1)

Наличие или отсутствие *линейной связи* между *случайными величинами* $X$ и $Y$ проверяется с помощью *коэффициента корреляции* $\rho_{xy}$. Нулевая гипотеза предполагает, что две *переменные* независимы и любое ненулевое значение $r$ возникло из-за случайных *флуктуаций*, т.е. $H_0:\rho_{xy}=0$. Альтернативной гипотезой будет $H_1:\rho_{xy}\neq0$. Опытный *Стьюдента критерий* вычисляется по формуле:

$$t^{оп} = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}\,. \qquad (1.131)$$

Опытный критерий Стьюдента (т.е. критерий, вычисленный по *результатам эксперимента*) сравнивается с табличным для *числа степеней свободы* $\nu=n-2$ и **принимаемого** исследователем *уровня значимости* $\alpha$ (рис.1.22).

При проверке *уравнения* регрессии на *адекватность* проверяется нулевая гипотеза $H_0$ об отсутствии различия между *генеральной* опытной *дисперсий* $\sigma^2_{оп}$ и *дисперсией адекватности* $\sigma^2_{ад}$, - $H_0: \sigma^2_{ад}=\sigma^2_{оп}$. Для того чтобы подтвердить эту гипотезу, *необходимо* доказать однородность выборочных дисперсий $s^2_{ад}$ и $s^2_{оп}$, а для того чтобы отвергнуть - доказать значимость различия $s^2_{ад}$ и $s^2_{оп}$. В условиях нулевой гипотезы $\sigma^2_{ад}=\sigma^2_{оп}$, $\sigma^2_{ад}/\sigma^2_{оп}=1$ (см. также (1.256)) и *Фишера распределение* может быть непосредственно использовано для оценки отношения выборочных дисперсий $s^2_{ад}/s^2_{оп}$:

$$F^{оп}_{\nu_1,\nu_2} = \frac{s^2_{ад}}{s^2_{оп}}. \qquad (1.132)$$

Если $F^{оп}$ меньше критического $F^{\alpha}$, то дисперсии однородны (рис.1.23).

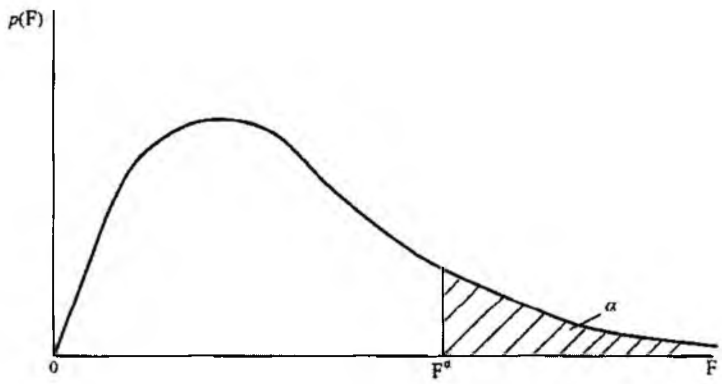



Рис.1.23. Плотность вероятностей критерия Фишера F. Заштрихована критическая область, составляющая $\alpha$ площади под кривой (общая площадь под кривой плотности вероятностей равна 1)

См. также *Правило определения критического значения статистического критерия, Статистических гипотез проверка, Уровень значимости.*

# О

"**ОБОЗНАЧАТЬ**, ***обозначить*** или ***означать***, ***означить*** что, по(от, на)мечать, отличать какими-либо приметами, заметками; письмомъ или знаками. *Обозначать* ближе къ помечать, ставить знакъ; *означать* - къ знаменовать, значить. (...) || появляться, высказываться, подавать знакъ или весть о себе. (...)" (*В.И.Даль*; 1801-1872) [82].

См. также *Категория, Определение, ОПРЕДЕЛЯТЬ, ПОНИМАТЬ, Понятие, Состоять, Суждение, Термин технический.*

**Обработка результатов экспериментов** - *математические процедуры* по преобразованию *числовой информации*, получаемой в *результате экспериментов*, с целью определения *распределения закона*, наличия и тесноты *связи случайных величин*, восстановления *зависимости*, вычисления *параметров*, *констант*, *коэффициентов уравнений* и проверки *статистических гипотез*. Подробнее см. *Данных обработка математическая*.

См. также *Анализ, Величина, Вероятность, Веса результатов измерений, Воспроизводимость, Выборка представительная, Выборка случайная, Данные, Дисперсия, Дисперсия воспроизводимости, Измерение, Математическое ожидание, Метод, Наблюдение, Ошибок теория, Погрешности измерений, Проба, Случайная величина, Случайное событие, Событие, Совокупность, Стандартное отклонение, Статистика математическая, Фактор, Функция, Эмпирический метод.*

"**ОБШИБАТЬ**, ***обшибить*** что, обить, околотить, обломать ударомъ, колотя. (...) *Ошибаться, ошибиться*, погрешить въ чемъ; думать, говорить или делать что ошибочно, не такъ какъ есть, какъ должно, неверно, неправильно. *Тотъ не ошибается, кто ничего не делает. Умелъ ошибиться, умей и поправиться. Ошибаться - человеческое дело, а не сознаваться - дьявольское. Ошибся, что ушибся: впредь наука! Ошибайся, да сознавайся. Ошибиться въ счете*, обчесться. *Ошибся в письме*, описался, или лучше не зналъ. *Ошибся въ мерке*, обмерялся. *Ошибся въ разсчете* или *въ надежде*, не то сталось, чего чаял. (...) ***Ошибка*** ж. ***ошибинка*** *кал.* погрешность, неправильность, неверность, промахъ, огрехъ; обмолвка, либо недоразуменье; дурное, ошибочное распоряженье или поступокъ; неумышленный проступокъ, или невольное, ненамеренное искаженье чего либо. *Ошибка не обманъ. Ошибка в фальшь не ставится.* (...) *Она ошибочка сделала, некстати забеременела.* (...) ***Ошибочный***, къ ошибке относящ.; неверный, неправильный, погрешный. (...)" (*В.И.Даль*; 1801-1872), [82].

См. также *ВОСПРОИЗВОДИТЬ, Мера, Нормальное распределение, Оценка, Ошибок теория, Шум, ШУМЪ.*

**Общая мера** см. *Мера общая.*

**Объект** (*лат.* objecio - бросаю вперёд, противопоставляю; *позднелат.* objectus - лежащий впереди, находящийся впереди, предмет, *явление*, зрелище) - 1. Внешний мир, существующий вне нас и *независимо* от нашего сознания, являющийся *предметом* познания, практического воздействия *субъекта*. 2. Предмет, *явление*, на который направлена какая-либо деятельность. Объект выступает как часть объективной реальности, которая находится во взаимодействии с субъектом.

"Убедительность только в субъективности, искать объективность - значит заблуждаться. Истина есть субъективность." (*Сёрен Кьеркегор*; 1813-1855).

**Объективность** (*лат.*, см. *Объект*) - 1. *Действительное, не зависимое* от воли и сознания человека существование мира, предметов, их *свойств* и *отношений*; принадлежность к объективной реальности. 2. Содержание знания, соответствующее, *адекватное* объекту. 3. Соответствие объективной действительности, беспристрастность, непредвзятость. См. также *Истина*.

**Объективный** (*лат.*, см. *Объект*) - 1. Существующий вне и *независимо* от сознания, присущий самому объекту или соответствующий ему. 2. Соответствующий объективной *действительности*, беспристрастный, непредвзятый. См. также *Истина*.

"Всё действительное содержит внутри себя противоположные определения и, следовательно, познание, а точнее, определение предмета в понятиях означает познание его как конкретного единства противоположных определений." (*Г.Гегель*; 1770-1831).

**Определение** (*научн.*) - 1. Формулировка, объяснение научного термина, *понятия, явления, процесса, объекта*, раскрывающее его *физическую сущность*, содержание, смысл. 2. Задание размеров, границ, *пределов, начала и конца*, констатация известных *причин*, предположение каких-либо *причинно-следственных связей*. 3. Вычисление той или иной физической *величины, коэффициента, параметра* и т.д.

"Определение - исходный пункт и результат мышления. Определить - это сделать всё, что только может рассудок, чтобы подготовить озарение понимания... Всякое определение какую-то истину в себе содержит (в отличие от умозаключений, которые только и могут быть правильными и неправильными). Истина - не в умозаключениях, а в определениях." (*Александр Круглов*), [87]. Наиважнейшее значение имеет интеллектуальная *среда* - среда, способствующая мышлению. Что и как человек думает, какие он строит *мысленные модели*, имеет исключительное значение.

См. также *Диалектика, ДІАЛЕКТИКА, Категория, ОБОЗНАЧАТЬ, ОПРЕДЕЛЯТЬ, ПОНИМАТЬ, Состоять, Суждение, Термин технический.*

**"ОПРЕДЕЛЯТЬ, *определить*** что, решать, постановлять, делать решенье, приговоръ, постановленье властью. (...) || Что, чемь, объяснять, изъяснять коротко сущность, отличительные признаки чего. *Чемъ проще и обиходнее вещь, тем труднее определить ее общимъ и обиходным порядкомъ.* (...)|| Что, почему, решить задачу, узнать, вычислить. (...) ***Определенье*** ср. дейст. по гл. въ разн. знач. и || сущность, итогъ и произведенье его. (...) *Определенье научное*, краткое означенье сущности, признаковъ предмета. (...)" (*В.И.Даль*; 1801-1872) [82]. См. также *Определение*.

**Опытная дисперсия** см. *Дисперсия воспроизводимости*.

**Опыт** - "**ОПЫТЫВАТЬ, *опытать*** кого, опросить, допросить, снять допросъ, показаніе. (...) || что, испытать, опробовать, изведать, искусить. (...) ***О'пытъ*** м. **опытъ,** опытка, испытанье, проба, искусъ, попытка, изведка; || показаніе другимъ каких либо явленій, для обнаружения силъ природы и действій ихъ. (...) *У насъ физику читают съ опытами, делаютъ опыты,* объясняютъ ученіе явленіями, доступными чувствамъ. **О'пытный** *человекъ*, искусившійся опытом, бывалый, знающій и умеющій, жившій, видавшій, делавшій много, привычный къ какой работе, сведущій не только на словах, но и на деле. (...) **Опытень** м. *прм.* **опытокъ** м. *влгд.* проба, обращикъ, частица какого либо товара напоказ, для видимости качества его. (...)" (*В.И.Даль*; 1801-1872), [82].

См. также *Эксперимент*, *Эмпиризм*, раздел *СВЯЗИ, НЕОБХОДИМОСТЬ, СЛУЧАЙНОСТЬ*, раздел 2.1.

**Основная гипотеза** - *гипотеза* о непротиворечии *эмпирического распределения нормальному закону*.

См. также *Правило определения критического значения статистического критерия*, *Статистических гипотез проверка*, *Уровень значимости*, *Хи-квадрат критерий*, *Степеней свободы число*.

> "Относительность - это принцип, относительно верный для мира физического и относительно ложный в применении к миру этическому." (*Виктор Кротов*; р. 1946).

**Отношение** - философская *категория*, *форма* всеобщей взаимосвязи *объектов*, *субъектов*, *событий*, *явлений*, *процессов* и *величин* в природе, обществе и мышлении. Отношения объектов, субъектов, событий, явлений, процессов и величин исключительно многообразны и охватывают *математику*, *физику*, физиологию, химию, логику, философию, социологию, лингвистику, природу, технику, технологию и многое другое. Например, *абсолютный* - относительный, часть и целое, равенство и неравенство, *зависимость* - *независимость*, *невозможность* - *случайность* - *неизбежность*, *причина* и *следствие*, *причинность* и следствие, *симметрия* и *асимметрия*, отношение содержания и формы, отношения *качества* (лучше - хуже), отношения *количества* (больше - меньше), отношения ориентации, относительность систем, характеристика объекта в *понятии* лишь в одном каком-либо отношении, *структурность* и системность в отношении какого-либо уровня, *множество* условных величин, обстоятельств, *параметров*, *коэффициентов* и т.д. Даже *норма* - *понятие* относительное. Наконец, всеобщая *теория* относительности Альберта Эйнштейна (*A.Einstein*; 1879-1955).

1. (*лог.*) - *аналогия*, *анализ* и *синтез*, причина и следствие, причинность и следствие, "...больше, чем...", "...включено в...", "...влечёт...", "...исключает..." и др.

2. (*соц.*) - руководство и подчинение, партнёрство, дружба и вражда, любовь и ненависть и т.п., а также особые *моменты* в межличностных и социальных отношениях (*точка* зрения, точка отправления, попасть в самую точку, дойти (довести) до точки).

3. (*мат.*) - отношение двух *чисел* или алгебраических выражений (вычитание и деление, часть и целое, *пропорция*), *функциональное* отношение (*аргумент* (*фактор*) и *функция*, следование во времени и случайность), величины *соизмеримые* - *несоизмеримые*, величины *нормированные*, кодированные и *стандартизованные*. *Выборочное среднее значение совокупности* всегда относительно. Большинство *статистических критериев*, по существу, являются *предельным* соотношением параметров, характеризующих те или иные *свойства* совокупностей. *Число*, по существу, отношение количества к единице. *Частота события* есть отношение числа исходов, $n_i$, "благоприятствующих" данному *событию*, к общему числу *равновозможных* исходов, $n$, - $h_i=n_i/n$. *Вероятность* есть *предел* этого отношения: $h_i=n_i/n \rightarrow p_i$ при $n \rightarrow \infty$.

4. (*физ.*) - отношения двух *физических величин*: параметрические величины (параметрические время, концентрация, давление, объём, температура), *нормированные* величины (*вероятности* событий, *коэффициент* полезного действия, относительная влажность, массовая доля, мольная доля, объёмная доля), приведённые величины (относительная молекулярная масса, относительная плотность и др.), в т.ч. параметрические величины. Отношение систем отсчёта, скорости и др. Крите-

рии подобия характеризуют соотношения сил, действующих в системе (движущейся жидкости или газе) или соотношения потоков массы, энергии и т.п. *Константы* подобия - также соотношения физических величин, *определяющих* процесс.

*Результаты измерений* всех физических величин относительны и по точности, и по единицам измерений; относительны шкалы практически всех измерительных приборов. Температурные шкалы Кельвина, Ранкина, Реомюра, Фаренгейта и Цельсия относительны применяемого термометрического вещества и соответствующих реперных точек (необходимо заметить, что шкалы Кельвина и Ранкина называются *абсолютными*, поскольку отсчитывается от абсолютного нуля, - температуры, при которой прекращается тепловое движение атомов и молекул). Различают также *ошибки* абсолютные и относительные. Понятия "частица" и "комок" относительны. Скорость течения жидкости в канале произвольного сечения относительна и зависит от объёмного расхода, места рассмотрения, параметров жидкости и *метода* расчёта. Например, средняя скорость течения жидкости в скважине при проведении спуско-подъёмных операций относительно бурильной колонны больше, чем относительно стенки скважины. Но и сама скорость течения жидкости изменяется по кольцевому сечению по достаточно сложному *закону*.

Можно также упомянуть очень важные соотношения единиц измерения различных систем единиц измерений физических величин. Более того, физическая величина, по существу, является отношением к принимаемой единице измерения физической величины (неважно, основной или производной).

*Связь*, по существу, соотношение между *причиной* и *следствием*.

5. (*лингв.*) - значение какой-либо языковой *формы*, её роль в системе языка, определяемая соотношением с другими формами.

См.также *Адекватность, Безразмерная физическая величина, Бесконечность, Величина физическая, Вероятность, Веса результатов измерений, Детерминизм, Дисперсия, ИДЕЯ, Категория, Концепция, Линеаризация, Логарифм, Математика, Математическое ожидание, Мера, Момент, Объективность, Относительная физическая величина, Ошибок теория, Переменная, Понятие, Правило определения критического значения статистического критерия, Пропорция, Связь, Симметрия, Среднее, среднее значение, Суждение, Функция, Экспоненциальная функция.*

**Отрицательное биномиальное распределение** см. *Паскаля распределение.*

**Оценка** - *количественная* характеристика *параметра*, получаемая по *результатам выборки*. Проблема оценки неизвестного параметра является одной из *центральных* в *теории обработки* результатов *наблюде-*

*ний*. К оценкам параметров предъявляется комплекс требований. Важнейшие среди них: *несмещённость*, *состоятельность* и *эффективность*. Важно отметить, что в отличие от *математического ожидания* (некоторой неизвестной *абстрактной величины*, *меры* центральной тенденции распределения случайной величины) оценок математического ожидания *множество*, например, *арифметическое взвешенное среднее*, *арифметико-геометрическое среднее*, *арифметическое среднее*, *взвешенное степенное среднее*, *гармоническое среднее*, *геометрическое среднее*, *среднее квадратичное*, *среднее кубическое*, а также *мода*, *медиана* и *начальный момент* первого порядка:

$$m_x = m_1 = \int_{x_{min}}^{x_{max}} xp(x)\,dx. \qquad (1.133)$$

Очевидно, что разные виды средних различаются; отсюда возникает **проблема** *правильного* выбора *формы* среднего значения. Решающую роль здесь играет *физическая сущность объекта* (*процесса*, *явления*), а также интуиция и добросовестность исследователя.

См. также *Концепция, Ошибка, Ошибок теория, Среднее, среднее значение.*

**Ошибка** *в толковании В.И.Даля* см. *ОБШИБАТЬ*.

**Ошибка второго рода** при *статистических гипотез проверке* – принятие неверной *нулевой* (*основной*) *гипотезы* $H_0$ и отклонение какой-либо верной альтернативной гипотезы $H_1$. *Вероятность* допустить *ошибку* второго рода равна *доверительной вероятности P*. Эта ошибка может быть сведена к минимуму с помощью функции *мощности критерия*.

**Ошибка первого рода** при *статистических гипотез проверке* - отклонение верной *нулевой* (*основной*) гипотезы $H_0$. *Вероятность* допустить *ошибку* первого рода равна принимаемому *уровню значимости* $\alpha$.

См. также *Мощность критерия.*

"Промах мгновенен, длинно раскаяние."
(*И.К.Ф.Шиллер*; 1759-1805).

**Ошибок теория** - раздел *статистики математической*, охватывающий *методы анализа* надёжности, достоверности *экспериментальных данных* и вычисления *оценок* неизвестных *параметров*. *Измерения*, выполняемые в *процессе* экспериментальных исследований, как правило, дают *результаты* с *ошибкой*. Известны две методики *определения* искомых параметров в процессе исследований. По первой искомая *величина* непосредственно измеряется или вычисляется по результатам нескольких косвенных измерений (например, измерение размеров, массы, объёма тел; определение содержания примесей, концентрации вещества, физико-химических характеристик и т.п.). В этом случае для повышения точности определения неизвестной величины, а также для *оценки* точности эксперимента как прямые, так и косвенные измерения можно произвести многократно. Вторая методика, более высокого порядка, состоит из двух этапов, так называемой экспериментальной части и расчётной. Она используется при исследовании процессов, развивающихся во времени и (или) в пространстве. В течение развития процесса производится измерение тех или иных *физических величин*, которые и подвергаются в дальнейшем *математической обработке*. Обработка может быть достаточно сложной, дифференциальной и (или) интегральной, а результатом может быть всего лишь один параметр (например, при исследовании скорости химической реакции в лабораторном химическом реакторе через определённые промежутки времени из реактора отбирают пробы для анализа исходных веществ и продуктов реакции; по результатам анализов строятся так называемые кинетические *кривые*, которые и подвергаются дифференциально-интегральной обработке, результатом которой является *константа* скорости химической реакции). Естественно, что многократное повторение подобных сложных экспериментов возможно только в исключительных случаях, но *независимо* от методики, первой или второй, возникает задача об установлении соответствия между неизвестным искомым параметром и его оценкой, полученной в результате экспериментального исследования.

Различают два основных источника *ошибок*: несовершенство контрольно-измерительных приборов и ошибки, обусловленные органами чувств человека и его нервной системой. Выявлением, устранением и учётом первых занимается *ошибок теория*. Она же уделяет внимание и вторым, но вторые в некоторых случаях слабо поддаются количественному анализу. С приборами более или менее ясно - принципы работы (анализа), различные классы точности, культура на заводах изготовителях, поверка приборов, тесты и т.д. Несколько сложнее с органами чувств человека - без них не обойтись. Например, определение яркости и цветности источника излучения (объекта) связано с физиологическим процессом (в сетчатке два вида рецепторных клеток - колбочки и палочки) и потому носит субъективный характер [30]. Относительное несовершенство органов чувств человека иногда корректируют оцифровкой аналогового сигнала и т.п. способами. Хуже обстоят дела с нервной системой - "Душа человека - дело тонкое".

Особенностью экспериментальной части химических, химико-биологических, медицинских и др. наук является значительная доля процедур, выполняемых непосредственно исследователем. И на первый план выходят ошибки манипуляций и приёма, хранения, переработки и передачи информации. Ошибки органов чувств достаточно очевидны (смотрел и не заметил, наблюдал и пропустил событие, слушал, но не расслышал и т.п.), также очевидны ошибки мышления (забыл, оговорился, не заметил, споткнулся, неадекватная реакция... и т.п. Вся наша жизнь - череда ошибок мышления и удач - тоже мышления). Причин множество: усталость нейронов и нейронных ансамблей (в т.ч. эффекты торможения), влияние на процессы мышления химических веществ, вызывающих заторможенность или изменение сознания (нейролептики, транквилизаторы, препараты, обладающие седативным эффектом и т.п., и, наконец, алкоголь, наркотики и т.п.), нечёткость передачи сигналов по нейронным цепям, нечёткость функционирования одного из важнейших элементов ЦНС - аксон-синапс-нейрон и др., ухудшение взаимодействия оперативной и долговременной памяти и т.п. Когда ошибки мышления суммируются с ошибками приборов, возникают грубые ошибки, в остальных случаях возникает конкуренция влияния на результат измерения ошибок приборов, органов чувств и психики человека.

Различают три основных вида ошибок: систематические, грубые и *случайные*. Систематические ошибки постоянно либо преувеличивают, либо преуменьшают результаты измерений и являются *следствием* совершенно определённых *причин* (неверные показания приборов и несовершенство экспериментальной установки или методики). Оценка систематических ошибок производится с помощью методов, выходящих за рамки математической статистики. Грубые ошибки возникают в результате *неправильного* чтения показаний измерительных приборов, усталости зрения, снижения внимания, дрожания рук и т.п. Результаты измерений, содержащие грубые ошибки, как правило, резко отличаются от других и поэтому часто бывают хорошо заметны. Случайные ошибки происходят от различных случайных причин, действующих при каждом из отдельных измерений непредвиденным образом то в сторону уменьшения, то в сторону увеличения результата.

Методами анализа грубых и случайных ошибок занимается *ошибок теория*. Основными задачами теории ошибок являются: установление *законов распределения* случайных ошибок, отыскание статистических оценок неизвестных величин по результатам измерений, определение *погрешностей* таких оценок и выявление и устранение грубых ошибок.

Пусть в результате $n$ *независимых* измерений некоторой неизвестной величины $M_x$ получены значения $x_1$, $x_2, \ldots,$ $x_n$. Тогда разности:

$$\delta_1 = x_1 - M_x, \quad \delta_2 = x_2 - M_x, \quad \ldots, \quad \delta_n = x_n - M_x \tag{1.134}$$

называются *истинными* ошибками; в *понятиях вероятностной* теории ошибок все $\delta_i$ трактуются как случайные величины, *независимость* измерений *понимается* как взаимная независимость случайных величин $\delta_1$, $\delta_2, \ldots,$ $\delta_n$. При этом измерения называются равноточными (в широком смысле), если величины $\delta_i$ имеют одинаковое распределение. Таким образом, истинные ошибки равноточных измерений по существу являются *независимыми* одинаково распределёнными *случайными величинами*. При этом *математическое ожидание* случайных ошибок $M_\delta = E\delta_1 = E\delta_2 = \ldots = E\delta_n$ называется **систематической ошибкой**, а разности $\delta_1 - M_\delta$, $\delta_2 - M_\delta, \ldots,$ $\delta_n - M_\delta$ - **случайными ошибками**. Очевидно, что отсутствие систематической ошибки означает $M_\delta = 0$, а истинные ошибки $\delta_1$, $\delta_2, \ldots,$ $\delta_n$ становятся случайными ошибками. Величину $1/\sigma\sqrt{2}$, где $\sigma$ - *квадратичное* отклонение $\delta_i$, называют *мерой* точности (при наличии систематической ошибки *мера* точности выражается *отношением* $1/\sqrt{2(M^2_\delta + \sigma^2)}$). Равноточность измерений в узком смысле понимается как идентичность меры точности всех результатов измерений. Наличие грубых ошибок означает нарушение равноточности (как в широком, так и в узком смысле) для некоторых отдельных измерений.

В качестве оценки неизвестной величины $M_x$ обычно принимают *среднее арифметическое* из результатов измерений $x_1$, $x_2, \ldots,$ $x_n$:

$$x_{cp} = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n, \tag{1.135}$$

а разности $\Delta_1 = x_1 - x_{cp}$, $\Delta_2 = x_2 - x_{cp}, \ldots,$ $\Delta_n = x_n - x_{cp}$ называют кажущимися ошибками. Выбор $x_{cp}$ в качестве оценки для $M_x$ основан на том, что при достаточно большом *числе* $n$ равноточных измерений, лишённых систематической ошибки, оценка $x_{cp}$ с *вероятностью*, сколь угодно близкой к единице, сколь угодно мало отличается от неизвестной величины $M_x$; оценка $x_{cp}$ лишена систематической ошибки (оценки с таким *свойством* называют *несмещёнными оценками*); *дисперсия* этой оценки равна:

$$DX_{cp} = E(x_{cp} - \mu)^2 = \sigma^2/n. \tag{1.136}$$

Практически очень часто случайные ошибки $\delta_i$ подчиняются распределениям, близким к *нормальному*. В этом случае распределение среднего арифметического, $x_{ср}$, мало отличается от нормального распределения с математическим ожиданием $M_x$ и дисперсией $б^2/n$. Если распределение величин $\delta_i$ нормально, то дисперсия всякой другой несмещённой оценки для $M_x$, например, *медианы*, не меньше $DX_{ср}$. Если же распределение истинных ошибок, $\delta_i$, не подчиняется *закону* нормального распределения, то *возможна* другая несмещённая оценка для $M_x$ меньше $DX_{ср}$.

*Оценка* неизвестной *генеральной* дисперсии $б^2{}_x$, называемая *дисперсией воспроизводимости*, $s^2{}_{воспр}$, производится по *формуле*:

$$s^2{}_x = s^2{}_{воспр} = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{ср})^2. \qquad (1.137)$$

В формуле (1.137) $s^2{}_x$ является несмещённой оценкой для $б^2$, т.к. $Es^2{}_x=б^2{}_x$. См. также (1.123), (1.124), (1.203), (1.245).

Если случайные ошибки $\delta_i$ имеют *нормальное распределение*, то отношение:

$$t = \frac{(x_{ср}-M_x)\sqrt{n}}{s_x}, \qquad (1.138)$$

подчиняется *распределению Стьюдента* с $n$-1 *степенями свободы*. Это является основанием для оценки погрешности приближённого равенства $\mu \approx X_{ср}$. См. также (1.69), (1.70), (1.129), (1.130).

Величина

$$X^2=(n-1)s^2/б^2 \qquad (1.139)$$

при тех же предположениях имеет распределение *хи-квадрат* с $n$-1 степенями свободы (см. также (1.267)). Это позволяет оценить погрешность приближённого равенства $б \approx s$. *Относительная* погрешность $|s-б|/s$ не превосходит числа $\varepsilon$ с вероятностью:

$$p=F(z_2,\ n-1) - F(z_1,\ n-1), \qquad (1.140)$$

где $F(z,\ n-1)$ - *функция* распределения хи-квадрат:

$$z_1 = \frac{\sqrt{n-1}}{1+\varepsilon}; \qquad (1.141)$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{n-1}}{1-\varepsilon}. \qquad (1.142)$$

См. также *ВОСПРОИЗВОДИТЬ*, *Мера*, *Нормальное распределение*, *Шум*, *ШУМЬ*. Подробно см. например, [27, 30, 58].

# П

**Параллельные измерения** - многократные *измерения*, анализы одной и той же *физической величины* в одинаковых, повторяющихся условиях с целью *оценки* точности *эксперимента* или с целью повышения точности оценки неизвестного *математического ожидания*.

См. также *Дисперсия воспроизводимости, Ошибок теория, Параллельные опыты.*

**Параллельные опыты** - многократная постановка *экспериментов*, осуществляемая в строго одинаковых, повторяющихся условиях.

См. также *Дисперсия воспроизводимости, Параллельные измерения, Ошибок теория.*

**Параметр** (< *греч.* **παραμετρεω** - мерить что-либо, сопоставляя его с чем-либо, измерять что-либо по чему-либо, сравнивать что-либо по чему-либо.- *А.Д.Вейсман;* (1834-1913), [80]) - *величина*, значения которой служат для различения *элементов* некоторого *множества* между собой. В *зависимости* от конкретного множества различают следующие параметры.

В *статистике математической* параметр - характеристика *совокупности*, например, *математическое ожидание*, *дисперсия*, *момент* β-того порядка. Параметр совокупностей обычно *обозначают* греческими буквами в отличие от их *оценок*, вычисляемых по *результатам выборок* и обозначаемых латинскими буквами.

В *математическом моделировании* параметр - величина, значения которой служат для конкретизации той или иной математической модели. В *экспериментально-статистических моделях* параметрами будут называться, например, *коэффициенты* $b_0$, $b_1$, $b_2, \ldots,$ $b_k$ *уравнения* $y=b_0+b_1x_1+b_2x_2+\ldots+b_kx_k$.

Параметр в *физическом* моделировании, в технике и технологии - величина, являющаяся существенной характеристикой *системы*, технического устройства, *процесса, явления*. Например, в гидромеханических процессах такими величинами являются скорости течения жидкостей и газов, скорости движения твёрдых частиц, коэффициент динамической вязкости жидкой фазы, плотности жидкой и твёрдой фаз, размеры и коэффициент *формы* частиц твёрдой фазы и др.; для тепловых процессов такими параметрами являются удельные теплоёмкость и теплопроводность, температурный напор и т.д.; в массообменных процессах параметрами являются коэффициенты молекулярной диффузии, коэффициенты массоотдачи и массопередачи. Параметры могут быть постоянными и *пе-*

*ременными* (т.е. могут зависеть от времени и/или системы координат).

См. также *Детерминированно-стохастическая модель, Детерминистическая модель, Математическая модель, Константа, Коэффициент, Мера. Модель, Модель экспериментально-статистическая, Причина, Причинность, Связь, Следствие, Статистическая модель, Стохастическая модель, Структурная модель, Сущность, Явление.*

**Параметрическая величина** - *безразмерная физическая величина*, равная *отношению* физической *величины* к одноимённой физической величине, принимаемой за некоторый эталон.

См. также *Нормализация, Отношение, Параметр, Производить.*

**Паскаля распределение** (отрицательное *биномиальное распределение*) - *дискретное распределение вероятностей случайной величины* $X$, принимающей целые неотрицательные значения $k=1, 2, \ldots$ в соответствии с *формулой*:

$$P(X=k)=C_{k+r-1}^{r-1}\mathbf{p}^{r}(1-p)^{k}, \qquad (1.143)$$

где $0<\mathbf{p}<1$ и $r=1, 2, 3, \ldots$ (целое) - *параметры. Математическое ожидание* $\mathbf{E}X=rq/\mathbf{p}=r(1-\mathbf{p})/\mathbf{p}$, *дисперсия* $\mathbf{D}X=rq/\mathbf{p}^2=r(1-\mathbf{p})/\mathbf{p}^2$. *Плотность вероятностей* выражается формулой:

$$p(k)=\frac{k+r-1}{k}\cdot\mathbf{p}^{r}(1-\mathbf{p})^{k}. \qquad (1.144)$$

Типичное толкование распределения Паскаля - $p(x)$ есть вероятность появления *события* (успеха) в $k$-й раз после точно $k+r-1$ испытаний по схеме *Бернулли* при вероятности успеха $\mathbf{p}$. При $k=1$ распределение Паскаля сводится к *геометрическому распределению.*

В одной из *интерпретаций* распределение Паскаля имеет приложения к *статистике* несчастных случаев и заболеваний, к задачам, связанным с *количеством* особей данного вида в *выборках* из биологических *популяций*, и т.д.

Меняются и время, и мечты,
Меняются, как время, представленья.
Изменчивы под солнцем все явленья,
И мир всечасно видишь новым ты.
(*Луис Камоэнс*; 1524-1580).

**Переменная** - *величина*, которая в изучаемой задаче принимает различные значения, причём так, что все допускаемые значения переменной полностью *определены* наперёд заданными условиями.

При наличии в изучаемой задаче более чем одной переменной различают *независимые* и зависимые переменные. Последние рассматриваются как *функции* от независимых переменных (*аргументов* или *факторов*), причём переменные являются зависимыми или независимыми лишь по *отношению* друг к другу, и их различение достаточно условно и определяется условиями задачи.

*Понятие* переменной возникло в XVII в. первоначально под влиянием запросов естествознания, выдвинувшего на первый план изучение движения, *процессов*, а не только состояний. Это понятие не укладывалось в *формы*, выработанные *математикой* древности и средних веков, и требовало для своего выражения новых форм. Такими новыми формами явились буквенная алгебра и *аналитическая* геометрия Р.Декарта (*Descartes Rene*; 1596-1650). В буквах декартовой алгебры, могущих принимать произвольные *числовые* значения, и нашли своё символическое выражение переменные. Декартова переменная величина явилась поворотным пунктом в развитии математики, благодаря ей **переменную** стали рассматривать "не как состояние из крайне малых частей", а как процесс, развитие, движение - так возникло дифференциальное и интегральное исчисления. "Всё меняется, кроме перемен" (*Израэль Зангвилл*; 1864-1926).

Начиная со второй половины XIX в. математика начинает рассматривать как переменные не только величины, но и всё более разнообразные и широкие классы других своих *объектов* - развиваются *теория множеств*, топология и математическая логика. О том, насколько расширилось в XX в. понятие переменной, свидетельствует тот факт, что в математической логике рассматриваются не только переменные, пробегающие произвольные *множества* предметов, но и переменные, значениями которых служат высказывания, предикаты (отношения между предметами) и т.д.

**Пирсона критерий согласия** см. *Хи-квадрат критерий*, (1.276).

**Пирсона распределения** - семейство *непрерывных распределений вероятностей*, *плотности* которых $p(x)$ являются решениями дифференциального *уравнения*:

$$\frac{dp(x)}{dx} = \frac{a_0+a_1x}{b_0+2b_1x+b_2x^2}\cdot p(x), \tag{1.145}$$

где $a_0$, $a_1$, $b_0$, $b_1$, $b_2$ - *параметры* распределения (действительные *числа*). *Графики зависимости* $p(x)$ от $x$ называются **кривыми Пирсона**. Распределения Пирсона полностью *определяются* первыми четырьмя *центральными моментами*. В случае, если $a_1=1$, то:

$$a_0 = \frac{\mu_3(\mu_4+3\mu_2^2)}{A}, \tag{1.146}$$

$$b_0 = -\frac{\mu_2(4\mu_2\mu_4-3\mu_3^2)}{A}, \tag{1.147}$$

$$b_1 = -\frac{\mu_3(\mu_4+3\mu_2^2)}{2A}, \tag{1.148}$$

$$b_2 = -\frac{2\mu_2\mu_4-3\mu_3^2-6\mu_2^3)}{A}, \tag{1.149}$$

где $A=10\mu_4\mu_2-18\mu_2^3-12\mu_3^2$.

*Кривые* Пирсона классифицируются в зависимости от распределения корней квадратного трёхчлена:

$$b_0+2b_1x+b_2x^2=0. \tag{1.150}$$

Семейство распределений Пирсона (или кривых Пирсона) составляет двенадцать типов.

**Тип 1.** $$\left.\begin{aligned} &D=b_0b_2-b^2{}_1<0;\ \lambda=b^2{}_1/(b_0b_2)<0;\\ &b_0+2b_1x+b_2x^2=(\alpha+x)(-\beta+x),\ (\alpha,\beta>0). \end{aligned}\right\} \tag{1.151}$$

Плотность вероятностей:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^{2m}\beta^{2n}(\alpha+x)^m(\beta-x)^n}{(\alpha+\beta)^{m+n+1}B(m+1,\ n+1)}, & x\in[-\alpha,\ \beta],\\ 0,\ x\notin[-\alpha,\ \beta]; \end{cases} \tag{1.152}$$

где $B(m+1,\ n+1)=\dfrac{\Gamma(m+1)\ \Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+2)}$, $m>-1,\ n>-1.$ (1.153)

Частный случай распределений типа 1 - бета-распределения.

**Тип 2.** Частный случай типа 1 при $\alpha=\beta$, $\lambda=0$ $m=n$. Распределения типа 2 имеют вертикальную ось *симметрии*.

**Тип 3.** $$\left.\begin{aligned} &D=b_0b_2-b^2{}_1<0;\ \lambda=\infty;\\ &b_0+2b_1x+b_2x^2=2(\alpha+x)b_1. \end{aligned}\right\} \tag{1.154}$$

Плотность вероятностей:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{k^{m+1}(\alpha+x)^m}{\exp\{k(\alpha+x)\}\ \Gamma(m+1)}, & x>-\alpha,\ k>0, \\ 0, & x\leqslant-\alpha; \end{cases} \tag{1.155}$$

Частные случаи - *Гамма-распределение*, *Хи-квадрат распределение*.

**Тип 4.** $\left.\begin{array}{l} D=b_0b_2-b^2{}_1>0;\ 0<\lambda<1; \\ b_0+2b_1x+b_2x^2=(\alpha^2+x^2)b_2. \end{array}\right\}$ (1.156)

Плотность вероятностей:

$$p(x) = k(\alpha^2+x^2)^{-m}\exp\left(-\lambda\mathrm{arctg}\frac{x}{\alpha}\right),\ x\in[-\infty,\ \infty],\ m\geqslant1/2, \tag{1.157}$$

где

$$k^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty}(\alpha^2+x^2)^{-m}\exp\left(-\lambda\mathrm{arctg}\frac{x}{\alpha}\right)dx. \tag{1.158}$$

**Тип 5.** $\left.\begin{array}{l} D=b_0b_2-b^2{}_1=0;\ \lambda=1; \\ b_0+2b_1x+b_2x^2=(\alpha+x)^2b_2. \end{array}\right\}$ (1.159)

Плотность вероятностей:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^{m-1}\ x^{-m}\ e^{-\lambda/x}}{\Gamma(m-1)}, & x>0,\ \lambda>0,\ m>1, \\ 0, & x\leqslant0; \end{cases} \tag{1.160}$$

**Тип 6.** $\left.\begin{array}{l} D=b_0b_2-b^2{}_1<0;\ \lambda=b^2{}_1/(b_0b_2)>1; \\ b_0+2b_1x+b_2x^2=(\alpha+x)(x-\beta)b_2. \end{array}\right\}$ (1.161)

Плотность вероятностей:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+\alpha)^m(x-\beta)^n}{(\alpha+\beta)^{m+n+1}B(-m-n-1,\ n+1)}, & x>\beta, \\ 0, & x\leqslant\beta; \end{cases} \tag{1.162}$$

где $B(-m-n-1,\ n+1) = \dfrac{\Gamma(-m-n-1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(-m)},\quad m>1,\quad n>-1.$ (1.163)

Частные случаи - бета-распределение 2-го рода, *Фишера распределение*.

**Тип 7.** $$\left.\begin{aligned} &D=b_0b_2-b^2{}_1>0;\\ &\lambda=b^2{}_1/(b_0b_2)=0;\\ &b_0+2b_1x+b_2x^2=(\alpha^2+x^2)b_2. \end{aligned}\right\} \qquad (1.164)$$

Плотность вероятностей:

$$p(x) = \frac{\alpha(\alpha^2+x^2)^{-m}}{B(m-1/2,\ 1/2)},\ x\in(-\infty,\ \infty),\ m\geqslant 1/2. \qquad (1.165)$$

Частный случай - *Стьюдента распределение*, (1.252).

**Тип 8.** $$\left.\begin{aligned} &D=b_0b_2-b^2{}_1<0;\\ &\lambda=b^2{}_1/(b_0b_2)<0;\\ &b_0+2b_1x+b_2x^2=x(\alpha+x)b_2. \end{aligned}\right\} \qquad (1.166)$$

Плотность вероятностей:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{(m+1)(\alpha+x)^m}{\alpha^{m+1}}, & x\in[-\alpha,\ 0],\ -1<m<0,\\ 0, & x\notin[-\alpha,\ 0]; \end{cases} \qquad (1.167)$$

**Тип 9.** $$\left.\begin{aligned} &D=b_0b_2-b^2{}_1<0;\\ &\lambda=b^2{}_1/(b_0b_2)<0;\\ &b_0+2b_1x+b_2x^2=x(\alpha+x)b_2. \end{aligned}\right\} \qquad (1.168)$$

Плотность вероятностей:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{(m+1)(\alpha+x)^m}{\alpha^{m+1}}, & x\in[-\alpha,\ 0],\ m<-1,\\ 0, & x\notin[-\alpha,\ 0]; \end{cases} \qquad (1.169)$$

**Тип 10.** $$\left.\begin{aligned} &D=b_0b_2-b^2{}_1=0;\\ &\lambda=b^2{}_1/(b_0b_2)=0;\\ &b_0+2b_1x+b_2x^2=b_0,\ a_1=0. \end{aligned}\right\} \qquad (1.170)$$

Плотность вероятностей:

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\ \gamma>0\\ 0, & x\leqslant 0; \end{cases} \qquad (1.171)$$

Частный случай - *показательное распределение*, (1.177).

$$\left.\begin{aligned} &\textbf{Тип 11.}\ D=b_0b_2-b^2{}_1=0;\\ &\lambda \text{ неопределено};\\ &b_0+2b_1x+b_2x^2=b_0,\ a_1\neq 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1.172)$$

Плотность вероятностей:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right),\ x\in(-\infty,\ \infty), \qquad (1.173)$$

Распределением Пирсона типа 11 является *нормальное распределение*.

**Тип 12.** Частный случай типа 1 при $m=-n$.

Распределения Пирсона используются для приближённого описания *эмпирических данных*. Для определения типа распределения Пирсона, аппроксимирующего наблюдённые данные, вычисляют *выборочные центральные* моменты и по *формулам* для $a_0$, $b_0$, $b_1$, $b_2$ находят *оценки* параметров распределения.

Распределения Пирсона были введены в 1894 году К.Пирсоном (*Pearson Karl*; 1857-1936), систематическое описание типов распределений Пирсона было дано У.Элдертоном (*W.Elderton*) в 1938 г.

**Плотность вероятностей** - *функция*, характеризующая *вероятность* того, что значения *случайной величины* $X$ будут заключены в том или ином *интервале*. Другими словами, плотность вероятностей характеризует вероятность попадания случайной величины $X$ в интервал ($x_1$ - $x_{1+1}$); плотность случайных величин $X$ в том или ином интервале. Плотность вероятностей $p(x)$ есть всегда действительная неотрицательная функция. По сути плотность вероятностей аналогична *гистограмме* распределения, но оперирует бесконечно малыми величинами:

$$P(x_1<X<x_2)=\int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx=F(x_2)-F(x_1).$$

Естественно, что $P(x_1<X<x_2)$ - доля от единицы, это площадь под кривой плотности вероятностей в интервале $x_1 \div x_2$ (рис.1.24). Сравните с рисунком 1.29. Подробно см. раздел 2.4.

**Погрешности измерений** (*ошибки измерений*) - отклонения *результатов* измерений от *истинных* значений измеряемых *величин*. Различают систематические, *случайные* и грубые погрешности измерений (последний вид погрешностей измерений иногда называется промахами). Систематические погрешности измерений обусловлены главным образом пог-

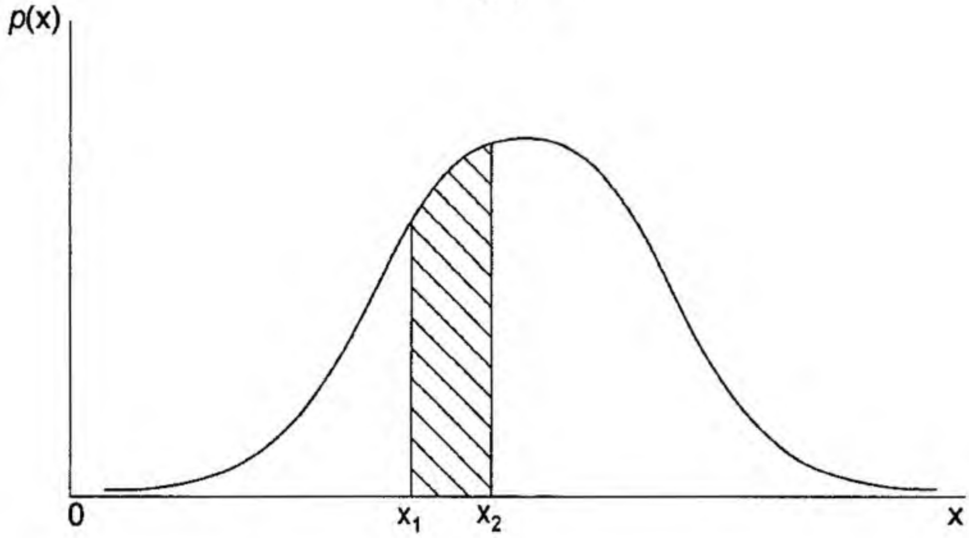



Рис.1.24. Плотность вероятностей случайной величины $x$. Заштрихована область, площадь которой соответствует вероятности попадания случайной величины в интервал $x_1 \div x_2$ (общая площадь под кривой плотности вероятностей равна 1)

решностями средств измерений и несовершенством *методов* измерений; случайные - рядом неконтролируемых *причин* (незначительными изменениями условий измерений и др.); промахи - неисправностью средств измерений, неправильным отсчитыванием показаний, резкими изменениями условий измерений и др. Грубые ошибки заметны, и при *обработке* результатов измерений их просто отбрасывают, влияние систематических ошибок стремятся уменьшить различными поправочными *множителями*, *оценки* случайных погрешностей измерений осуществляют методами *статистики математической*.

См. также *Мера, Ошибка, Ошибок теория, Шум, ШУМЬ*.

**Показательная функция**, *экспоненциальная функция*, экспонента - *функция*:

$$y=e^x=exp(x), \qquad (1.174)$$

для любого значения $x$ (действительного или комплексного), определяемая *соотношением*:

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n, \qquad (1.175)$$

где $e$ - неперово *число*, иррациональное *трансцендентное число*, основание натуральных *логарифмов*:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx e=2,718281828459045... \qquad (1.176)$$

Число $e$=2,718281828459045... исключительно важно в теоретических и практических исследованиях; этот факт полностью объясняется в высшей математике и подтверждается *уравнениями*, описывающими *дина-*

*мические процессы* химической кинетики, радиоактивного распада, термодинамики и *процессов* переноса импульса, энергии (теплоты) и массы, колебательных явлений, роста клеток, закон нормального распределения и многое другое. И, наконец, закон забывания Г. Эббингауза.

Показательная функция $y>0$ при любых значениях $x$. *График* показательной функции называется экспонентой (рис. 1.25).

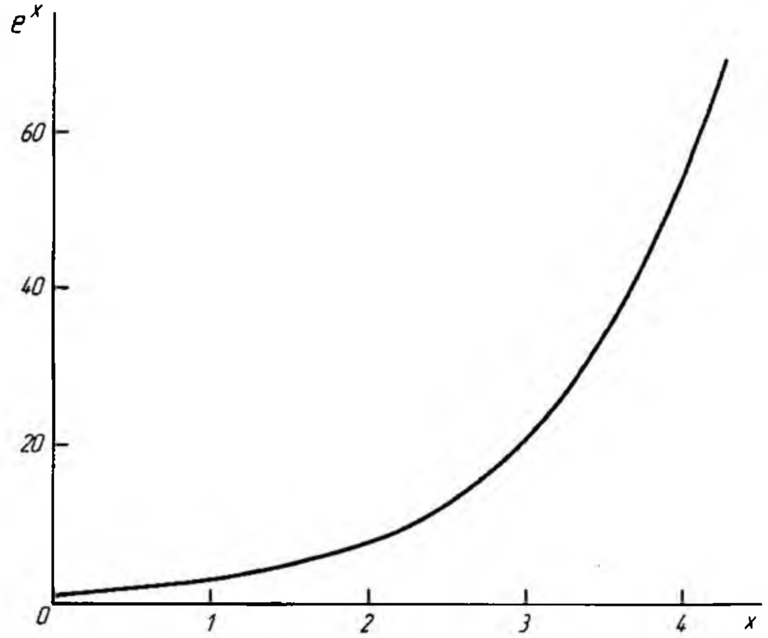



Рис. 1.25. Показательная функция

Функцию $y=a^x$ при $a>0$ также иногда называют *показательной функцией*, она связана с основной показательной функцией $e^x$ *формулой* $a^x=e^{x\ln a}$. См. также *Логарифм, Экспоненциальная функция.*

**Показательное распределение**, *экспоненциальное распределение*, – *непрерывное распределение*, *адекватное показательной функции* (частный случай *Пирсона распределений*, тип 10, (1.171)). *Плотность вероятностей* (рис. 1.26):

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x<0, \end{cases} \tag{1.177}$$

где $\lambda$ - *параметр* распределения, $\lambda>0$.

*Моменты* распределения:

$$m_\beta = \frac{\beta!}{\lambda^\beta}, \tag{1.178}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{\lambda^2}. \tag{1.179}$$

*Медиана*: $m=\ln 2/\lambda$; *коэффициент асимметрии*: $A_x=2$; *эксцесс*: $E_x=6$.

Непрерывный аналог *геометрического распределения*. Обладает *свойством отсутствия последействия*.

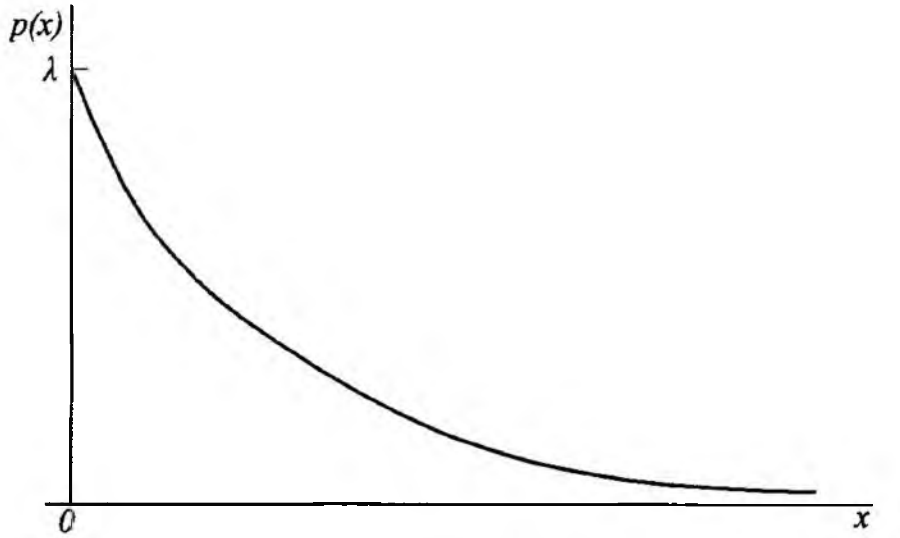



Рис.1.26. Плотность вероятностей показательного распределения (площадь под кривой плотности вероятностей равна 1)

"**ПОНИМАТЬ, *понять*** что, постигать умомъ, познавать, разуметь, уразумевать, обнять смысломъ, разумомъ; находить в чемъ смыслъ, толкъ, видеть причину и последствiя. (...) || *Понятiе*, способность понимать, даръ уразуменья, соображенья и заключенья. (...) || Мысль, представленье, идея; что сложилось въ уме и осталось въ памяти, по уразуменiи, постиженiи чего либо. (...) *Необходимость безконечной величины доказывается математикой, но понятiя объ ней составить себе нельзя.* (...) || ***Понятный,*** могущiй быть понятымъ, вразумительный, постижимый, ясный, доступный смыслу, уму. (...) ***Понятность*** ж. качество по прглт., ясность, вразумительность. (...)" (*В.И.Даль*; 1801-1872), [82].

См. также *Диалектика, ДIАЛЕКТИКА, Категория, ОБОЗНАЧАТЬ, Определение, ОПРЕДЕЛЯТЬ, Понятие, Состоять, Суждение, Термин технический.*

"Понять - это научиться воспроизводить, и запомнить - это научиться воспроизводить. Но почувствуйте разницу: понять - научиться воспроизводить, не помня, запомнить - научиться воспроизводить, не понимая." (*Александр Круглов*; р. 1954).

**Понятие** - целостная *совокупность суждений*, мысленная *модель*, отражающая в обобщённой *форме объекты* и *явления действительности* и *связи* между ними посредством *фиксации* общих и специфических признаков. "Моменты понятия суть всеобщность, особенность и единичность.

Понятие есть их единство" (Г.Гегель (*Hegel Georg Wilhelm Friedrich*; 1770-1831). В качестве признаков выступают *свойства* объектов и явлений и *отношения* между ними. Объект характеризуется в понятии обобщённо, что достигается за счёт применения в *процессе* познания таких умственных действий, как *абстракция*, *идеализация*, обобщение, сравнение, *определение*. Процесс образования понятий основан на единстве *анализа* и *синтеза*. "Понятие - это всеобщее, которое вместе с тем определено и остаётся в своём определении тем же самым целым и тем же самым всеобщим, то есть такая определённость, в которой различные определения вещи содержатся как единство" (*Г.Гегель*; 1770-1831). В отличие от суждения в понятии только утверждается наличие признаков и свойств объекта. Также в понятии должны быть отображены только отличительные и существенные признаки, свойства объекта и явления, находящиеся в органической взаимосвязи. Наконец, понятие - *детерминированно-стохастическая* мысленная модель объекта, явления.

Посредством отдельных понятий и *систем* понятий отображаются фрагменты действительности, изучаемые различными науками и научными *теориями*. "Понятие есть то, что раскрывает, чем являлся или является тот или иной предмет" (*Антисфен из Афин*; 444-366 до Р.Х.). В каждом понятии различают его *содержание* (совокупность признаков предметов, отражённых в понятии) и объём (*множество*, класс предметов, каждому из которых принадлежат признаки, относящиеся к содержанию понятия). Например, главное содержание понятия "молекула" - мельчайшая частица, сохраняющая *физические* и химические свойства данного вещества, а объём этого понятия бесконечен - молекулы всех веществ. Полярный пример, Жар-птица, Конёк-горбунок, Царевна-лягушка, Змей-Горыныч, "ковёр-самолёт" и т.д. - понятия с пустым объёмом, их объёмы не содержат ни одного *элемента*. Большое значение представляют общие понятия: атом, молекула, химический элемент, натуральные *числа*, вещественные числа, иррациональные числа, млекопитающие, насекомые, земноводные, рыбы, птицы, растения, вулканы, реки и т.д.

Понятие непосредственно связано с процессом **понимания** человеком систем и явлений. Понимание, по существу, означает создание *адекватной* мысленной модели. Понятия и связи имеют определённый точный смысл в рамках некоторого множества моделей, которые конструируются для научного описания. С течением времени модели изменяются, изменяются и понятия. Так например, *термин* "технология" в *конце* XVIII - *начале* XIX веков означал науку о химической переработке природного сырья в продукты, нужные человеку. В настоящее время "технология" стала понятием, т.к. в промышленности было разработано много технологий, и этот процесс продолжается. Понятия, как и термины, не неподвижны, они переходят друг в друга, непрестанно изменяются, как *непрерывно* меняется жизнь. "Всё меняется, кроме перемен" (*Израэль Зангвилл;* 1864-1926). Примером того, как понятия наполняются новым содержанием, являются названия процедур перемещения автомобиля в гараж (из гаража), в автосервис (из автосервиса), с места неудачной парковки, из одного города (села) в другой и т.п., полностью заимствованные из обращения с домашним скотом.

Понятия, характеризующие различные *случайные события* в жизни человека и его социального окружения, в значительной степени *субъективны*, медленно меняются от поколения к поколению, изменяются и во времени, и в пространстве. Любые *оценки* случайных событий относительны, поскольку рождаются в сравнениях и противопоставлениях. И совершенно естественно между *житейской вероятностью* и *математической, формализованной* в XVIII-XIX вв., в обыденном сознании пролегла непреодолимая пропасть.

Изменения свойственны всем понятиям, и этот *процесс* характеризуется *законами* развития языковых *форм*, с одной стороны, и действием множества *детерминированных факторов* (причин, случайно сочетающихся), с другой стороны. Хаос и *динамичность* в *причинно-следственных связях* человека и его окружения и тот факт, что для большинства людей их жизнь - *детерминированно-стохастический процесс*, приводят к тому, что в трансформациях содержания понятий присутствуют как закономерности, так и случайности (см. примечание 9 на с. 41).

Источником понятий является *диалектически* развивающийся материальный мир. Когда в процессе исследования *объекта* или явления обнаруживается новая, более глубокая *сущность*, старое понятие может стать всего лишь суждением, а место его займёт новое понятие, новая мысленная модель, включающая вновь открытые отличительные и существенные признаки и свойства этого объекта или явления.

"Понятие неразрывно связано с языковой средой. Реальность каждого понятия проявляется в языке. Понятие возникает на базе слов и не может существовать вне слов. Слово является носителем понятий.

Слово, обозначающее строго определённое понятие какой-нибудь области науки, техники, называется термином. Будучи неразрывно связано со словом, понятие не является тождественным слову. Это видно из того факта, что в разных языках одни и те же понятия регистрируются, закрепляются в различных словах." (*Н.И.Кондаков*; (1900(?)-1984), [86]).

См. также *БЕЗКОНЕЧНЫЙ, Бесконечность, Величина, Вероятность, Выборка, Диалектика, ДІАЛЕКТИКА, Категория, Константа, Концепция, Математическое ожидание, Множество, Момент, ОБОЗНАЧАТЬ, Определение, ОПРЕДЕЛЯТЬ, Отношение, Оценка, Переменная, ПОНИМАТЬ, Распределение вероятностей, Совокупность, Состоять, Среда, Среднее значение, Статистика, Суждение, Термин технический, Функция.*

О встречающейся нечёткости различения "Понятие" и "Термин" см. *Больших чисел закон, Информация, Категория, Норма, Математическое ожидание, Результат, Производная, Совместные распределения, Степень, Эмпирический метод.*

**Популяция** (< *фр.* population - (народо)население, жители; *популяция* < *ср.-лат.* populatio < *лат.* populus - народ, народность, толпа, **множество**, рой, масса) - (*мат.*) подмножество *совокупности*. В качестве вспомогательного *термина статистики математической* термин "популяция" стал использоваться в последние десятилетия.

(*биол.*) Совокупность особей одного биологического вида, обитающая в *определённом* пространстве, в той или иной *степени* изолированная от других таких же совокупностей. В биологии популяция рассматривается как *элементарная* единица эволюционного *процесса*, способная *относительно* длительно существовать *вследствие* действия сбалансированных *факторов* наследственности, изменчивости и конкуренции. Различают популяции замкнутые (приток новых генов из других популяций исключён), открытые (приток новых генов возможен) и сбалансированные, в которых наблюдается равновесие между возникновением мутаций и естественным отбором. Термин "Популяция" употребляют также в этногенезе и в антропологии, а также по отношению к каким-либо группам клеток.

Термин "популяция" был введён В.Иогансеном (3.02.1857 - 11.11.1927) в 1903 г. для *обозначения* неоднородной в генетическом отношении группы особей одного вида в отличие от однородной чистой линии. Однако уже Ч.Дарвин объяснял происхождение видов в процессе эволюции, опираясь на *данные* о наследственности, изменчивости и конкуренции в пределах совокупности особей (см. выше). См. также *Множество*.

**Постулат** (< *лат.* postulatum - требование. иск. - *И.Х.Дворецкий*; (1894-1979). [84]) - *термин*, означающий *суждение*, требование или положение, которым пользуются для доказательства как исходным, несмотря на то, что *истинность* его не может быть доказана непосредственно. Другими словами, постулат - недоказуемая истина.

См. также *Состоять*.

"Нет правила без исключения, но исключения не нарушают правила." (*Луций Анней Сенека*; 4 до Р.Х.- 65 после Р.Х.).

**Правило** - 1. Положение (*норма, закон,* канон), в котором *отражена закономерность*, постоянное *соотношение* каких-либо *явлений* или *событий*, устоявшиеся причинно-следственные связи, какие-либо нормы (например, грамматические правила, арифметические правила, правило трёх сигма и др.). 2. Постановление, предписание, устанавливающее *порядок* чего-либо (например, правила дорожного движения, правила техники безопасности и др.). 3. Образ мыслей, норма поведения, обыкновение, привычка (например, взять за правило, человек строгих правил и т.п.). 4. Софизм, заключающийся в следующем рассуждении:

Нет правила без исключения;
Это положение есть правило;
―――――――――――――――――――
Оно имеет исключения,

что означает, что имеется, по крайней мере, одно правило, которое имеет исключения. ⇔ **Как правило** или **как общее правило** - обычно.

**Правило** определения *критического значения статистического критерия* заключается в том, что исследователь (руководитель) принимает на себя ответственность за *фиксацию уровня значимости* $\alpha$, т.е. принимает допустимую *вероятность ошибочно* отвергнуть *основную* (*нулевую*) проверяемую *гипотезу* $H_0$, когда она верна. Центральный момент при проверке гипотезы $H_0$ заключается в том, что уровнем значимости $\alpha$ задаются до *анализа выборки* на основании *физической сущности* задачи и *последствий* от ошибочного принятия решения. При выборе уровня значимости следует учитывать ущерб, *неизбежно* возникающий при использовании любого *критерия* значимости. Так, например, если уровень значимости чрезмерно велик, то основной ущерб будет происходить от ошибочного отклонения правильной гипотезы; если же уровень значимости мал, то ущерб будет, как правило, возникать от ошибочного принятия гипотезы, когда она ложна. Эти ошибки неравноценны. Исследователь (руководитель) должен решать, какой риск при отклонении основной (нулевой) гипотезы является допустимым.

Критические значения *критерия Стьюдента определяют* для принимаемого уровня значимости $\alpha$, руководствуясь *правилом*:

$$\int\limits_{t_\nu^\alpha}^{\infty} p(t)dt = \mathrm{P}\left(t_\nu^{\text{оп}} > t_\nu^\alpha\right) = \alpha, \tag{1.180}$$

где $t^{\text{оп}}$ - *опытное* значение критерия Стьюдента, $\alpha$ - площадь под *кривой* $p(t)$, характеризующая вероятность ошибочно отвергнуть верную нулевую гипотезу (см. рис. 1.22, 1.37, 1.40. См. также *уравнение* (1.254) и соответствующий раздел). Табулированные значения $t_\nu$ для различных уровней значимости $\alpha$ приведены в Приложении 6.

См. также *Стьюдента распределение*.

Критические значения *критерия Фишера* определяют для принимаемого уровня значимости $\alpha$, руководствуясь правилом:

$$\int\limits_{F_{\nu_1,\nu_2}^\alpha}^{\infty} p(F)dF = \mathrm{P}\left(F_{\nu_1,\nu_2}^{\text{оп}} > F_{\nu_1,\nu_2}^\alpha\right) = \alpha, \tag{1.181}$$

где $F^{\text{оп}}$ - опытное значение критерия Фишера (1.257), $\alpha$ - площадь под кривой $p(F)$, характеризующая вероятность ошибочно отвергнуть верную нулевую гипотезу (см. рис. 1.7, 1.23, 1.39, 1.44. См. также *уравнение* (1.262) и соответствующий раздел). Табулированные значения $F_{\nu_1,\nu_2}$ для различных уровней значимости $\alpha$ приведены в Приложениях 7, 8, 9. См. также *Фишера распределение*.

При проверке статистических гипотез представляют интерес критические значения *хи-квадрат критерия*. Их определяют для принимаемого уровня значимости $\alpha$, руководствуясь правилом:

$$\int\limits_{X_\nu^\alpha}^{\infty} p(X^2)dX^2 = \mathrm{P}\left\{X_\nu^2 > \left(X_\nu^2\right)^\alpha\right\} = \alpha, \tag{1.182}$$

где $X^2{}_\nu$ - опытное значение хи-квадрат критерия, $(X^2{}_\nu)^\alpha$ - табличное значение хи-квадрат критерия, $\alpha$ - площадь под кривой $p(X^2)$, характеризующая вероятность ошибочно отвергнуть верную нулевую или основную гипотезу (рис. 1.48. См. также *уравнение* (1.281) и соответствующий раздел). Табулированные значения хи-квадрат критерия при различных уровнях значимости $\alpha$ приведены в Приложении 5.

См. также *Хи-квадрат распределение*.

При проверке статистических гипотез практический интерес представляют критические значения *стандартизованной случайной величины* $z^{\alpha}$, которые определяют для принимаемого уровня значимости $\alpha$, руководствуясь правилом:

$$P\left(z > z^{\alpha}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{z^{\alpha}}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = \alpha, \qquad (1.183)$$

где $\alpha$ - площадь под кривой *стандартизованной плотности вероятностей* $p(x)$, характеризующая вероятность ошибочно отвергнуть верную нулевую гипотезу (рис. 2.29. См. также *уравнение* (1.89) и соответствующий раздел). Табулированные значения $z$ при различных уровнях значимости $\alpha$ приведены в Приложении 4. См. также *Лапласа функция*.

**Правило трёх сигма** см. *Трёх сигма правило*.

"**ПРЕДЕЛЪ** м. начало или конецъ, конъ, межа, грань, разделъ, край, рубежъ или граница; конецъ одного и начало другаго, въ смысле веществ. и духв. (...) *Выдти изъ пределовъ чего*, изъ границъ, изъ меры; нарушить порядокъ, правила, обычай. (...) ***Предельный***, ко пределамъ въ разн. знач. отнсщс." (*В.И.Даль*; 1801-1872), [82].

См. также *Конец*, *Конечное*.

"Конечно, всё на свете имеет свой конец и предел и, достигнув до высшей точки, падает вниз, ибо долго пребывать в таком положении не может." (*Франсуа Рабле*; 1494-1553).

**Предел** - 1. Последняя *мера*, *степень* чего-нибудь, крайняя грань. 2. Пространственная или временная граница чего-либо. 3. (*мат.*) Одно из основных *понятий математики*, означающее, что некоторая *переменная* в рассматриваемом *процессе* её изменения неограниченно *приближается* к некоторому постоянному значению. Понятие "*предел*" имеет точный смысл лишь при наличии корректного понятия близости рассматриваемых *объектов* вообще, и между *элементами множества*, в котором указанная переменная принимает значения, в частности. Через предел *определяются* основные понятия математического *анализа* - *непрерывность*, *производная*, дифференциал, интеграл.

К *понятию* предела вплотную подошли древнегреческие философы при вычислении площадей и объёмов некоторых фигур и тел с помощью метода исчерпывания. Так, Архимед (ок. 287-212 до Р.Х.), рассматривая последовательности вписанных (описанных) ступенчатых фигур (тел) с помощью метода исчерпывания, доказывал, что разность между их площадями (объёмами) может быть сделана меньше любой наперёд заданной положительной величины (следует заметить, что *термин* "исчерпывание" был впервые употреблён Григорием из Сен-Винцента (1584-1667) [48].

Включая в себя представление о бесконечно малых, метод исчерпывания являлся зародышем теории пределов. Однако в явном виде в древнегреческой математике понятие предела не было сформулировано, не было создано каких-либо основ общей теории предела. Это было сделано в XVII в. Галилей Г. (1564-1642), Кеплер И. (1571-1630), Паскаль Б. (1623-1662) и др. при вычислении площадей (объёмов) стали использовать метод неделимых, метод актуальных бесконечно малых, т.е. таких бесконечно малых, которые, по их представлению, являются неизменными величинами, не равными нулю и вместе с тем меньшими по абсолютной величине любых положительных конечных величин. В этот же период продолжает применяться и развиваться и метод исчерпывания (Григорий из Сен-Винцента (1584-1667), П.Гульдин (1577-1643), Х.Гюйгенс (1629-1695) и др.). И.Ньютон (1643-1727) в своём труде "Математические начала натуральной философии" описывает "Метод первых и последних отношений", который он положил в основу своего метода флюксий. В этой теории И.Ньютон вместо актуальных бесконечно малых предлагает *концепцию* "потенциальной" бесконечно малой величины, которая лишь в процессе своего изменения становится по абсолютной величине меньше любой положительной конечной величины. Теория И.Ньютона была прогрессом в развитии представления о пределе. В XVIII в. понятие предела (намечавшееся у математиков XVII в.), всё более анализировалось и уточнялось (Л.Эйлер (1707-1783), Ж. Д'Аламбер (1717-1783), Л.Карно (1753-1823), братья Я.Бернулли (1654-1705) и И.Бернулли (1667-1748) и др.) [48].

Современная теория предела начала формироваться в начале XIX в. в связи с изучением свойств различных классов функций. В работах О.Л. Коши (1789-1857) понятие предела впервые стало основой построения математического анализа. Им был получен внутренний критерий сходимости последовательности (носящий теперь его имя), а также были получены основные признаки существования предела последовательностей и основные теоремы о пределе. Наконец, он определил интеграл как предел интегральных сумм и изучил его свойства, исходя из этого определения. Окончательно понятие предела последовательности и функции оформилось в работах Б. Больцано (1781-1848) и К. Вейерштрасса (1815-1897) [48].

Вообще, пределов в науке и технике немало: предел усталости, предел длительной прочности, предел ползучести, предел *пропорциональности*, предел прочности, предел текучести, предел упругости, предельно-допустимая доза, предельное *состояние*, предельные (насыщенные) соединения и др.

См. также *Конец, Конечное, Линия, ПРЕДЕЛЪ.*

**Предельный** - 1. Наибольший, самый большой, *максимальный*, наивысший, рекордный. 2. Являющийся границей, *пределом* чего-нибудь. 3. Крайний, доходящий до предела.

"**ПРИБЛИЖАТЬ, приблизить** что къ чему, переставить, переложить, придвинуть ближе, умалять разстоянье или время, пртвпл. *отдалять, удалять*. (...) ***Приблизительный***, приближающiй. || о количестве, качестве, близкiй, подходящiй, примерный, неточный, прикидной, около чего. (...)" (*В.И.Даль*; 1801-1872), [82]. См. также *Качество, Количество.*

**Приведение к параметрическому виду** см. раздел 2.7.

**Признак** - показатель, примета, знак, метка, заметка, отличие, всё, по чему узнают или определяют что-либо [83, 90]. Достаточно часто признак является *мерилом* для *определения* достоверности, соответствия человеческого знания *объективной* реальности, а также основанием для оценки, определения или классификации чего-либо. *Преде-*

*лом* признака, в некотором смысле, является *критерий*. В качестве признаков выступают *свойства* объектов и явлений и *отношения* между ними. Например, неотъемлемый признак дисперсных систем - наличие границ раздела фаз. Признаки подразделяются на общие и специфические. Высшая *степень* признака определяется словом "ультра...", низшая - "инфра...". При статистическом анализе признаками будут литология разрезов, вид промывочной жидкости, размеры частиц в дисперсиях, рост, вес, возраст людей (животных), цвет волос, глаз и т.д.

См. также *Вариационный ряд, Данных обработка математическая, Категория, Качество, Корреляционный анализ, Понятие, Примечание 1.*

"Обстоятельства переменчивы, принципы никогда." (*Оноре де Бальзак*; 1799-1850).

**Принцип** (< *лат.* principium - начало, происхождение, **принцип**, первопричина, основа, основоположение) - 1. Основное положение, исходный пункт, предпосылка какой-либо *теории*, *концепции*, учения. 2. Внутреннее убеждение, взгляд на реальность, *законы* поведения. 3. Основа устройства, действия какого-либо механизма, прибора, установки.

"Роком я называю порядок и последовательность причин, когда одна причина, связанная с другой причиной, порождает из себя явление." (*Гераклит Эфесский*; 535-475 г. до Р.Х.).

**Причина** (*укр.* причина, польск. przyczyna < *чин, чинить*. *Лат.* causa - причина, повод, основание, побудительное *начало*) - *явление*, вызывающее возникновение другого явления - *следствия*. Другими словами, под причиной подразумевается явление, которое так *связано* с другим явлением, называющимся следствием, что его возникновение *неизбежно* влечёт за собой возникновение следствия, а уничтожение его влечёт за собой уничтожение следствия. Например, поступление теплоты в жидкость или газ немедленно вызывает градиент температуры, следствием которого является градиент плотности *среды*. В свою очередь, немедленным следствием изменения плотности самой жидкости (газа), обусловленного термическим расширением, является естественная конвекция - движение слоёв жидкости (газа) с меньшей плотностью вверх, а слоёв жидкости (газа) с большей плотностью вниз. "Детерминизм предполагает "долженствование": причина должна порождать такое-то и такое-то следствие (и очень часто добавляется "сразу же")... *Закон* строгого детерминизма может основываться (или опровергаться) одним единственным *экспериментом*: следствие есть или его нет".

Достаточно очевидно, что в мире нет беспричинных явлений - любое явление природы и общества есть *следствие* той или другой причины. Одинаковые причины в одних и тех же условиях вызывают одинаковые следствия. С другой стороны, следствие не пассивно по *отношению* к причине, взаимодействие причины и следствия является причиной последующих *процессов*. Нет явлений, которые не имели бы своих причин и также точно нет явлений, которые бы не порождали тех или иных следствий. Следствие, произведённое некоторой причиной, само становится причиной другого явления; последнее, в свою очередь, становится причиной третьего явления и т.д. "Что сильнее всего? - Необходимость, ибо она властвует над всем" (*Фалес Милетский*; 625-547 г. до Р.Х.). Эту последовательность явлений, связанных друг с другом отношением внутренней *необходимости*, называют причинно-следственной цепью или "цепью причинения". Любая из цепей причинения не имеет ни *начала*, ни *конца*, и любые попытки найти "первопричину" или последнее следствие достаточно бесперспективны. Познание причинно-следственной связи явлений играет огромную роль в интеллектуальном развитии человека.

См. также *Возможность, Информация, Отношение, Причинность, ПРИЧИНЯТЬ, Результат, РЕЗУЛЬТАТЬ, СЛЕДИТЬ, Следствие* и раздел *СВЯЗИ, НЕОБХОДИМОСТЬ, СЛУЧАЙНОСТЬ.*

> "То, что принято называть "причиной", это не более, чем присущая душе человека привычка наблюдать одно явление после другого и заключать из этого, что явление более позднее по времени зависит происхождением от более раннего." (*Давид Юм*; 1711-1776).

**Причинность** - *связь* между отдельными *состояниями* видов и *форм* материи в *процессах* её движения и развития. Причинность - философская *категория*. Это одна из форм всеобщей взаимосвязи *явлений* четырёхмерного пространства-времени, в котором существует земная цивилизация. Причинность является основой практической деятельности человека, его стратегии и тактики, основой научных прогнозов. Некоторая острота проблемы причинности в философии вообще и в науке, в частности, обусловлена смешением *понятия* "*причина*" и категории "причинность". Вот что писал о причинности французский физик Леон

Бриллюэн: "Причинность принимает утверждение, содержащее "может": определённая причина может вызвать такие-то и такие-то следствия с некоторыми вероятностями и некоторыми запаздываниями. Различие очень важно. Закон строгого детерминизма может основываться (или опровергаться) единственным *экспериментом*: следствие есть или его нет. Это ответ типа "да или нет" и содержит лишь один бит информации. Такая ситуация может иногда встречаться, но она есть исключение. Вероятностная причинность требует множества экспериментов, прежде чем закон вероятности как функцию запаздывания времени $t$ удастся сформулировать приблизительно. <...> Вместо строгого детерминизма мы получаем некоторый закон корреляции, некий более тонкий тип определения, который можно применить к великому многообразию проблем".

В реальном мире одновременно происходит *множество независимых* явлений, часть из них конкурирует, одновременно влияя на развитие другого множества процессов. Это множество независимых *объективных* и *субъективных* причин, одновременно (или, по мнению Леона Бриллюэна, с запаздыванием) влияющих на развитие *событий*, приводит к тому, что третье в нашей последовательности рассмотрения множество событий происходит *случайно*. "Одно из самых распространённых заблуждений - принимать результат события за его неизбежное следствие." (*Гастон де Левис*; 1764-1830). В отличие от "причины" причинность допускает разветвление следствий. В *пределе* случайность начинает преобладать там и тогда, где и когда *детерминизма* становится слишком много, - *множество* причинно-следственных связей, *соизмеримых* по интенсивности, приводит к хаосу, из которого рождается *нормальное распределение* событий (в частности, *ошибок измерений*), а *информативность* событий рассеивается. Таким путём развивающаяся причинно-следственная цепь детерминированных по своей *физической сущности* явлений и приводит к *детерминированно-стохастическому процессу* существования белковых и небелковых тел.

Реальность *экспериментальной* работы такова, что *невозможно* провести эксперимент без *ошибок* поддержания требуемых условий и ошибок измерения. Хорошая или плохая *воспроизводимость* экспериментов - это другой вопрос, но ошибки будут - невозможно избавиться от так называемого *шума*. По существу, *результаты* экспериментов - *случайные величины*. Именно поэтому к *обработке данных* привлекаются *статистические методы* корреляционного, дисперсионного, регрессионного *анализов* и многие другие методы. Достаточно часто проблема не в ошибках измерений, а в слабых причинно-следственных связях исследуемого явления, процесса, в их *соизмеримости* с полезным сигналом. Статистические методы не могут **однозначно** утверждать - причинно-следственная связь есть или её нет. Единственно, на что они способны, - с принимаемой **самим исследователем** *доверительной вероятностью* утверждать, что, например, с вероятностью $P$=0,95 причинно-следственная связь есть, а вероятность того, что искомой связи нет - $P$=0,05. И не более того.

См. также *Возможность, ВОСПРОИЗВОДИТЬ, Информация, Мера, Отношение, Причина, Причинность, ПРИЧИНЯТЬ, Результат, РЕЗУЛЬТАТЬ, СЛЕДИТЬ, Следствие* и раздел *СВЯЗИ, НЕОБХОДИМОСТЬ, СЛУЧАЙНОСТЬ.*

"Слабые люди верят в удачу, сильные - в причину и следствие." (*Ралф Эмерсон*, 1803-1882).

**Причинно-следственная связь** - такое *отношение* между отдельными *событиями*, при котором одно из событий (*причина*) при его осуществлении *неизбежно* влечёт за собой возникновение другого события (*следствия*), а уничтожение причины приводит к неосуществимости следствия. Причинно-следственным связям *свойственна асимметрия*, поскольку скорость распространения материальных воздействий (передачи *информации*) вполне конечна и не превышает скорости света (по крайней мере на общепринятом *физическом* уровне).

Причинно-следственная связь, по *существу*, означает соединение, отношение взаимной *зависимости*, причинное сродство, общность между чем-либо и т.п. Для успешного применения *статистических методов* при *анализе* промысловых *данных* необходимо *понимать* и различать связи в отношениях причины и следствия и связи возникающие между *результатами наблюдений* (*экспериментов*) и *параметрами*, вычисляемыми по этим *данным* и характеризующими те или иные свойства изучаемого *явления*. Познание причинной связи явлений играет огромную роль в интеллектуальном развитии человека.

См. также *Возможность, Причина, Причинность, ПРИЧИНЯТЬ, Результат, РЕЗУЛЬТАТЬ, СЛЕДИТЬ, Следствие* и раздел *СВЯЗИ, НЕОБХОДИМОСТЬ, СЛУЧАЙНОСТЬ.*

"**ПРИЧИНЯТЬ, причинить** что, быть причиною, причинникомъ чего; делать, творить, соделывать, учинять, чинить, производить. (...) || ***Причина*** ж. начало, источникъ, вина, коренной поводъ действiю, случаю; что производитъ последствiя, что служитъ виною, рычагом, основной силой, начальнымъ деятелемъ явленья. *Всему своя причина.*

*Всему есть причина. Одна и та же причина рождает одно и то же следствіе. Міръ причин, духовный; міръ последствій,* вещественный. (...) *Причина рождаетъ следствіе, которое ведетъ къ цели. Причина есть исходная, начальная точка, а цель конечная;* посему || причиной зовуть и цель, намеренье, то, для чего (а въ перв. случае отъ чего) что случается, бывает. (...) || **Причинность,** лат. via causalitatis, доведеніе до уверенности въ чем либо, исходя отъ причины къ причине (Наум.). (...)" (*В.И.Даль*; 1801-1872), [82]. См. *Начало.*

См. также *Возможность, Информация, КОНЕЦ, Конечное, Отношение, Причина, Причинность, ПРИЧИНЯТЬ, Результат, РЕЗУЛЬТАТЬ, СЛЕДИТЬ, Следствие.*

**Прогноз** (< *греч.* **προγνωσις** – предузнавание, предопределение) – заключение о предстоящем развитии и исходе какого-либо *процесса* основанное на специальном исследовании. Прогноз предполагает *вариативность* и вероятность осуществления.

**Прогрессия** (< *лат.* progressio – движение вперёд, преуспеяние, развитие) – последовательность $x_1$, $x_2, \ldots,$ $x_n, \ldots,$ каждый член $x_k$ которой получается из предыдущего $x_{k-1}$ прибавлением постоянного (для данной прогрессии) *числа* (арифметическая прогрессия) или умножением на постоянное число (*геометрическая прогрессия*).

**Производная** – 1. (*мат.*) *Функция,* определяемая для каждого значения $x$ как *предел отношения*:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}, \tag{1.184}$$

если он существует. Производная – основное *понятие математического анализа;* производная характеризует скорость изменения функции $f(x)$ при изменении *аргумента* $x$.

Производные функции $y=f(x)$ обозначают $f'(x)$, $y'$, $dy/dx$, $df/dx$, $Df(x)$. Соотношение $dy/dx$ следует рассматривать именно целиком, как специальный **символ**, но не как дробь с числителем $dy$ и знаменателем $dx$. Процедура нахождения производной $f'(x)$, т.е. предела соотношения $\Delta y/\Delta x$ называется *дифференцированием* функции $y=f(x)$. Задача дифференцирования функций является предметом дифференциального исчисления, начала которого были разработаны Г.В.Лейбницем (*G.W.Leibniz*; 1646-1716) и И.Ньютоном (*I.Newton*; 1643-1727) и приоритет в открытии которого был причиной достаточно жёстких споров между этими двумя великими учёными [49].

Функция, имеющая производную, *непрерывна,* но не всякая непрерывная функция имеет производную во всех точках заданного промежутка. Если существует производная функции $f'(x)$, то её называют второй производной функции $y=f(x)$ и обозначают $f''(x)$, $y''$, $d^2y/dx^2$, $d^2f/dx^2$, $D^2f(x)$. Аналогично определяется производная любого (целого) порядка $n$. Для функций многих переменных определяются частные производные - производные по одному из аргументов, вычисленные в предположении, что остальные аргументы постоянны. Частные производные функции $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ обозначают $\partial y/\partial x_1$, $\partial y/\partial x_2, \ldots$, $\partial y/\partial x_k$ или $\partial f/\partial x_1$, $\partial f/\partial x_2, \ldots, \partial f/\partial x_k$.

*Термин* "производная" (а также вторая "производная" и т.д.) в 1797 г. ввёл Ж.Лагранж (*Lagrange Joseph Louis*; 1736-1813), обозначения $y'$, $f'(x)$, $f''(x)$ - он же (1770, 1779), обозначение $dy/dx$ в 1675 г. ввёл Г.Лейбниц (*Leibniz Gottfried Wilhelm*; 1646-1716). Частные производные появились в трудах И.Ньютона (*Newton Isaac*; 1643-1727), Г.Лейбница, Якоба Бернулли (*Jacob Bernoulli*; 1654-1705) и Иоганна Бернулли (*Johann Bernoulli*; 1667-1748), обозначения $\partial f/\partial x$, $\partial y/\partial x$ в 1786 г. ввёл А.Лежандр (*Legendre Adrien Marie*; 1752-1833), обозначения $f'_x$, $z'_x$ в 1797 и 1801 гг. ввёл Ж.Лагранж, обозначения $\partial^2 z/\partial x^2$, $\partial^2 z/\partial x\partial y$ в 1837 г. ввёл К.Якоби (*Jacobi Carl Gustav Jacob*; 1804-1851), [47].

См. также *Бесконечность* (*мат.*).

2. (*физ.*) Производная *физическая величина* - величина, образуемая из основных физических величин *системы* с помощью определяющих *уравнений*, описывающих *законы* физического мира. Законы физического мира формализуются в виде уравнений, описывающих *зависимость* одних величин (*функций*) от других (*факторов*). Характер этой *связи* позволяет выразить через несколько произвольно выбранных величин, называемых в таком случае основными, все остальные производные величины, используемые в науке, технике и технологии.

См. также *Безразмерная физическая величина*, *Отношение*, *Параметрическая величина*, *Производить*.

**Пропорциональное среднее** между двумя положительными *числами* - *геометрическое среднее* этих чисел.

**Пропорциональность** (< *лат.* proportio - пропорция, соотношение, соразмерность) - простейший вид *функциональной зависимости*. Различают прямую и обратную пропорциональность. Две *переменные величины* называют прямо пропорциональными (или просто *пропорциональными*), если *отношение* их не изменяется, т.е. во сколько раз увеличится (или уменьшится) одна из них, во столько же раз увеличится (или уменьшится) и другая. *Аналитически* пропорциональность величин $x$ и $y$

характеризуется *соотношением* $y=kx$, где $k$ - так называемый *коэффициент* пропорциональности. Графически пропорциональная зависимость изображается прямой *линией* (или полупрямой), проходящей через *начало* координат, угловой коэффициент которой равен коэффициенту пропорциональности. Переменные величины называются обратно пропорциональными, если одна из них пропорциональна обратному значению другой, т.е. $y=k/x$ или $xy=k$. *Графиком* обратно пропорциональной зависимости служит равнобочная гипербола (или одна её ветвь).

См. также *Пропорция*.

**Пропорция** (< *лат.* proportio - пропорция, соотношение, соразмерность) - (1) *соразмерность*, определённое *соотношение* частей целого (*элементов системы*) между собой и с целым. Пропорции наблюдаются (соблюдаются) в живой и неживой природе, в архитектуре, живописи, литературе, в технике, технологии, физике, химии и т.д. (2) (*мат.*) Равенство между двумя *отношениями* четырёх *величин* $a:b=c:d$. Величины $a$, $b\neq0$, $c$, $d\neq0$ называются членами пропорции, причём $a$ и $d$ называются - крайними, а $b$ и $c$ - *средними*. Произведение средних членов пропорции равно произведению крайних: $bc=ad$.

См. также *ОТНОСИТЬ, Отношение, Пропорциональность, Середа*.

**Процедура** (*франц.* procedure < *лат.* procedo, processi, processum - двигаться, протекать, продвигаться, продолжаться, действовать, достигать) - 1. Порядок выполнения последовательности действий в каком-либо сложном деле. 2. Процедура программы - одно из характерных средств языков программирования для сокращённой записи сколь угодно длинных вычислений. Описание процедуры программы вводит сокращённое параметризованное *функциональное обозначение* для некоторой части программы (тело процедуры). Выполнение тела процедуры впоследствии может трактоваться как элементарное действие, инициируемое вызовом процедуры, вносящим одновременно в тело процедуры фактические значения параметров. См. также *Процесс*.

**Процесс** (< *лат.* processus - движение вперёд, течение, ход событий, успех, удача, преуспеяние, **процесс**) - последовательные изменения какой-либо *системы*, *объекта*, субъекта или *явления*, происходящие в *результате стохастических* или *детерминистических закономерностей* ("стохастические закономерности" следует понимать буквально, поскольку в соответствии с *законом* больших *чисел* массовые *случайные* явления в своём *совокупном* действии создают *математически* **строгие закономерности**. Это проявляется отчасти в том, что наблюдается некоторое постоянство частоты осуществления какого-либо *события* при многократном повторении однородных условий (в *пределе* - неизбежность)).

См. также *Детерминированный процесс, Динамический процесс, Событие, СОБЫТИЕ.*

"Прямой путь - кратчайшее расстояние между двумя непрятностями." (*В.О.Ключевский*; 1841-1911).

**Прямая, прямой** (*прям, прямa, прямо,* укр. *прямий, прямо,* др.-русск. *прямо, прямъ* "прямой, правильный, честный, простой" (...). *М.Фасмер*; 1886-1962. [100]) - одно из основных геометрических *понятий*. Прямая обычно косвенным образом определяется *аксиомами* геометрии. Например, евклидова прямая - аксиомами инцидентности, *порядка*, конгруэнтности, *непрерывности*. В обыденном понимании прямая есть кратчайшее расстояние между двумя точками. В плоскости под прямой обычно понимают *линию* первого порядка. В прямоугольной (декартовой) системе координат ($x$, $y$) прямая определяется линейными уравнениями $y=bx$ и $y=b_0+b_1x$ (в общем случае $ax+by+c=0$, но такая *форма* записи принятая в *математике* не понятна *экспериментатору*). В *природе* прямые линии встречаются в основном в кристаллографии.

**Прямоугольное распределение** см. *Равномерное распределение.*

**Пуассона распределение** (по имени С.Пуассона (1837) (*Poisson Simeon Denis*; 1781-1840)) - *дискретное распределение вероятностей случайной величины* $X$ с целочисленными неотрицательными значениями $x=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, заданное *формулой*:

$$P(X=x)=\frac{\lambda^x}{x!}\,e^{-\lambda}, \tag{1.185}$$

где $\lambda>0$ - *параметр* распределения (рис.1.27).

Рисунок 1.27 характеризует вероятности $p_x$ распределения Пуассона. *Функция* вероятности $F(x)$:

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\sum_{x=0}^{x}\frac{\lambda^x}{x!}\,e^{-\lambda}. \tag{1.186}$$

*Математическое ожидание,* $M_x=\lambda$, *дисперсия,* $б_x=\lambda$. *Коэффициент асимметрии* $A_x=\lambda^{-1/2}$. Если *независимые* случайные величины $X_1$ и $X_2$ имеют распределение Пуассона с параметрами $\lambda_1$ и $\lambda_2$, то их сумма $X_1+X_2$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda_1+\lambda_2$.

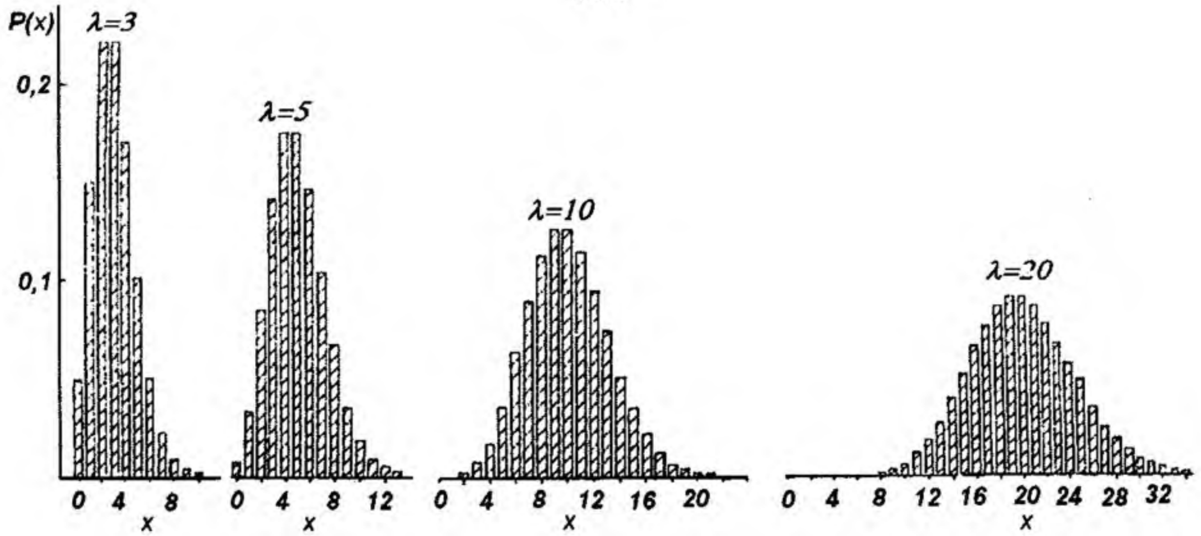



Рис.1.27. Распределения Пуассона для различных значений параметра распределения $\lambda$

Распределение Пуассона получается из *биномиального распределения* при большом $n$ и малом $p$ (см. рис. 1.2, в); его применяют к *процессам* с большим *количеством* исходов, из которых только малая часть обладает интересующими исследователя *свойствами*, т.е. много испытаний, но мало успехов. В *статистических моделях* распределение Пуассона используется и как аппроксимирующее, и как точное распределение. Например, если при $n$ независимых испытаниях *события* $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ осуществляются с одной и той же малой вероятностью $p$, то вероятность одновременного осуществления каких-либо $x$ событий (из общего числа $n$) приближённо выражается функцией $P_x(np)$.

Распределение Пуассона является приемлемой моделью для описания случайного числа появления *определённых* событий в фиксированном промежутке времени или в фиксированной области пространства. Так, распределению Пуассона подчиняется однородный поток требований в *теории* массового обслуживания населения, например, вызовов, поступающих на телефонную станцию, выездов медицинских машин "скорой помощи" при транспортных происшествиях в большом городе; в теории надёжности - числа отказов технологического оборудования в единицу времени, а также многие *физические явления*, например, процесс радиоактивного распада и др.

# Р

**Равновозможность** - осуществимость двух и более *событий*, испытаний или исходов с одинаковой *вероятностью*. Например, при бросании одной игральной кости все грани открываются с одинаковой вероятностью $^1/_6$.

См. также *Вероятность классическая (априорная), Вероятность математическая, Вероятность статистическая (апостериорная), Возможность, Отношение* и раздел 2.3, а также примечание 11 на с. 47.

**Равномерное распределение**, прямоугольное распределение - *непрерывное распределение вероятностей случайной величины* $X$, заданное *плотностью*:

$$p(x;\ a,\ b)=\begin{cases} 1/(b-a) & \text{при } x\in[a,\ b], \\ 0 \text{ в ином случае.} \end{cases} \qquad (1.187)$$

*Понятие* равномерного распределения на $[a,\ b]$ соответствует представлению о случайном *выборе* точки на отрезке $[a,\ b]$.

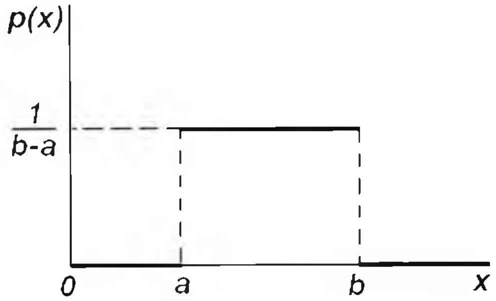



Рис.1.28. Равномерное распределение случайной величины $x$ на участке $a$–$b$

*Математическое ожидание* и *дисперсия* соответственно равны $\mathbf{E}X=(b+a)/2$* и $\mathbf{D}X=(b-a)^2/12$. Произвольное равномерное распределение с вышеуказанной плотностью может быть сведено *линейным* преобразованием к равномерному распределению на отрезке [0, 1], характеристики которого имеют наиболее простой вид. Например, *моменты* любого порядка $\beta$ равны $\mathbf{E}X^{\beta}=1/(\beta+1)$. Равномерное распределение является одним из самых распространённых распределений в *вероятностей теории*. Примеры равномерного распределения - распределение числа очков при игре с одним *результатообразующим объектом* (одна игральная кость, рулетка и т.п.), смертность взрослого населения.

См. также *РАСПРЕДЕЛЯТЬ, Случайные числа*, а также примечание 11 на с. 47.

**Размах выборки** - разность между наибольшим, $x_{max}=x_n$, и наименьшим, $x_{min}=x_1$, значениями *случайной величины* $X$ в *вариационном ряду* размерности $n$:

$$R_X=x_{max}-x_{min}=x_n-x_1, \qquad x_1<x_2\ldots<x_i\ldots<x_n. \qquad (1.188)$$

Подразумевается, что выборка получается в результате $n$ *независимых измерений* одной и той же случайной величины $X$.

---

*Примечание 15. Автору неловко рассуждать о математическом ожидании (как это принято в литературе) поскольку здесь нет меры центральной тенденции. Все значения случайной величины на отрезке *a-b* равновероятны, равновозможны.

"**РАЗУМЪ** м. духовная сила, могущая помнить (постигать, познавать), судить (соображать, применять, сравнивать) и заключать (решать, выводить следствіе); способность вернаго, последовательнаго, сцепленія мыслей, отъ причины, следствій ея и до цели, конца, особенно въ приложеніи къ делу. ***Разумъ,*** смыслъ, intellectus, Verstand; ***умъ,*** ratio, Vernunft. ***Духъ*** человека двухполовинчатъ: *умъ* и *воля; умъ* самое общее, а въ частномъ значеніи самое высокое свойство первой половины духа, способное къ отвлечоннымъ понятіямъ; ***разумъ,*** которому можно подчинить: ***пониманіе, память,*** *соображенье, разсудокъ, разуменье, сужденье, заключенье* ипр., ближе подходит къ ***смыслу, разсудку,*** применяется к обиходному и насущному. (...) || *Разумъ* чего, смыслъ, значенье, толкъ, сила. (...) **Разумевать** или **разуметь** что, понимать, постигать, знать, усвоить себе разумом или наукой. (...) **Разуменье**, уразуменье, знанье, пониманье, постиженье и понятіе, умственное (но не нравственное) усвоенье. (...)" (*В.И.Даль*; 1801-1872), [82].

**Распределение** *вероятностей случайной величины - закон,* описывающий поведение случайной величины, её способность какие-то значения принимать чаще, какие-то реже, а какие-то практически никогда. Если случайная величина - *физическая,* то закон будет описывать её способность *распределяться* во времени или в пространстве *равномерно* или неравномерно, где-то с большей *плотностью,* где-то с меньшей, где-то появляться чаще всего, а где-то не появляться вообще. Этот закон может иметь вид *функции - функции распределения* или *плотности вероятностей,* а может быть задан перечислением *вероятностей* случайной величины. Распределение вероятностей случайной величины - одно из центральных *понятий вероятностей теории* и *статистики математической. Определение* распределения вероятностей равносильно заданию вероятностей всех случайных *событий,* характеризующих некоторое случайное *явление.*

Распределение вероятностей называется *дискретным,* если случайная величина $X$ задаётся указанием **конкретных** *возможных* значений:

$$x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n$$

и соответствующих им вероятностей $P(X=x_i)$

$$p_1,\ p_2,\ldots,\ p_n,$$

при этом $p_i$ должны быть положительны и сумма вероятностей должна быть равна единице. Например, ряд возможных значений числа выпадающих очков на верхней грани игральной кости имеет вид: 1, 2, 3, 4, 5 и 6, ему соответствует ряд вероятностей 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6 (см. рис. 2.2 и статью *Гистограмма*); ряд возможных значений суммы очков двух костей: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 и 12, ему соответствует ряд вероятностей 1/36, 2/36, 3/36, 4/36, 5/36, 6/36, 5/36, 4/36, 3/36, 2/36, 1/36 (см. рис. 2.9). Примерами *дискретных* распределений вероятностей являются *биномиальное распределение*, определяемое вероятностями:

$$P\{X=m\}=C^m_n p^m(1-p)^{n-m}, \qquad (1.189)$$

где $m=1,\ 2,\dots,\ n,\ n>0$ - целое, $0<p<1$; *Пуассона распределение*, определяемое вероятностями:

$$P\{X=m\}=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}, \qquad (1.190)$$

где $m=1,\ 2,\dots,\ \lambda>0$.

См. также *Геометрическое распределение, Паскаля распределение.*

Во многих случаях случайная величина может принимать любое значение в *интервале*, например, $(a-b)$; вероятность события $a<X<b$ при этом равна:

$$P\{a<X<b\} = \int_a^b p(x)dx, \qquad (1.191)$$

где функция $p(x)\geq 0$ - *плотность вероятности*, причём:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1, \qquad (1.192)$$

т.е. попадание случайной величины в интервал $(-\infty\div+\infty)$ есть *достоверное событие*, но вероятность каждого отдельного значения может быть равна нулю. Такое распределение вероятностей величины $X$ называется *абсолютно непрерывным.*

Важнейшее распределение вероятностей непрерывного типа - *нормальное распределение* с *плотностью*:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi б_x^2}} e^{-(x-a)^2/2б_x^2}, \qquad (1.193)$$

где $-\infty<a<\infty$ и $б>0$ (см. также *Коши распределение, Максвелла распределение, Пирсона распределение, Показательное распределение, Рэлея распределение, Стьюдента распределение, Фишера распределение, Хи-квадрат распределение*). Кроме *дискретных* и непрерывных типов распределений вероятностей встречаются распределения и более сложной природы. Более или менее универсальное описание распределения вероятностей может быть получено при помощи *распределения функции*, иногда называемой интегральной (*кумулятивной*) функцией распределения, которая для любой случайной величины $X$ при каждом действительном $x$ определяется *формулой*:

$$F(x)=\mathrm{P}\{X<x\}, \tag{1.194}$$

причём функция $F(x)$ - монотонно неубывающая, непрерывная слева и такая, что:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x)=0, \ \lim_{x\to\infty} F(x)=1. \tag{1.195}$$

Вероятность *события* $a \leqslant X \leqslant b$ (1.191) на интервале $(a-b)$ в интегральном виде имеет вид:

$$\mathrm{P}\{a \leqslant X \leqslant b\} = F(b)-F(a). \tag{1.196}$$

Функция P однозначно задаёт соответствующее распределение вероятностей случайной величины.

Описание распределения вероятностей при помощи плотности вероятности или функции распределения не всегда удобно в практическом использовании (например, при сравнении распределения частиц по радиусам в цементной суспензии или в коллоидных растворах). Наиболее часто в технологии и научных исследованиях используется *среднее значение* случайной величины (*оценка математического ожидания*) и его *квадратичное* (*стандартное*) *отклонение* или *дисперсия*. Для случайной величины $X$ с *дискретным* распределением вероятностей математическое ожидание $\mathbf{E}X$ определяется следующим выражением:

$$\mathbf{E}X=\sum_{n=0}^{\infty} x_n p_p, \tag{1.197}$$

а для случайных величин $X$ с *абсолютно непрерывным* распределением вероятностей выражением:

$$\mathbf{E}X=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx, \tag{1.198}$$

при условии, что указанные ряд и интеграл сходятся абсолютно. Дисперсия случайной величины $X$ по определению равна:

$$\mathbf{D}X = \mathbf{E}(X-\mathbf{E}X)^2. \tag{1.199}$$

Практически полную *информацию* о распределении случайной величины дают *числовые* характеристики распределения, так называемые *моменты распределения*.

См. также *Вероятное отклонение, Квадратичное отклонение, Квантиль, Концепция, Медиана, Мода, Моментов метод, Моменты выборочные, Моменты распределения, Моменты эмпирические, Среднее, среднее значение.*

*Статистическим* аналогом распределения вероятностей является так называемое *эмпирическое распределение.* Дело в том, что все *результаты наблюдений* - результаты научных *экспериментов,* результаты работы технологических установок и вообще все фиксируемые *данные* о *процессах,* происходящих в природе и обществе, являются *выборками* из *совокупности,* и в результате *обработки* данных можно получить лишь только *оценки* тех или иных *параметров.* Кроме этого, надёжность оценки зависит от точности *измерений,* методики экспериментальной работы, *ошибок* в процессе любой практической деятельности и т.д. Не боясь впасть в преувеличение, можно утверждать, что потребность человека найти *истину* по результатам скудных данных человеческой практики в значительной *степени* обусловила развитие мощного математического аппарата *вероятностей теории* и *статистики математической.* В результате обработки выборочных результатов наблюдений $X_1$, $X_2, \ldots,$ $X_n$, которые предполагаются *независимыми,* одинаково распределёнными случайными величинами с функцией распределения вероятностей $F(x)$, можно получить *эмпирическую функцию* распределения:

$$F^*_n(x)=n_x/n, \qquad (1.200)$$

где $n_x$ - число наблюдений в выборке с $X_k<x$, которой соответствует так называемое *выборочное среднее*:

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}X_k \qquad (1.201)$$

и *выборочная дисперсия*:

$$s^2{}_x=\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X})^2, \qquad (1.202)$$

Необходимо заметить, что в формуле (1.202) $s^2{}_x$ - так называемая *смещённая оценка генеральной* дисперсии. Для устранения смещения число степеней свободы (1.242) в знаменателе необходимо уменьшить на единицу:

$$s^2{}_x=\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X})^2, \qquad (1.203)$$

Это связано с тем, что вместо математического ожидания в формуле (1.202) используется арифметическое среднее, зависящее от *элементов* выборки.

Эмпирическое распределение и его характеристики используются для приближённого представления теоретического распределения вероятностей и его характеристик, см. об этом в статьях *Математическая статистика*, *Непараметрические методы* математической статистики, *Статистическая оценка*. См. также *РАСПРЕДЕЛЯТЬ*.

*Понятие* "распределение вероятностей" следует отличать от понятия "*функция распределения*" которое применяется к неубывающим функциям, стремящимся к нулю при $x \to -\infty$ и к единице при $x \to +\infty$. Функция распределения, например, *дискретной случайной величины* $X$ *определяется формулой:*

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} p(x_i), \tag{1.204}$$

в которой сумма берётся по всем значениям $x_i$, не превосходящим $x$.

См. также *Распределения функция случайной величины X*, *Функция распределения* и раздел 2.4.

**Распределение выборки** см. *Эмпирическое распределение*.

**Распределений устойчивость** - *распределение вероятностей случайной величины X*, в котором сумма *независимых* случайных величин, имеющих распределение $F(x)$, в свою очередь имеет распределение $F(x)$; *арифметическое среднее* случайных величин, имеющих распределение $F(x)$, снова распределение $F(x)$.

**Распределения закон** - удобное описательное *понятие*, которое, в *зависимости* от контекста, может означать *распределение вероятностей* (какой-либо *случайной величины*), *распределения функцию* или *плотность вероятности*. Закон распределения устанавливает *связь* между *возможными* значениями случайной величины и соответствующими им *вероятностями*. См. также *РАСПРЕДЕЛЯТЬ*.

**Распределения функция** *случайной величины X* - *функция* действительной *переменной* $x$, принимающей при каждом $x$ значение, равное *вероятности* неравенства $X < x$.

Каждая функция *распределения* $F(x)$ обладает следующими *свойствами:*

1. $F(x_1) \leq F(x_2)$ при $x_1 < x_2$;
2. $F(x)$ *непрерывна* слева при каждом $x$;
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1.$

Каждая функция $F$, обладающая свойствами (1)-(3), может рассматриваться как функция распределения некоторой случайной величины $X$.

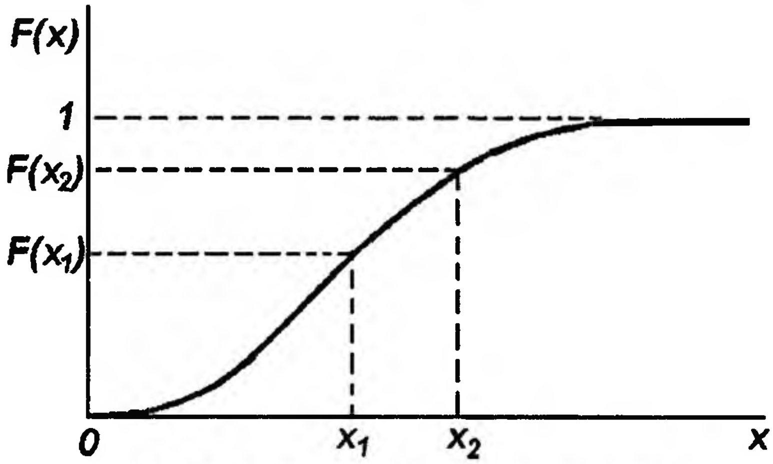



Рис.1.29. Функция распределения непрерывной случайной величины $x$

$$\lim_{x\to-\infty} F(x)=0, \ \lim_{x\to\infty} F(x)=1$$

Функции распределения наиболее употребительных распределений вероятностей (например, *нормального*, *биномиального*, *Пуассона* и др. распределений) табулированы. *Понятие* функции распределения естественным образом распространяется на многомерный случай, но многомерные функции распределения значительно менее употребительны, чем одномерные.

См. также *РАСПРЕДЕЛЯТЬ*, *Функция распределения случайной величины.*

"**РАСПРЕДЕЛЯТЬ**, ***распределить*** что, кого, расписать, назначить, давать место и дело, назначенье, разсылать по местам; подводить подъ разряды, порядки, отделы. (...) ***Распределенье***, дейст. по гл. ***Распределя(и)тель***, ***распределительница***, распределившій что, кого. ***Распределёный***, къ распределенью служащій, относящс. **Распределённость** ж. точность или порядок въ распределеніи." (*В.И.Даль*; 1801-1872), [82].

"**РЕЗУЛЬТАТЪ** м. фрнц. следствіе чего либо, последствіе, конечный выводъ, итогъ, развязка, исходъ, конецъ дела." (*В.И.Даль*; 1801-1872), [82]. См. также *Результат*.

**Результат** (*фр.* resultat - результат, следствие, итог < *лат.* resultatuo - отскакивание, отражение) - итог; то, что получено в завершении какой-либо деятельности.

См. также *Причина*, *Причинность*, *ПРИЧИНЯТЬ*, *РЕЗУЛЬТАТЪ*, *Следствие*.

**Репрезентативная выборка** см. *Выборка представительная*.

**Рэлея распределение** - непрерывное *распределение вероятностей случайной величины* $X$, заданное *плотностью вероятностей*:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases} \qquad (1.205)$$

зависящей от *параметра* **б**>0. Распределение Рэлея имеет положительную *асимметрию*, его *мода* находится в точке $x$=**б** (рис.1.30).

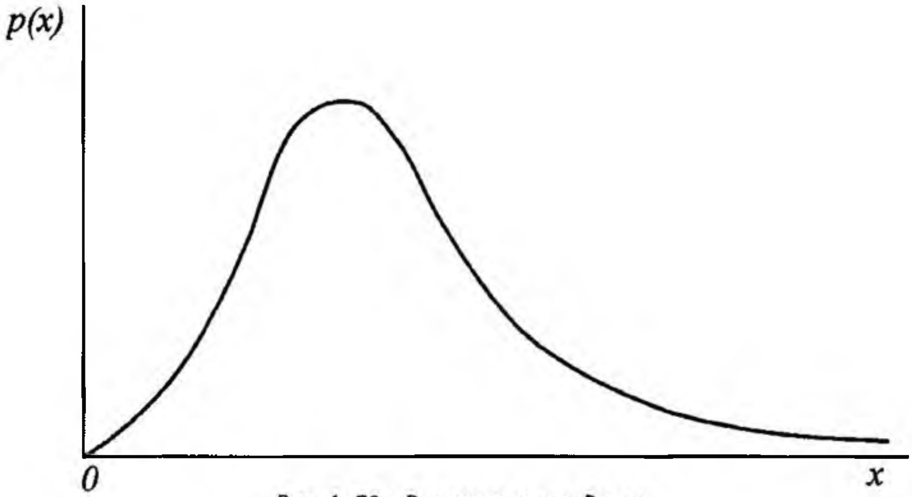



Рис.1.30. Распределение Рэлея
(площадь под кривой плотности вероятностей равна 1)

Все *моменты* распределения Рэлея *конечны*, *математическое ожидание* и *дисперсия* равны, соответственно:

$$\mathbf{E}X=\sqrt{\pi/2\text{б}}\ ,\qquad (1.206)$$

$$\mathbf{D}X=(4-\pi)\text{б}^2/2.\qquad (1.207)$$

При **б**=1 распределения Рэлея совпадает с распределением арифметического корня из случайной величины, имеющей *Хи-квадрат распределение* с двумя *степенями свободы*. В любом случае распределение Рэлея может быть интерпретировано как распределение длины вектора, координаты которого в декартовой *системе* координат на плоскости *независимы* и имеют *нормальное распределение* с параметрами 0 и **б**$^2$ (см. *Максвелла распределение*). Распределение Рэлея имеет основное применение в *теории* стрельбы по круговой цели и *статистической* теории *связи*. Распределение было введено в 1880 г. Д.У.Рэлеем (*J.Rayleigh*; 1842-1919) в связи с задачей сложения гармонических колебаний.

# С

"Свойство - это слишком общее понятие, в котором каждый различает мойство, твойство и егойство." (*Виктор Кротов*; р.1946).

**Свойство** - проявление какой-либо характеристики *объекта* (предмета, вещи) или *явления*. Каждый объект или явление обладает *мно-*

*жеством* свойств, характеризующих его *качество* (*сущность*). Какие-то свойства объекта (явления) существенны, какие-то несущественны. Изменение существенных свойств объекта (явления) равносильно изменению качественного состояния объекта (явления). См. также *Категория*.

**Свойство отсутствия последействия** см. *Случайный процесс без последействия*.

**Связать** - соединить, установить *связь*, общность, близость между чем-либо (например, открыть связь между двумя *явлениями*, установить *причину* и *следствие*).

См. также *Информация*, *Результат*, *РЕЗУЛЬТАТЬ*, *СВЯЗЫВАТЬ*, *Связь* и раздел *СВЯЗИ, НЕОБХОДИМОСТЬ, СЛУЧАЙНОСТЬ*.

**Связей число** (число связей, наложенных на выборку) - *число параметров* или число *оценок генеральных параметров*, *определённых* по *выборке*. *Максимальное* число связей, которое можно наложить на выборку, равно размерности выборки $n$, но в этом случае *степеней свободы число* (1.242) равно нулю; это значит, что нет ни одной степени свободы для проверки *статистических гипотез*.

См. также *Связать*, *СВЯЗЫВАТЬ*, *Связь*.

"**СВЯЗЫВАТЬ**, ***связать*** что, (*связываю* или *связую*), скреплять и соединять вязкою, образуя узелъ изъ самой вещи этой, а также особою завязкою. (...) || То же в иносказтльн. поставлять въ зависимость, находить въ чем общность, нераздельность, причину и следствіе и пр. (...) || *Связь*, состояніе по знч. гл. на ***ся***; соединенье, скрепа, сцепленье, соотношенье, зависимость, причинное сродство; || товарищество, дружба и знакомство, взаимныя дела; || все, что собрано изъ различныхъ частей, но составляет одно. (...)" (*В.И.Даль*; 1801-1872), [82].

См. также *Информация*, *Отношение*, *Причина*, *Причинность*, *ПРИЧИНЯТЬ*, *Результат*, *РЕЗУЛЬТАТЬ*, *Связать*, *СВЯЗЫВАТЬ*, *Связь*, *Следствие* и раздел *СВЯЗИ, НЕОБХОДИМОСТЬ, СЛУЧАЙНОСТЬ*.

> "С некоторыми людьми мы строим отношения на правде. С другими - на лжи. И эти последние не менее прочны." (*Альбер Камю*; 1913-1960).

**Связь** - контакт, соединение, *соотношение*, *зависимость*, *причинное* сродство, общность между чем-либо, отношение взаимной зависимости, обусловленности и т.п. В науке, технике, технологии и в жизни различают связи - *математические*, *физические*, *механические*, химические, физиологические, биологические, социальные, родственные, семейные, интимные, *функциональные*, простые и сложные, прямые и обратные, внутренние и внешние, положительные и отрицательные, циклические и ациклические, *линейные* и нелинейные, постоянные и *случайные*, *множественные*, единичные и др.

Связь (*мат.*) - *отношение*, возникающее между *результатами наблюдений* (*экспериментов*) и *параметрами*, вычисляемыми по этим *данным*. Параметр характеризует те или иные *свойства* изучаемого *явления*, поскольку имеет отношение взаимной зависимости со всеми *элементами выборки*. Например, *арифметическое среднее* связано со всеми элементами выборки, и его *определение* приводит к уменьшению *информационного потенциала* выборки на единицу, *степеней свободы число* $\nu$ выборки при этом становится равным $n$-1 (в соответствии с (1.242)). Важным *следствием* уменьшения числа степеней свободы является некоторое увеличение *квадратичного отклонения*. Определение *коэффициента корреляции* $r_{xy}$ между *случайными величинами* $x$ и $y$, по существу, сопровождается вычислением двух параметров $x_{cp}$ и $y_{cp}$, что приводит к уменьшению информационного потенциала выборки на две единицы, и число степеней свободы выборки становится равным $\nu = n-2$.

Связи в отношениях *причины* и *следствия* - такое отношение между отдельными *событиями*, при котором одно из событий (причина) при его осуществлении *неизбежно* влечёт за собой возникновение другого события (следствия), а уничтожение причины приводит к неосуществимости следствия. Например, поступление теплоты в сплошную среду жидкости или газа неизбежно приводит к возникновению конвекции. Причинно-следственным связям свойственна *асимметрия*, поскольку скорость распространения материальных воздействий вполне *конечна* и не превышает скорости света.

Связи, во множестве смыслов этого *понятия*, между *случайным* и *необходимым формализуются больших чисел законом*.

См. также *Информация, Отношение, Причина, Причинность, ПРИЧИНЯТЬ, РЕЗУЛЬТАТЬ, Результат, Связать, СВЯЗЫВАТЬ* и раздел *СВЯЗИ, НЕОБХОДИМОСТЬ, СЛУЧАЙНОСТЬ*.

**Связь** - отношение взаимной *зависимости*, обусловленности, общности между чем-нибудь... (*С.И.Ожегов*; 1900-1964. [90]).

См. также *Информация, Отношение, Причина, Причинность, ПРИЧИНЯТЬ, РЕЗУЛЬТАТЬ, Результат, Связать, СВЯЗЫВАТЬ, Связь, Следствие, СОБЫТИЕ, Событие* и раздел *СВЯЗИ, НЕОБХОДИМОСТЬ, СЛУЧАЙНОСТЬ*.

"**Середа, среда, середина, серединка, серединочка, средина, серёдка, серёдочка** ж. точка (на черте), черта (на плоскости) или плоскость, мнимый разрезъ (въ толще), обозначающіе половину, равный разделъ, или близкое отъ этого место, удаленное отъ краевъ. (...) || Нутро, внутренность, глубина, утроба, глубь, дальность отъ края. (...) || ***Середа*** или ***среда***, вещество, тело, толща, пластъ, более о веществахъ жидкихъ и прозрачныхъ. (...) || Община, общество, сборъ, толпа. (...) || ***Средина***, по времени, половина. (...) || **Середи, среди, средь, серёдъ** нар., **средэ** црк., посреди, въ (на) средине, по (на) середке, между, промежъ или окружонный чемъ-либо; || въ числе, изъ числа, между прочими. (...) [**Середина, серединка** см. *середа*]. **Серединковый, серединный, срединный, серёдковый** и **серёдочный**, въ середине находящійся, къ ней относящійся. (...) **Серединчатый, серёдчатый**, въ чомъ есть особая середка, серединка, ядро, мякоть, мозгъ ипр., пртвплжн. *глухой* или *сплошной*. (...) **Середній** или **средній**, что въ средине, между чемъ-либо, посреди крайностей, по месту и по времени, по мере, весу, числу, либо по качеству. Въ строгомъ смысле, въ математ. ***средняя цена, средняя сложность ценъ:*** сумма несколькихъ ценъ (одного предмета), разделенная на их число. ***Средняя долгота, широта***, выведенная по такому жъ счисленью изъ многихъ данныхъ. *Среднее время*, равномерное, разделенное, для обихода, на равновременные часы, минуты; пртв. истинное, *астрономическое*, идущее не равномерным ходомъ, а по солнцу. (...) *Средний род* грам. ни мужскій, ни женскій, по местоименіям *оно, сіе, это*. *Средній залогъ* грам. глаголы, не переносящіе действія одного предмета на другой, или выражающіе состоянье: *сидеть, ходить, жить*. (...)". (*В.И.Даль*; 1801-1872), [82].

См. также *Данные, Данных обработка математическая, Истина, ФАКТОРЪ.*

**Симметрия** (< *греч.* **συμμετρια** - соразмерность, надлежащая пропорция, **симметрия**. *А.Д.Вейсман*; (1834-1913), [80]) - философская *категория*, характеризующая соразмерность, полное соответствие в расположении *частей целого относительно центра, средней линии, плоскости*; строгая *правильность* в расположении, размещении чего-либо. 1. *мат.* Симметрия (в узком смысле) или *отражение* (зеркальное) относительно относительно *прямой* $a$ на плоскости - преобразование плоскости такое, что каждая точка $M$ переходит в точку $M'$, причём отрезок $MM'$ перпендикулярен прямой $a$ и делится ею пополам. При этом *прямая* $a$ называется осью симметрии. Аналогично в *пространстве* - симметрия относительно плоскости $\alpha$ - преобразование пространства, при котором каждая точка *М* переходит в точку *М'* такую, что отрезок *ММ'* перпендикулярен плоскости α и делится ею пополам. Плоскость α называется ***плоскостью*** симметрии. 2. *мат.* Симметрия (в широком смысле) - *свойство* геометрической фигуры Ф, характеризующее некоторую правильность *формы* Ф, неизменность её при действии движений и зеркальных отражений. Различают: центральную симметрию, осевую симметрию и симметрию переноса. 3. *физ.* Фундаментальное свойство природы, с которым *связаны законы* сохранения энергии, *количества* движения (импульса), массы и др. (например, свойства элементарных частиц, строение атомов и молекул, *структура* кристаллов). Некоторые *законы физики* инвариантны относительно *определённых* преобразований. Это значит, что законы, устанавливающие соотношение между *величинами*, характеризующими физическую *систему*, не изменяются при тех или иных преобразованиях. Аналогично для динамических систем (нестационарных *процессов*): если законы, устанавливающие соотношение между величинами, определяющих изменение этих величин со временем, не меняются при определённых преобразованиях, то эти законы обладают симметрией относительно производимых преобразований. 4. *биол.* Симметрия - зеркальное, билатеральное, радиальное или иное правильное расположение одноимённых частей тела или органов по отношению к некоторой оси или плоскости, называется осью или плоскостью симметрии.

Отсутствие симметрии свойственно *причинно-следственным связям*, поскольку скорость распространения материальных воздействий вполне *конечна* и не превышает скорости света. *Множество соизмеримых* причинно-следственным связей, участвующих в *формировании случайной величины*, приводит к симметрии *кривой плотности распределения* случайной величины во времени или пространстве. Например, *гистограммы распределения вероятностей результатов* бросания двух и более игральных костей (рис. 2.9, 2.10, 2.11), результатов подбрасывания монет (рис. 2.8), кривая *нормального распределения* (рис.1.1,3, 1.20,б, 1.34,2, 1.43, 1.52,2, 2.25), кривая плотности распределения Коши (рис.1.11), кривая плотности распределения Лапласа (рис.1.12), кривые плотности распределения (рис. 1.34,1, 1.34,3, 1.52,1, 1.52,3, 2.14) и др.

Трансформация симметрии из *термина* в категорию произошла в последние десятилетия в процессе развития науки, техники и технологии.

См. также *Асимметрия*.

**Система** (< *греч.* **σύστημα** - составленное из многих частей, соединённое в одно целое, состав, соединение, стройное целое. *А.Д.Вейсман*; (1834-1913), [80]) - нечто целое, представляющее собой единство *закономерно* расположенных и находящихся во взаимной *связи* частей (*элементов*): предметов, *явлений*, а также знаний о природе, обществе и мышлении. В науке, технике, технологии и искусстве - *множество элементов* (узлов, агрегатов, приборов, фрагментов различного рода), *понятий*, *идей*, *норм* с *отношениями* и *связями* между ними, образующих некоторую целостность, законченность, совершенство и подчинённых определённым задачам *функционирования*.

(1) Для систем характерен уровень рассмотрения или вложения - макросистема, система, подсистема,..., микросистема. Уровней вложения (рассмотрения) может быть много; также можно говорить о параллельных подсистемах и об относительности систем. *Сущность* системы определяется способом взаимодействия элементов друг с другом и с внешним миром; *свойства* системы не являются совокупной *суммой* свойств составляющих её элементов, это *качественно* иное образование.

(2) По осуществимости взаимодействия элементов системы с внешним миром системы подразделяются на открытые, закрытые и замкнутые. По температурному режиму системы подразделяются на системы изотермические, политропические и адиабатические. По природе взаимодействия элементов системы друг с другом системы подразделяются на *детерминированные*, *стохастические* и *детерминированно-стохастические*. Например, система "скважина-пласт" является открытой детерминированно-стохастической политропической системой.

(3) По характеру изменения *параметров* системы в пространстве и/или во времени системы подразделяются на *динамические*, стационарные и статические. Примером первой является система "скважина-пласт", а последней: геологическая система - *совокупность* отложений горных пород, характеризующаяся определённой ископаемой фауной и ископаемой флорой, образовавшаяся в течение геологического периода, имеющая относительно определённые пространственные характеристики и потоки массы и энергии.

(*общ.научн.*) Классификация - система соподчинённых понятий (классов *объектов*, явлений, *процессов*, фрагментов), составленная на основе *анализа* их общих признаков в данной области знаний, техники, технологии и закономерных связей между ними.

(*физ.*) Система мира. Атомы, молекулы. Система тел. Системы времени. Система отсчёта (понятие, представляющее совокупность объектов или субъекта (наблюдателя), *относительно* которых *определяется* положение материала (вещества, сплошной среды)). Русская (британская) система мер. Системы единиц измерений физических величин (Международная система единиц (СИ), МКГС, МКСА, МКСК, МКС, МТС, СГС и др.). Система (сингония) в кристаллографии. Система геологическая. Термодинамически (не)равновесные системы.

(*мат.*) Совокупность *аксиом*, принимаемых для доказательства теоремы или *принципов*, положенных в основу какой-либо *теории*. Например, система аксиом Пеано, система аксиом Фреге [86]. Система координат (например, декартова прямоугольная, цилиндрическая, сферическая, полярная, географическая, небесная). Системы чисел - целых, простых, действительных, иррациональных. Системы счисления: двоичная, пятеричная, восьмиричная, десятичная, двенадцатиричная, шестидесятиричная, позиционная и др. Система логарифмов. Система *распределений Пирсона*. Системы *уравнений*.

(*техн.*) Определённая последовательность, организация каких-либо действий, *процедур*, операций, *процессов*. Например, система разработки, система учёта, система контроля.

(*мех.*) Материальная система тел. Солнечная системы, звёздные системы.

(*физиол.*) Совокупность атомов, молекул, клеток, нервных узлов, органов, связанных друг с другом для выполнения какой-либо *функции*. Например, простейшие (одноклеточные; амёбы, бактерии, инфузории), макромолекулы (РНК, ДНК), клетки, многоклеточные, центральная нервная система, сердечно-сосудистая система, желудочно-кишечный тракт и т.д. Все живые организмы.

(*фил.*) Система *категорий*. Системы понятий - *концепции*. Концепции - системы понятий о состояниях, событиях, явлениях и процессах в природе, технологии, обществе и мышлении. Логические системы, служащие для исследования или описания других систем (см. *Мета*).

(*соц.*) *Популяции* живых организмов: муравейник, улей, термитник, стадо, стая, прайд и т.п. Сообщества людей того или иного уровня.

(*юрид.*) Система права (совокупность всех действующих в государстве правовых норм, регулирующих общественные отношения), например, римское право.

(*лингв.*) Языковые системы.

В последние десятилетия также говорят о системообразующих факторах, о системном подходе к тем или иным событиям, явлениям, процессам.

**Скаляр** (< *лат.* scalaris - имеющий форму лестницы, ступенчатый), **скалярная величина** - *величина*, каждое значение которой может быть выражено одним (как правило, *действительным*) *числом*, без указания направления. Например, вязкость (динамическая, кинематическая), давление, диаметр, длина, доли (массовые, мольные, объёмные), концентрация, критерии подобия, масса, объём, относительные физические величины, плотность, площадь, радиус, температура, тепловой *эффект* фазовых переходов $\Delta H$, теплоёмкость, теплопроводность, энергия (активации $E$, внутренняя $U$, диссипации $\varepsilon_{\text{дv}}$, свободная $F$), энтальпия $H$, энтальпия свободная $G$, энтропия $S$ и др. *Термин* "скалярный" в 1843 году ввёл Уильям Гамильтон (*Hamilton William Rowan*; 1805-1865).

"**СЛЕДИТЬ** кого, идти по следамъ, искать или преследовать по приметамъ или какимъ либо признакамъ пути. (...) || - за кемъ, за чемъ, наблюдать, узнавать обо всемъ, что до этого предмета относится, стараться знать, что кто делает, или каковъ ходъ дела. (...) **Следъ**, м. или *следы*, признакъ, примета чего либо прошлаго, бывшаго, остатокъ, отпечатокъ; вліяніе минувшаго, былаго; улика и поличное. (...) || Оттискъ, отпечатокъ ступни, ногъ, лапъ, или колеи колесъ, полозьевъ, прокаченной или протащенной вещи. (...) ***Следовать*** за кемъ, за чемъ, идти или ехать следомъ, вследъ. (...) || *Следовать* кому и чему, подражать, поступать по примеру чего, согласно съ чемъ. (...) || *Следовать* из чего быть следствіемъ, заключеньемъ чего, какъ явленіе и причина его; зависеть отъ известныхъ условій, явствовать изъ чего, как необходимое, неизбежное дело или очевидность. (...) || *Следуетъ, следовало*, безлично: должно, нужно, надо, надлежитъ, прилично, необходимо, сокрщ. следъ. (...) || *Следовать*, что, делать следствіе, разыскивать, дознавать, разбирать. (...) ***Следствіе*** ср. следованье, в] знач. действія, розыскъ по делу. (...) || *Следствіе*, последствія, то, что за чемъ неминуемо следуетъ, конечное проявленье действія, причины, повода. (...) || *Въ следствіе* чего, или *вследствіе*, какъ нар. по причине, для, ради чего, отчего, почему, на основании чего. || *Следствіе* из чего, заключенье, выводъ. (...) **Следовательно, следствено** нар. итак, посему, стало быть, изъ сего явно, следуетъ, видно, ясно, верно. (...)" (*В.И.Даль*; 1801-1872), [82].

См. также *Информация, Отношение, Причина, Причинность, ПРИЧИНЯТЬ, Результат, РЕЗУЛЬТАТЬ, Следствие* и раздел *СВЯЗИ, НЕОБХОДИМОСТЬ, СЛУЧАЙНОСТЬ*.

"Одно из самых распространённых заблуждений - принимать результат события за его неизбежное следствие." (*Гастон де Левис*; 1764-1830).

**Следствие** - то, что *физически* или логически с *необходимостью* вытекает из чего-либо другого, как из *причины* или основания.

См. также *Возможность, Информация, Отношение, Причина, Причинность, ПРИЧИНЯТЬ, Результат, РЕЗУЛЬТАТЬ, Связать, СВЯЗЫВАТЬ, Связь, СЛЕДИТЬ*, а также раздел *СВЯЗИ, НЕОБХОДИМОСТЬ, СЛУЧАЙНОСТЬ*.

"**СЛУЧАЙ** м. (*со-лучать*) быть или быль, приключенье, происшествіе, притча, дело, что сталось, случилось, сбылось; обстоятельство, встреча; все нежданное, не предвиденное, внезапное, нечаянное. (...) *Случай*, случайное или удобное, спопутное къ чему время, пора, обстоятельство; нечаянное совпадение, либо встреча чего. (...) *Случай* или ***случайность***, безотчетное или безпричинное начало, въ которое веруют, отвергающіе провиденье. (...) ***Случайный***, о деле, нечаянный, недуманный, случившійся, приключившійся собою, безъ чьего либо умысла, намеренья, старанья. (...)" (*В.И.Даль*; 1801-1872), [82].

См. также *Начало* и эпиграф на с. 12 в разделе *СВЯЗИ, НЕОБХОДИМОСТЬ, СЛУЧАЙНОСТЬ*.

"Весьма вероятно наступление невероятного." (*Агафон*; V-IV в. до Р.Х.).

**Случайная величина** - *величина*, значение которой *невозможно* предсказать исходя из условий *эксперимента* или *наблюдений*. Почти все *результаты измерений физических* величин по существу случайные величины. Случайные величины могут изменяться *непрерывно* (*температура, давление, концентрация*, радиус *частиц дисперсной фазы*) или *дискретно* (*число* "очков" в азартной игре, число частиц, число дефектов, число отказов, аварийность). По мнению В.Феллера (W.Feller; 1906-1970), *понятие* "случайная величина" в некоторой степени некорректно, более подходящим был бы *термин* "*функция случая*" [61]. Дело в том, что независимой переменной является положение точки в пространстве *элементарных событий*, т.е. *результаты эксперимента, наблюдения* или реализация того или иного случая.

См. также *СЛУЧАЙ, Случайное событие, Эмпирическое распределение*. Подробнее см. разделы 2.1. и 2.2.

**Случайная выборка** см. *Выборка.*

"Случай - псевдоним Бога, когда он не хочет подписаться своим собственным именем." (*Анатоль Франс*; 1844-1924).

**Случайное событие** - *событие*, наступление или ненаступление которого в некотором испытании (*эксперименте*) зависит от *множества* случайных *факторов* и для которого *постулируется определённая вероятность* его наступления (ненаступления) при *данных* условиях. Случайное событие - одно из основных *понятий теории* вероятностей. Наличие у случайного события определённой вероятности $p_i$ проявляется в поведении его *частоты* $n_i/n$ в $n$ повторных испытаниях, которые происходят в неизменных условиях; при больших $n$ частота $n_i/n$ оказывается близкой к вероятности $p_i$. В отличие от вероятности частота является случайной величиной. Достаточно часто случайное - *неизбежно*, а неизбежное - случайно. "Случайность главным образом зависит от нашего знания." (*Якоб Бернулли*; 1654-1705).

См. также *СЛУЧАЙ*, *Случайная величина*, *СОБЫТИЕ*, *Событие* и раздел *СВЯЗИ, НЕОБХОДИМОСТЬ, СЛУЧАЙНОСТЬ*.

"Всё новое, необычное утверждается в мире случайно. В основе любого творчества - торжество духа случайности. В основе любого развития - реализация той или иной случайности, её самораскрытие." (*Неизв.*)

**Случайность** (**эвентуальность** < *фр.* eventuel - случайный; возможный < *лат.* eventus - исход, конец, результат; успех, удача; приключение, случай; участь, удел, судьба. *Н.Ю.Шведова*, [104], *И.Х.Дворецкий*; (1894-1979) [84]) - проявление *множества* независимых *детерминированных причин* (*факторов*), совокупное действие которых в данной точке пространства и/или в данный момент времени вызывает то или иное событие, явление. Случайность - это наблюдение следствия при отсутствии полной информации о причинах. Например, в азартных играх (и не только): если максимально точно зафиксировать *начальное* положение и скорость *объекта*, *физические* характеристики сплошной среды и объекта, то по законам классической механики и аэродинамики можно рассчитать движение идеального объекта и достоверно предсказать исход *опыта*. Поскольку сделать это **невозможно**, то и результат азартной игры (и не только) - случаен! Случайность в природе и обществе совершенно естественна, *неизбежна* и закономерна. *Больших чисел закон* объясняет как случайность переходит в достоверность.

См. раздел *СВЯЗИ, НЕОБХОДИМОСТЬ, СЛУЧАЙНОСТЬ*, разделы 2.2., 2.3., 2.6, статью *Необходимость и случайность*, а также статьи *Больших чисел закон, Вероятность математическая, Детерминизм, Закон, Мера, Нормальное распределение, Причина, Следствие, Случайная величина, Случайное событие, СЛУЧАЙ.*

**Случайные числа** - числа, которые могут рассматриваться как значения *независимых*, одинаково *распределённых случайных величин*. Как правило, имеются в виду значения случайных величин с *равномерным распределением* на *интервале* (0, 1) или приближения к таким значениям, имеющие *конечное число* цифр в своём представлении. Использование случайных чисел было *связано* с техникой *случайного выбора* в *математической статистике* и *теории* игр. В связи с возникновением *метода статистических* испытаний роль случайных чисел значительно возросла. Первоначально случайные числа получали *экспериментальным* путём с помощью рулетки, игральных костей и т.п. методами. Первые специальные таблицы случайных чисел были составлены в 1927 году для *процедуры* случайного выбора (рандомизации) при планировании эксперимента. В связи с задачами *моделирования* на ЭВМ были созданы специальные устройства - датчики или генераторы случайных чисел, действие которых основано на *физических явлениях*, обладающих соответствующими случайными характеристиками, например, *шумах* радиоэлектронных ламп, радиоактивном распаде и др. Основной недостаток этого способа - необходимость специального оборудования, которое должно работать согласованно с вычислительной машиной. Поэтому наибольшее распространение получили программные способы получения случайных чисел, основанные на вычислительных алгоритмах. Найденные алгоритмически последовательности случайных чисел на самом деле случайными числами не являются, т.к. имеют период, что существенно отличает их от случайных чисел. Однако при решении практических задач программно получаемую последовательность чисел можно рассматривать как случайную при условии, что объём получаемой *выборки* не слишком велик. Такие числа принято наэывать псевдослучайными числами. Из алгоритмов можно отметить метод произведений, метод вычетов, метод получения псевдослучайных чисел из иррациональных чисел и др.

**Случайный процесс без последействия** (Марковский процесс) - *случайный процесс*, в котором для двух любых моментов времени $\tau_0$ и $\tau_1$ ($\tau_0<\tau_1$), условное распределение $p(x)$ при $\tau=\tau_1$ зависит только от $p(x)$ при $\tau=\tau_0$, при условии, что заданы все значения $p(x)$ при $\tau<\tau_0$.

Это свойство, определяющее Марковский процесс, называется свойством отсутствия последействия: состояние некоторой *системы* в момент времени $\tau_0$ однозначно определяет распределение вероятностей развития процесса при $\tau>\tau_0$, причём динамика процесса в прошлом (при $\tau<\tau_0$) не влияет на это распределение. Марковский процесс служит моделью для многих процессов в физике (броуновское движение, диффузия, распад радиоактивного вещества), в биологии (развитие популяций, мутации, распределение эпидемий), в химии, в теории массового обслуживания. Примером Марковского процесса являются также ветвящиеся процессы. [61].

**Случайный процесс**, *вероятностный*, или *стохастический процесс* - процесс изменения во времени состояния какой-либо *системы* в соответствии с вероятностными *закономерностями*. Характеристики случайного процесса в любой *момент* времени являются *случайными величинами* с *определённым распределением вероятностей*. Типичным примером случайного процесса является процесс броуновского движения. Другие примеры: турбулентное течение жидкостей, процессы тепло- и массообмена в технологических аппаратах, распространение радиоволн при наличии помех, движение транспортных потоков и др.

См. также *Детерминированно-стохастическая модель, Детерминистическая модель, Модель экспериментально-статистическая, Причина, Причинность, Связь, Следствие, Статистическая модель, Стохастическая модель, Структурная модель.*

**Смещённость оценки** см. *Несмещённая оценка.*

"**СОБЫТИЕ, событность** кого съ кемъ, чего съ чемъ, пребывание вместе и въ одно время; *событность происшествій*, совместность, по времени, современность. **Событныя** *происшествія*, современные, въ одно время случившіеся. || *Событіе*, происшествіе, что сбылось (...). Это ***событчик мой*** бывший где либо со мною вместе, в одно время, сосвидетель." (*В.И.Даль*; 1801-1872), [82]. См. также *Событие.*

"Когда надо постичь какие-либо события,
то исходя из места и времени,
на различение предшествующего и последующего
опирается в своих рассуждениях человек."
(*Тхакура Видьяпати*; 1380-1466).

**Событие - *уникальное*** *явление*, происшествие, случай, факт, эпизод, дело, казус, инцидент, курьёз, пассаж. Событие является *следствием* предшествующего и может быть *причиной* последующего. Событие как явление окружающего нас мира в большинстве своём проходит незамеченным, а может быть целью. В последнем случае можно говорить о событии как *результате наблюдения*. Полезно различать события элементарные (неразложимые) и события составные (разложимые на элементарные). Так, например, одиннадцать возможных результатов бросания двух игральных костей (от 2 до 12 очков) раскладываются на 36 сочетаний (элементарных событий) открывающихся граней. Современное толкование события существенно отличается от толкования события Владимиром Далем в XIX в.

См. раздел 2.1, а также *Причинность, Связь, Случайное событие, СОБЫТИЕ, Событие.*

**Совместные распределения** - общий *термин, относящийся* к *распределению* нескольких *случайных величин*, заданных на одном и том же *вероятностном* пространстве. Например, многофакторные нормальные распределения $p(x_1, x_2, ..., x_k) = C\exp(-Q(x_1, x_2, ..., x_k))$ [7]. Рис.1.31 и рис. 2.26. иллюстрируют двухфакторное нормальное распределение.

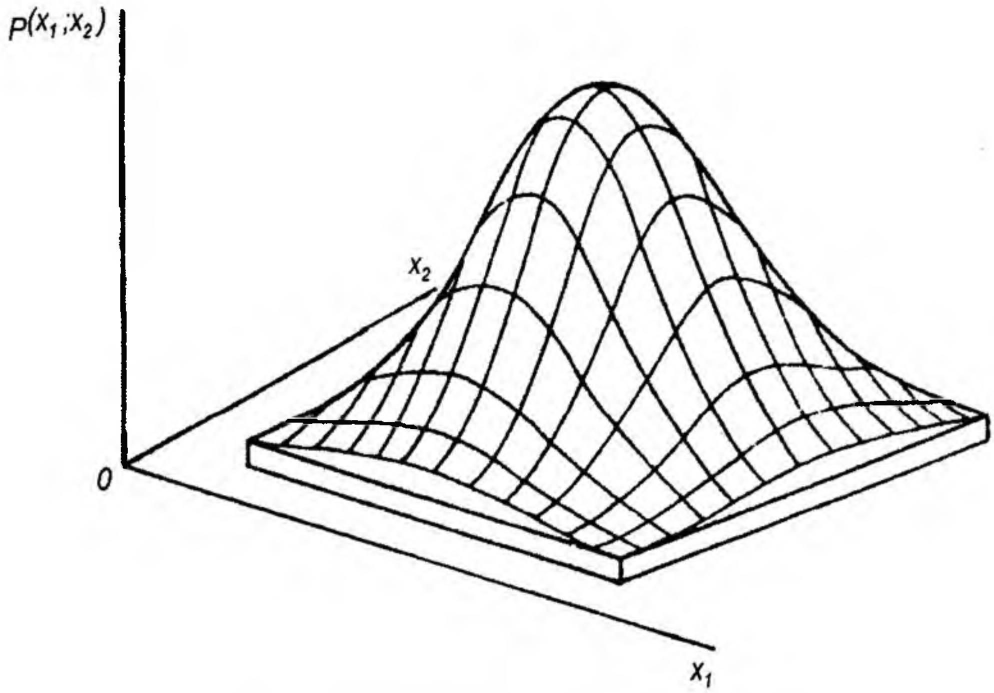



Рис.1.31. Совместная плотность вероятностей двух независимых нормально распределённых случайных величин

См. также *Распределение вероятностей.*

"**СОВОКУПЛЯТЬ, совокупить** что съ чемъ, придавать, прибавлять, соединять; собирать вместе, въ одно, сочетать, прiобщать. (...) ***Совокупный***, вместный, совместный; соединённый, прiобщённый; общiй. (...)" (*В.И.Даль*; 1801-1872), [82].

См. также *Совокупность.*

"То, что людьми принято называть судьбою, является в сущности лишь совокупностью учинённых ими глупостей." (*Артур Шопенгауэр*; 1788-1860).

**Совокупность** ( < *цслав.*, *ст.-слав.* ***совокоупити*** < *др.-русск.*, *цслав.* ***вкупе*** - вместе, ***куп*** - куча. *М.Фасмер*; (1886-1962), [100]) - 1. Сообщество, сочетание, соединение, общее *число*, сумма. 2. *мат.* *Понятие теории статистического выборочного метода.* В *статистике математической* совокупностью называется *множество* каких-либо однородных *элементов*, из которого по определённому *правилу* выделяется некоторое подмножество, называемое выборкой. Например, при приёмочном статистическом контроле в роли совокупности выступает множество всех изделий, подлежащее общей характеризации. В простейших случаях контролируемая выборка извлекается из совокупности *случайно* (наугад), что с точки зрения *вероятностей теории* означает: если совокупность содержит $N$ элементов и отбирается выборка из $n$ элементов ($n<N$), то выбор должен быть осуществлён таким образом, чтобы для любой группы из $n$ элементов вероятность быть извлечённой равнялась $n!(N-n)!/N!$.

В практике *экспериментальных* исследований и в математической статистике выборкой из совокупности принято также называть *результаты измерений* какой-либо *физической величины*, подверженной *случайным ошибкам*. В этом случае под совокупностью подразумеваются все *возможные* значения физической величины. Для решения практических задач *бесконечное* множество значений интереса не представляет; практический интерес представляют те или иные характеристики соответствующей *функции распределения* $F(x)$. В этом случае выборка из бесконечной совокупности представляет собой наблюдаемые значения нескольких случайных величин, по которым определяются необходимые *параметры*.

См. также *Генеральный*, *СОВОКУПЛЯТЬ*.

**Соизмеримые и несоизмеримые величины** см. *Величины соизмеримые и несоизмеримые*.

**Соотношение** см. *Отношение*.

**Состояние** (< *церк.-слов.*, *ср.* *ст.-слав.* **състоiание** - "устойчивость, настойчивость" от гл. **съ-стоiати ся** - существовать, держаться (*рус.* состоять). *Н.Ю.Шведова*, [104]) - 1. *Процесс* развития сложной *системы*. 2. *Пространственное* и/или *временное* положение, в котором находится система (кто-либо или что-либо) в данный *момент* времени. 3. *Равновесие термодинамической* системы. 4. *Совокупность* нервных и психических *реакций* человека в данный момент времени. *Потенциальная* готовность к тем или иным поступкам. 5. Звание, социальное положение (*устар.*). 6. Имущество, собственность.

**Состоятельность оценки** - *статистическая оценка параметра распределения вероятностей*, обладающая тем *свойством*, что при увеличении *числа наблюдений вероятность* отклонений оценки от оцениваемого параметра на *величину*, превосходящую некоторое наперёд *заданное* малое *число*, стремится к нулю. Другими словами, оценка $m_x$, вычисленная по выборке размерности $n$, будет состоятельной оценкой для $M_x$, если для любых сколь угодно малых положительных чисел $\varepsilon$ и $\eta$, существует $N$ такое, что вероятность неравенства:

$$|m_x - M_x| < \varepsilon, \tag{1.208}$$

больше $1-\eta$ для всех $n>N$ [33]. В формальных обозначениях *теории* вероятностей можно записать:

$$P\{|m_x - M_x| < \varepsilon\} > 1-\eta, \quad n>N. \tag{1.209}$$

Это значит, что для любого наперед заданного малого числа $\varepsilon$ можно найти такое достаточно большое число $N$, что при любой размерности *выборки* $n$, превышающей это число, вероятность того, что $m_x$ будет отличаться от истинного значения больше, чем на $\varepsilon$, будет сколь угодно близка к нулю. В этом случае оценка $m_x$ будет называться сходящейся по *вероятности* или сходящейся *стохастически* к $M_x$. Таким образом, оценка $m_x$ будет состоятельной оценкой для $M_x$, если она сходится к $M_x$ по вероятности [33].

Попроще - оценка параметра называется *состоятельной*, если по мере роста числа наблюдений $n\to\infty$ она стремится к *математическому ожиданию* оцениваемого параметра. Так, *арифметическое среднее* и выборочная *дисперсия* представляют собой состоятельные оценки соответственно математического ожидания и дисперсии *нормально распределённой* случайной величины.

См. также *Больших чисел закон, Квадратичное отклонение.*

"**СОСТОЯТЬ** изъ чего, быть составлену, заключать въ себе составныя части, и слагаться изъ нихъ. (...) || - въ чемь, содержаться, заключаться, составлять сущность чего. (...) Находиться или быть. (...) ***Состояться***, исполниться, сбыться, свершиться. (...) ***Состоянье***, бытъ, положенье, въ каком кто или что состоитъ, находится, есть; отношения предмета. (...) || Сословіе, званіе, каста; званіе, родъ занятій и родъ жизни, по рожденью, либо наследственно, или по избранью. (...)" (*В.И.Даль*; 1801-1872), [82].

См. также *Состояние*, *Состоять*.

"**Состоять** изъ чего, быть составлену, заключать въ себе составныя части, и слагаться изъ нихъ. (...) *Полное сужденье состоитъ изъ трёхъ частей: изъ общаго даннаго, изъ приложенья его и изъ заключенья.* (...) || - въ чомъ, содержаться, заключаться, составлять сущность чего-либо. (...) **Состояться**, исполниться, сбыться, совершиться. (...)." (*В.И.Даль*; 1801-1872), [83].

См. также *Состояние*, *СОСТОЯТЬ*.

**Состоять** (< *церк.-слов.*, *ср. ст.-слав.* **съ-стоіати** - "состоять; существовать, держаться"; вероятно, калька *греч.* syn-istasthai - "состоять из", возм., влияние *нем.* bestehen - "сосуществовать, состоять". *Н.Ю.Шведова*. [104]) - 1. Иметь что-либо в своём составе. 2. Иметь *содержанием*, сутью что-нибудь. 3. Пребывать, находиться (в качестве кого-нибудь или где-нибудь, в составе кого-нибудь или чего-нибудь.

См. также *Состояние*, *СОСТОЯТЬ*, *Состоять*.

**Среда** - *концептуальное* пространство, содержащее *множество* однородных *взаимосвязанных элементов*, находящееся в контакте с другим пространством или *субстанцией*. Среда может быть внешняя и внутренняя, сплошная и *дискретная*. Для *среды* характерно стремление к "гомеостазу", т.е. сохранение целостности, сопротивление всяческим "насильственным" изменениям, - перемещениям элементов, изменению *количества*, нарушению *функционирования*, *структурным* изменениям и т.п. И в то же время среда способна естественно развиваться.

Однородные элементы подразумеваются в самом широком смысле: атомы, молекулы, ионы (сплошная среда); люди, разговаривающие на одном языке (языковая среда); люди одного уровня образования, развития, характера деятельности (культурная среда, интеллектуальная среда, среда общения, криминальная среда и т.п.). Среда может быть комфортная и дискомфортная.

Интеллектуальная среда - среда, способствующая мышлению. Что и как человек думает, какие он строит мысленные *модели*, имеет первостепенную важность.

В последние десятилетия наблюдается расширение *понятия* "среда": образовательная среда (школы, специализированные образовательные учреждения различного уровня, лицеи, вузы); операционная среда (элементы компьютеров и программное обеспечение); производственная среда; биоэнергетическая среда (люди, способные изменять биоэнергетический потенциал, как свой, так и чужой); *совокупности* людей: государство, общество, община, сбор, коллектив, толпа, очередь и т.п. (социальная среда); живые существа, растения и природный ландшафт (среда обитания). В этих (и других) случаях можно говорить о *среде* как о множестве функционально связанных разнородных элементов.

Бывают среды, являющиеся одновременно и внешними, и внутренними. Например, дисперсионная среда в суспензиях и эмульсиях является внутренней средой по *отношению* к окружающему пространству (технологическому аппарату, грунту и т.д.) и внешней средой по отношению к частицам твёрдой фазы в суспензиях и частицам другой жидкой фазы в эмульсиях. Среда может быть подвижной и неподвижной, сплошной (дисперсионной средой) и несплошной (дисперсной фазой), гомогенной и/или гомофазной.

См. также *Качество, Количество, Определение, ПОНИМАТЬ, Понятие, Середа, Состоять*.

**Среднее арифметико-геометрическое** см. *Концепция, Середа, Среднее, среднее значение.*

**Среднее арифметическое** см. раздел 2.4, 2.5. а также *Концепция, Середа, Среднее, среднее значение.*

**Среднее арифметическое взвешенное** см. *Концепция, Середа, Среднее, среднее значение.*

**Среднее гармоническое** см. *Концепция, Середа, Среднее, среднее значение.*

**Среднее геометрическое** см. *Геометрическая прогрессия, Концепция, Середа, Среднее, среднее значение.*

**Среднее квадратичное** см. *Концепция, Середа, Среднее, среднее значение.*

**Среднее кубическое** см. *Концепция, Середа, Среднее, среднее значение.*

**Среднее пропорциональное** между двумя положительными числами - *геометрическое среднее* этих чисел.

**Среднее степенное взвешенное** см. *Концепция, Середа, Среднее, среднее значение.*

"Середина есть точка, ближайшая к мудрости; не дойти до неё - то же самое, что её перейти." (*Конфуций*; 552-479 гг. до Р.Х.).

**Среднее, среднее значение** *совокупности чисел* $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ - *концептуальное число*, заключённое между наименьшим и наибольшим из них и получаемое из *элементов выборки* при помощи некоторой *процедуры,* которая как раз и определяет специфический вид среднего значения. Среднее значение может быть целью исследования, а может привлекаться для характеристики совокупности в целом как один из *моментов* или как *оценка математического ожидания.* Среднее значение совокупности выражает равнодействующую влияния *множества факторов* на *вариацию* признака *независимо* от вида *распределения случайной величины.* Среднее значение подобно *центру* тяжести - точке, через которую проходит равнодействующая сил тяжести всех *элементов выборки.* Таким образом, можно говорить об уравновешивании отклонений от среднего значения в *асимметричном* распределении, а непосредственное взаимопогашение отклонений от среднего значения, присущее *нормальному распределению,* рассматривать как частный случай уравновешивания (проявление *закона* равновесия), которое не изменяет природы среднего значения и отклонений от него.

Среднее значение - *понятие статистики математической,* по существу, некоторая *абстрактная величина,* зависящая от *метода* вычисления (т.е. от концепции) и в случае арифметического среднего удовлетворяющая условию метода наименьших квадратов:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_1-x_{cp})^2=\min. \tag{1.210}$$

Иногда условие (1.210) записывают в более простом, но нереальном виде:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{cp})=0. \tag{1.211}$$

В научных исследованиях технологических *процессов* в большинстве случаев особых проблем с исчислением среднего значения не возникает. Наиболее употребительным средним является **арифметическое среднее**:

$$x_{cp}=\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}. \tag{1.212}$$

Если *результаты наблюдений* $x_1$, $x_2, \ldots,$ $x_n$ являются взаимно *независимыми случайными* величинами, имеющими одинаковое нормальное распределение, то среднее арифметическое будет *несмещённой, состоятельной* и *эффективной оценкой математического ожидания* $M_x$ (см. также (1.76), (1.122) и соответствующие разделы). *Вероятная ошибка* определения среднего арифметического всегда поддаётся оценке.

Если *переменные* величины $x_i$ имеют различные *частоты* или *вес*, *правильнее* вычислять арифметическое взвешенное среднее:

$$x_{ср,w} = \bar{x}_W = \frac{W_1 x_1 + W_2 x_2 + \ldots + W_n x_n}{W_1 + W_2 + \ldots + W_n}, \tag{1.213}$$

где $W_i$ - частота или вес $i$-того наблюдения (см. также (1.78)). Среди всех *линейных оценок* взвешенное среднее арифметическое обладает *минимальной дисперсией*.

Примером приложения арифметического взвешенного среднего в технологии строительства скважин является средний взвешенный диаметр бурильной колонны:

$$\bar{d}_w = \frac{d_1 l_1 + d_2 l_2 + \ldots + d_n l_n}{l_1 + l_2 + \ldots + l_n}, \tag{1.214}$$

где $d_i$ - диаметр $i$-того *элемента* бурильной колонны, $l_i$ - длина $i$-того элемента, $n$ - *количество* элементов в бурильной колонне. Необходимо добавить, что применительно к среднему диаметру бурильной колонны понятие математического ожидания теряет смысл.

В науке, технике и технологии кроме арифметического среднего применяют также взвешенное *степенное* среднее:

$$\bar{x}_{w,\alpha} = \left( \frac{W_1 x_1^\alpha + W_2 x_2^\alpha + \ldots + W_n x_n^\alpha}{W_1 + W_2 + \ldots + W_n} \right)^{1/\alpha}. \tag{1.215}$$

Если частоты или веса всех наблюдений равны, то *формула* (1.215) упрощается:

$$\bar{x}_\alpha = \left( \frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + \ldots + x_n^\alpha}{n} \right)^{1/\alpha}. \tag{1.216}$$

Степень $\alpha$ определяет конкретный вид среднего значения. При $\alpha=-1$ общая формула степенного среднего превращается в гармоническое среднее, т.е. в среднее из обратных величин:

$$x_h = \frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}}. \tag{1.217}$$

При $\alpha=0$ получим геометрическое среднее:

$$x_g = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n} = \sqrt[n]{\Pi x_i}. \tag{1.218}$$

Сравните с формулами (1.40), (1.42) *геометрической прогрессии.*
См. также *Логарифмически нормальное распределение,* (1.94) и соответствующую статью.

Примером среднего геометрического является средний диаметр частиц твёрдой фазы неправильной формы:

$$\bar{d}_ч = \sqrt[3]{l \times b \times h}\ . \qquad (1.219)$$

где $l$, $b$, $h$ - максимальные длина, ширина, высота частицы.

При $\alpha$=1 получим формулу среднего арифметического (1.212).

При $\alpha$=2 получим формулу среднего квадратичного:

$$x_s = \sqrt{(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2):n}\ , \qquad (1.220)$$

При $\alpha$=3 получим формулу среднего кубического:

$$x_{cub} = \sqrt[3]{(x_1^3+x_2^3+\ldots+x_n^3):n}\ . \qquad (1.221)$$

В науке, технике и технологии находит применение также арифметико-геометрическое среднее, $x_{cp.g}$. Арифметико-геометрическое среднее - общий *предел* последовательностей арифметического среднего $x_{cp.n}$ и геометрического среднего $x_{g.n}$, получаемых в результате следующих операций. Для пары положительных чисел $a$ и $b$ вычисляют арифметическое среднее $x_{cp.1}$ и геометрическое среднее $x_{g.1}$. Далее для пары $x_{cp.1}$ и $x_{g.1}$ снова вычисляют арифметическое среднее $x_{cp.2}$ и геометрическое среднее $x_{g.2}$ и т.д. В результате получают последовательность чисел $x_{cp.n}$ и $x_{g.n}$, $n$=1, 2,... Вычисления продолжают до получения результата с требуемой точностью.

*Анализ* формулы (1.215) позволяет определить *соотношения* между различными видами среднего. Чем больше значение $\alpha$, тем больше величина среднего значения; при этом получается следующая цепочка неравенств:

$$x_h < x_g < x_{cp.g} < \bar{x} < x_s < x_{cub}. \qquad (1.222)$$

Рисунок 1.32 отчасти иллюстрирует этот феномен (см. с. 211).

Например, если $x_1$=1, $x_2$=2, $x_3$=3, то $x_h$=1,636; $x_g$=1,817; $x_{cp.g}$=1,9075; $x_{cp}$=2; $x_s$=2,161; $x_{cub}$=2,29. *Дисперсии*, соответственно равны: $s^2{}_h$=1,1987; $s^2{}_g$=1,0502; $s^2{}_{cp.g}$=1,0128; $s^2{}_{cp}$=1,0; $s^2{}_s$=1,0389; $s^2{}_{cub}$=1,1262. См. таблицу 1 на с. 211.

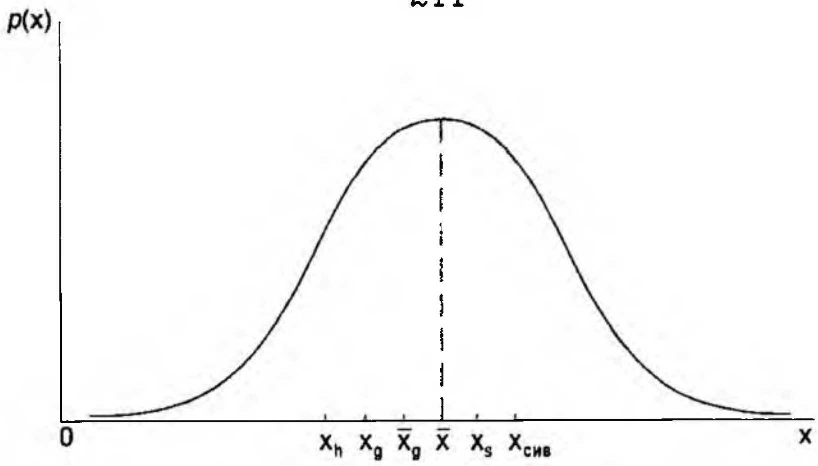



Рис.1.32. Общий случай распределения оценок математического ожидания выборочного распределения: $x_h$ - гармоническое среднее, $x_g$ - геометрическое среднее, $x_{cp.g}$ - арифметико-геометрическое среднее, $x_{cp}$ - арифметическое среднее, $x_s$ - квадратичное среднее, $x_{cub}$ - кубическое среднее (площадь под кривой плотности вероятностей равна 1)

*Таблица* 1.

Выборочные оценки неизвестного математического ожидания: $x_h$ - гармоническое среднее, $x_g$ - геометрическое среднее, $x_{ср.g}$ - арифметико-геометрическое среднее, $x_{ср}$ - арифметическое среднее, $x_s$ - квадратичное среднее, $x_{cub}$ - кубическое среднее

| Вид среднего значения | Среднее значение | Дисперсия |
|---|---|---|
| Гармоническое | 1,636 | $s^2{}_h$=1,1987 |
| Геометрическое | 1,817 | $s^2{}_g$=1,0502 |
| Арифметико-геометрическое | 1,9075 | $s^2{}_{cp.g}$=1,0128 |
| Арифметическое | 2,0 | $s^2{}_{cp}$=1,0 |
| Квадратичное | 2,161 | $s^2{}_s$=1,0389 |
| Кубическое | 2,29 | $s^2{}_{cub}$=1,1262 |

Очевидно, что разные виды средних различаются; отсюда возникает **проблема** правильного выбора *формы* среднего значения. Также очевидно, что у арифметического среднего *минимальная* дисперсия. Другими словами, арифметическое среднее является *эффективной статистической оценкой*. Если *ошибки измерений* подвержены *закону* нормального распределения, то состоятельной, несмещённой и эффективной оценкой неизвестного математического ожидания будет арифметическое среднее, а все остальные оценки смещены относительно $M_x$.

Решающую роль в решении **проблемы** выбора формы среднего значения играет *физическая сущность объекта* (*процесса, явления*), интуиция и добросовестность исследователя.

Следует отметить, что задача поиска среднего значения для *симметрично* распределённой *случайной величины* решается относительно просто. В этом случае можно говорить о взаимной компенсации противоположных влияний *множества* факторов, влияющих на результат *наблюдения* (*эксперимента*). Иное дело - несимметричное распределение (рис. 1.33).

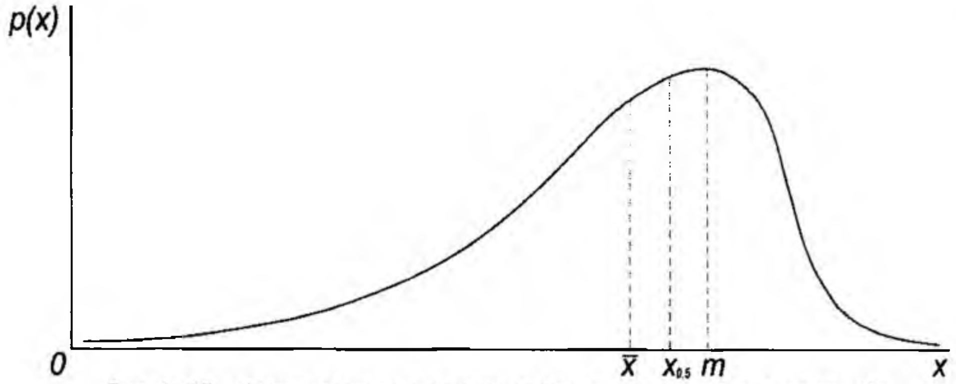



Рис.1.33. Несимметричное распределение случайной величины $x$: $x_{ср}$ - арифметическое среднее, $x_{0.5}$ - медиана, $m$ - мода (площадь под кривой плотности вероятностей равна 1)

В *асимметричном* распределении случайной величины противоположные влияния различных факторов не компенсируют друг друга и результаты наблюдений концентрируются либо слева, либо справа от середины диапазона распределения (рис.1.1, 1.18, 1.30, 2.7,б, 2.12, 2.16, 2.22, 2.23, 3.3), кроме этого распределение может быть островершинным и плосковершинным (рис.1.34, 1.52, 2.14, 2.25), и, иногда, иметь два *максимума* (рис.1.19, 1.35).

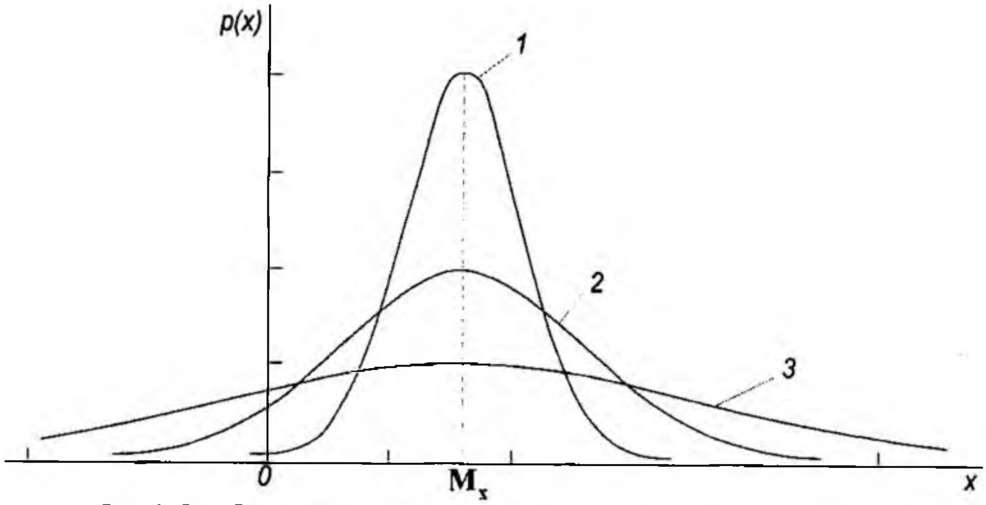



Рис.1.34. Плотности вероятностей симметричных распределений: 1 - островершинное распределение; 2 - нормальное распределение; 3 - плосковершинное распределение (площадь под каждой кривой плотности вероятностей равна 1)

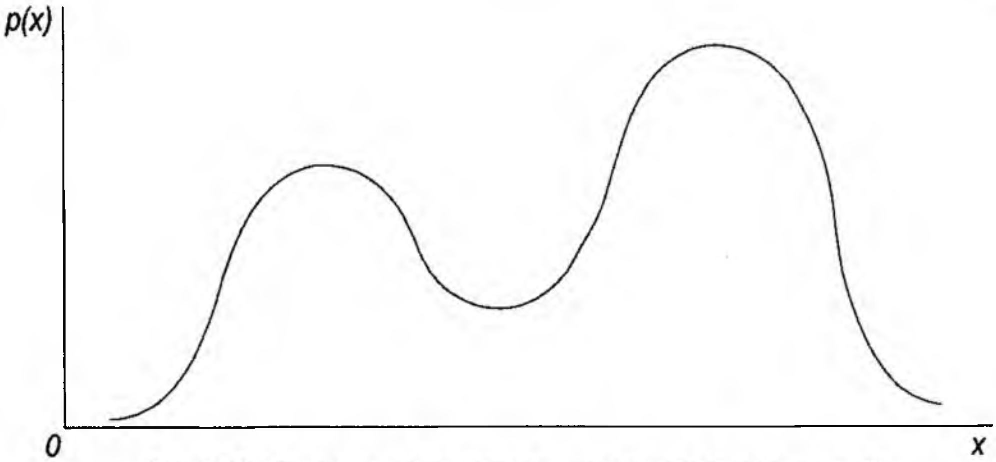



Рис.1.35. Бимодальное распределение случайной величины $x$
(площадь под кривой плотности вероятностей равна 1)

Для таких распределений среднее значение выражает равнодействующую влияния всех факторов на *вариацию* случайной величины. Среднее значение подобно центру тяжести - точке, через которую проходит равнодействующая всех гравитационных сил. В IV в. до Р.Х. *понятия* среднего значения не было, интуитивная и неформализованная идея об оптимальных *свойствах* средних исходила от Аристотеля (**'Ἀριστοτέλης**; 384-322 до Р.Х.) - понятие "истинная середина", учение о достоинствах среднего поведения, средней уверенности, средней умеренности и т.д. "Прекрасна во всём середина: мне по душе ни избыток, ни недостаток" (*Демокрит* (**Δημόκριτος**); 460/470 - 360/370 г. до Р.Х.).

В III в. до Р.Х. Архимед (**'Ἀρχιμήδης**; ок. 287-212 до Р.Х.) ввёл понятие "центр тяжести", соответствующее понятию среднего значения. В учебнике Теона Смирнского (II в.) идёт речь о разработке центрального члена *непрерывной пропорции* (в то время ещё не различали понятия среднего значения и пропорции). Разработку определения центрального члена непрерывной пропорции следует, по-видимому, считать *началом* развития понятия среднего значения. А в XX в. английский статистик У.Дж.Рейхман написал: "Каждый понимает, что такое средние, до тех пор, пока не начнёт применять их".

См. также *Веса результатов измерений, Квадратичное отклонение, Концепция, Медиана, Мера, Мода, Отношение, Параллельные измерения, Середа.*

**Стандарт** (*англ., нем.* - standard) - 1. *Норма*, образец, мерило, *модель*, принимаемые за исходные для сопоставления с ними других подобных *объектов*. 2. Нормативно-технический документ. 3. Нечто шаблонное, трафаретное, не содержащее в себе ничего необычного, исключительного, творческого. 4. Стандартный, типовой, нормальный. 5. *Квадратичное отклонение нормально распределённой случайной величины.*

См. также *Вероятность житейская, Генеральный, Дисперсия, Дисперсия воспроизводимости, Несмещённая оценка, Стандартизация случайной величины, Стьюдента критерий.*

**Стандартизация случайной величины** – преобразование *случайной величины* с целью получения *распределения* с *центром* в нуле и *дисперсией*, равной единице. Стандартизация *нормального распределения* (1.121), (1.225), (2.20) производится с помощью *соотношения*:

$$z = \frac{x - M_x}{б_x}. \tag{1.223}$$

где $M_x$ - *математическое ожидание*, а $б_x$ - *стандартное отклонение* или просто *стандарт*. См. также (2.22). Стандартизация случайной величины $X$ производится путём вычитания из неё *среднего значения выборки* и деления на *квадратичное* отклонение:

$$z_1 = \frac{x_1 - m_x}{s_x}, \tag{1.224}$$

где $m_x$ - *оценка* математического ожидания (в частном случае *среднее арифметическое*), а $s_x$ - выборочное квадратичное отклонение (выборочный стандарт). См. также (2.23) и раздел 2.9.

В *результате* стандартизации случайная величина $Z$, в общем случае, имеющая ту или иную размерность, становится *безразмерной*. Кроме этого, появляется некоторая *возможность* непосредственного сравнения разных распределений, поскольку случайные величины становятся *соизмеримыми*. Например, все значения стандартизованной случайной величины в большинстве случаев укладываются в *интервал* от -3 до +3, поскольку *вероятность* отклонения *нормально* распределённой случайной величины за *пределы* $M_x \pm 3б$ меньше 0,003 (*Трёх сигма правило*).

**Стандартизованное нормальное распределение** см. раздел 2.9.

**Стандартное отклонение**, *стандарт* (*квадратичное отклонение*) - *мера* отклонения (разброса, рассеяния) *нормально распределённой случайной величины* $X$ от *математического ожидания* $M_x$. *Термин* сформировался в англо-американской литературе как квадратный корень из математического ожидания *дисперсии*, $\sqrt{DX}$. Другими словами, стандартное отклонение характеризует вариацию признака относительно математического ожидания $M_x$.

*Закон* нормального распределения *математически* выражает *результат* хаоса и *динамичности* в *причинно-следственных связях явлений*:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi б^2_x}} \exp\left\{- \frac{(x-M_x)^2}{2б^2_x}\right\}. \qquad (1.225)$$

где $p(x)$ - *плотность вероятностей* случайной величины $X$, $M_x$ - математическое ожидание, $б^2{}_x$ - *генеральная дисперсия* или дисперсия *совокупности*. Квадратный корень из генеральной дисперсии называется стандартным отклонением, $б_x=\pm\sqrt{б^2{}_x}$. Математическое ожидание и дисперсия полностью *определяют* расположение и *форму кривой* $y=f(x;\ M_x,\ б_x)$, (рис.1.1,з, 1.20,б, 1.34,г, 1.43, 1.52,г, 2.25).

Для нормально распределённой случайной величины $X$ в *интервале* $M_x-б_x \leqslant X \leqslant M_x+б_x$ будет находиться 0,683 значений, в интервале $M_x-2б_x \leqslant X \leqslant M_x+2б_x$ - 0,954 значений, а в интервале $M_x-3б_x \leqslant X \leqslant M_x+3б_x$) - 0,997 значений. В практических задачах, приводящих к нормальному распределению, отклонения больше, чем утроенный стандарт (квадратичное отклонение) практически *невозможны*, или, другими словами, на практике пренебрегают возможностью отклонений от среднего, больших $3б_x$ (*Трёх сигма правило*). Кривая нормального распределения $y=f(x;\ M_x,\ б_x)$ *симметрична* относительно ординаты, проходящей через точку $x=M_x$, и имеет в этой точке единственный *максимум*, равный $1/\sqrt{2\pi б^2{}_x}$, перегибы кривой наблюдаются при значениях $x=M_x-б_x$ и $x=M_x+б_x$. *График* плотности нормального распределения называется нормальной кривой или кривой Гаусса (*C.F. Gauss*; 1777-1855). *Вероятное отклонение* для нормального распределения равно $2/3б_x \approx 0,6745б_x$.

Кроме задач, связанных с собственно нормальным распределением (имеющим важное *теоретическое* значение), стандартное отклонение как *термин* и *физическая величина* встречается при *оценке* точности *экспериментов* и в задачах *стандартизации случайных величин* при *анализе эмпирических распределений*.

См. также *Вероятность житейская, Генеральный, Дисперсия воспроизводимости, Несмещённая оценка, Стандарт, Стьюдента критерий*. См. также разделы 2.7, 2.8, 2.9 и 3.1.

**Стандартные границы** - интервал значений величины, с **неизвестной** вероятностью $p$ "накрывающего" **неизвестное** значение параметра $M_x$ исследуемого явления или процесса:

$$\bar{x} - s_x \leqslant M_x \leqslant \bar{x} + s_x, \qquad (1.226)$$

где $s_x$ - стандартное отклонение. Этим соотношением пользуются практически при обработке экспериментальных данных, при определении ко-

*эффициента вариации* $V_x$ и решении вопроса о точности *экспериментов* или *наблюдений*. Условия - *симметричность распределения случайной величины* $X$ и соответствие распределения ошибок измерений закону нормального распределения. Среднее значение выборки определяют по формуле:

$$\bar{x} = \frac{1}{n_{оп}} \sum_{i=1}^{n_{оп}} x_i, \tag{1.227}$$

а выборочную дисперсию по формуле:

$$s^2_{оп} = \frac{1}{n_{оп}-1} \sum_{i=1}^{n_{оп}} (x_i-\bar{x})^2; \tag{1.228}$$

где $n_{оп}$ - число опытов в выборке, $\nu_{оп}=n_{оп}-1$ - число степеней свободы выборочной дисперсии.

Стандартное отклонение (квадратичное отклонение или стандарт) определяют по формуле:

$$s_x = \pm\sqrt{s^2}. \tag{1.229}$$

**Статистика** (< *нем.* Statistik - статистика < *позднелат.* (collegium) statisticum - (статистическая) коллегия < *лат.* status - установленный, назначенный, определённый; гражданское состояние, сословие, общественная ступень < *лат.* stare - стоять. [84, 92]) - *функция* от *результатов наблюдений*. Другими словами, статистики - характеристики *выборки* в отличие от *параметров*, характеризующих *совокупности*. По одной и той же выборке можно *определить* несколько статистик, например, *среднее значение*, *дисперсию*, *начальные* и *центральные моменты эмпирического распределения*. Так как результаты всех наблюдений являются *случайными величинами*, то статистики будут тоже случайными величинами. Поэтому, если та или иная статистика используется для *оценки параметра* $\theta$, то для отдельных выборок могут получиться значения, сильно отличающиеся от *истинного*. Очевидно также, что нельзя найти оценку, которая принимала бы значения, близкие к $\theta$ для всех *возможных* выборок. Целесообразно принимать такую *процедуру* оценивания, которая при многократном использовании давала бы хорошие результаты "в среднем" или имела бы значительную *вероятность* успеха. Другими словами, следует иметь в виду, что методы оценивания порождают распределения значений оценок и сравнивать их достоинства следует исходя из *свойств* этих распределений.

Статистика - более общий *термин*, чем оценка. Например, *экспериментальный Стьюдента критерий* и др. *критерии* используются для проверки *гипотез*, сформулированных *относительно* соответствующих совокупностей.

См. также *Статистика математическая, Статистических гипотез проверка.*

**Статистика критерия** см. *Критерий опытный, Статистика.*

**Статистический критерий** см. *Критерий табличный, Статистика.*

"Статистика есть наука о том, как, не умея мыслить и понимать, заставить делать это цифры." (*В.О.Ключевский*; 1841-1911).

**Статистика математическая** (< *нем.* Statistik - статистика < *позднелат.* (collegium) statisticum - (статистическая) коллегия < *лат.* status - установленный, назначенный, определённый; гражданское состояние, сословие, общественная ступень < *лат.* stare - стоять. [84, 92]) - раздел *математики*, посвящённый математическим *методам* систематизации, *обработки* и использования *статистических данных* для научных и практических выводов. При этом статистическими данными называются сведения о *количестве объектов* в какой-либо более или менее обширной *совокупности*, обладающих теми или иными признаками. Задачей математической статистики является переход от **частностей** к *свойствам* совокупности. Другими словами, это наука, изучающая массовые *случайные явления* и пытающаяся описать их математически строгими *закономерностями*.

Предмет и метод математической статистики. Статистическое описание совокупности объектов занимает промежуточное положение между индивидуальным описанием каждого из объектов совокупности, с одной стороны, и описанием совокупности по её общим свойствам, совсем не требующим её расчленения на отдельные объекты, - с другой.

Метод исследования, опирающийся на рассмотрение статистических данных о тех или иных совокупностях объектов, называется *статистическим*. Статистический метод используется в самых различных областях знания.

Общие черты статистического метода в различных областях знания сводятся к подсчёту *числа* объектов, входящих в те или иные группы, рассмотрению *распределения* количественных признаков, применению *выборочного метода* (в случаях, когда детальное исследование всех объектов обширной совокупности затруднительно), использованию *вероятностей теории* при *оценке* достаточности числа *наблюдений* для тех или иных выводов и т.п. Эта формальная математическая сторона статистических методов исследования, безразличная к специфической природе изучаемых объектов, и составляет предмет математической статистики.

*Связь* математической статистики с теорией вероятностей имеет в разных случаях различный характер. Теория вероятностей изучает не любые *явления*, а явления случайные и именно "вероятностно случайные", т.е. для которых имеет смысл говорить о соответствующих им распределениях вероятностей. Тем не менее теория вероятностей играет *определённую* роль и при статистическом изучении массовых явлений любой природы, которые могут не *относиться* к *категории* вероятностно случайных. Это осуществляется через основанные на теории вероятностей теорию выборочного метода и *ошибок теорию*. В этих случаях вероятностным закономерностям подчинены не сами изучаемые явления, а приёмы их исследования.

Причинами возникновения и развития математической статистики являлись практические потребности общества и правящих элит. "Факты - упрямая вещь, но статистика гораздо сговорчивее." (*Лоренс Питер*; 1919-1990).

**Статистическая гипотеза** - предположительное *суждение* о *вероятностных закономерностях*, которым подчиняется изучаемое *случайное явление*. Как правило, статистическая гипотеза *определяет* значения *параметров распределения* случайной величины или непосредственно вид и *свойства* распределения. Статистическая гипотеза называется **простой**, если она определяет единственный закон распределения. Статистическая гипотеза называется **сложной**, если она определяет несколько законов распределения и может быть представлена как *множество* простых статистических гипотез.

См. также *Правило определения критического значения статистического критерия, Статистических гипотез проверка.*

**Статистическая модель** (< *нем.* Statistik - статистика < *поздне-лат.* (collegium) statisticum - (статистическая) коллегия < *лат.* status - установленный, назначенный, определённый; гражданское состояние, сословие, общественная ступень < *лат.* stare - стоять [84, 92] и *франц.* modele, *итал.* modello, <*лат.* modulus - *мера*, образец, *норма* [81, 84]) - *математическое* выражение, *уравнение*, *формула*, содержащее *переменные величины*, *параметры*, *константы* и одну (или более) *случайную* компоненту. Случайная компонента характеризует рассеяние *результатов измерений*, связанное с погрешностью измерений при осуществлении *наблюдений* или *экспериментов*, приближённым характером *математической модели*, разветвлением событий или же с собственной изменчивостью анализируемых объектов (например, многообразие форм в совокупностях галек, случайность и прихотливость извилистости пор в проницаемых породах).

Статистическая *модель* может быть получена путём введения в *детерминистическую модель* тех или иных случайных компонент. Простейший пример преобразования *закона* осаждения Стокса (*Stokes George Gabriel*; 1819-1903), описывающего скорость осаждения сферических частиц радиуса $r$ и плотности $\rho_т$ в сплошной среде с динамической вязкостью $\mu$ и плотностью $\rho$:

$$w = \frac{2}{9}\cdot\frac{r^2 g(\rho_т-\rho)}{\mu}, \qquad (1.230)$$

в статистическую модель заключается в добавлении случайной компоненты в экспериментально определяемую скорость осаждения одиночной частицы. Запишем закон Стокса в виде:

$$w_i = C\cdot r^2 + \varepsilon_i, \qquad (1.231)$$

где $C=(2/9)\cdot(\rho_т-\rho)g/\mu$, а $\varepsilon_i$ - отклонение результата $i$-того определения скорости от значения скорости, предсказываемого законом Стокса (1.230). Если уравнение (1.231) записать в виде:

$$w_i = w_т + \varepsilon_i, \qquad (1.232)$$

где $w_т=C\cdot r^2$ - теоретическая скорость осаждения, вычисляемая по *формуле* (1.230). Очевидно, что теоретическая скорость осаждения $w_т$ является величиной постоянной для одиночной частицы с плотностью $\rho_т$ и радиусом $r$ в жидкости с вязкостью $\mu$ и плотностью $\rho$. В результате $n$ измерений скоростей осаждения одной и той же частицы при одних и тех же условиях получается выборка из совокупности всех возможных результатов измерений, причём в одних случаях случайная компонента $\varepsilon_i$ имеет положительное значение, а в других - отрицательное. Эта выборка может быть использована для оценки *математического ожидания* $w$, *дисперсии* $s^2{}_w$, *квадратичного* отклонения $s_w$, *коэффициента вариации* $V_w$ (1.28) и других параметров [39].

Отклонения реальных результатов от теоретической модели зависят от природы явления, процесса. Например, для рассмотренного закона осаждения Стокса очень хорошее совпадение расчётных и экспериментальных данных наблюдается при осаждении в воде частиц с плотностью 2800 кг/м$^3$ и размером от 0,0005 до 0,08 мм. На более мелкие частицы влияет хаотическое движение молекул воды, а на более крупные - турбулентные завихрения. Чем дальше от этих условий, тем хуже соответствие модели Стокса и результатов эксперимента. Наивно было бы предполагать, что падение булыжника в воде или в воздухе будет описываться законом Стокса (1.230). (Точнее, формула Стокса строго ограничена значениями критерия Архимеда, Ar<3,6, критерия Лященко, $Ly<2\cdot10^{-3}$ и критерия Рейнольдса, Re<0,2).

*Уравнения* (1.231) и (1.232) - простейший пример статистической модели, так как они включает только одну случайную компоненту $\varepsilon_i$. Но даже в вышеупомянутых условиях наилучшего приложения закона Стокса не будет совершенного соответствия данных эксперимента расчётам по формуле (1.230). Это является результатом влияния на условия экспериментов *множества* случайных *факторов* при повторении опытом, даже если эксперименты проводятся при усиленном контроле. Рассеяние экспериментальных данных относительно рассчитанных по формуле (1.230) называется *ошибкой*, возникающей по двум *причинам*: собственно ошибки *измерений величин физических* и несоответствие применяемой формулы реальному *явлению* (ошибка математической модели).

Рассмотренный пример с законом Стокса и его экспериментально-статистическим приложением подтверждает тот факт, что математические модели - это средства выявления и *анализа* движущих сил процесса, которые приводят к наблюдаемым значениям [39].

См. также *Воспроизводимость, Детерминизм, Детерминированно-стохастическая модель, Математическая модель, Модель, Модель экспериментально-статистическая, Понятие, Причинность, Связь, Следствие, Случайный процесс, Стохастическая модель, Сущность.*

**Статистическая оценка** - некоторая *функция* от *результатов наблюдений*, предназначенная для *статистического оценивания* **неизвестных** характеристик и *параметров эмпирического распределения вероятностей случайной величины*. Например, если результаты наблюдений $x_1$, $x_2, \ldots, x_n$ - *независимые* случайные величины, имеющие одно и то же *нормальное распределение* с неизвестным *математическим ожиданием* $M_x$ и с неизвестной *генеральной дисперсией* $б^2{}_x$, то *арифметическое взвешенное среднее* (1.213), *арифметико-геометрическое среднее, арифметическое среднее* (1.212), *взвешенное степенное среднее* (1.215), *гармоническое среднее* (1.217), *геометрическое среднее* (1.218), (1.219), *среднее квадратичное* (1.220), *среднее кубическое* (1.221), *среднее степенное* (1.216), *мода, медиана* и *начальный момент* первого порядка (1.116) будут являться статистическими оценками **неизвестного** параметра $M_x$. При этом *арифметическое среднее* (1.212) будет *несмещённой, состоятельной и эффективной оценкой* **неизвестного** математического ожидания $M_x$. В случае генеральной дисперсии такой неопределённости с оценкой нет: несмещённой статистической оценкой неизвестной генеральной дисперсии $б^2{}_x$ (см. *формулы* (1.58), (1.59), (1.118), (1.199), (2.12), (2.13), (3.10), (3.11)) будет *выборочная дисперсия* $s^2{}_x$ (см. формулы (1.53), (1.54), (1.56), (1.60), (1.73), (1.77), (1.124), (1.137), (1.203), (1.245), (1.248), (1.268), (1.319), (2.14)), а смещённой - оценка вычисляемая по формулам: (1.123), (1.202), (1.318).

Одним из удобных методов получения статистических оценок неизвестных параметров распределения является *моментов метод*, который позволяет *определить* оценки семи наиболее употребительных начальных и *центральных* моментов, а также *коэффициенты асимметрии* и *эксцесса*. Более важным, с теоретической точки зрения, является метод *максимального* правдоподобия, который приводит к оценкам, являющимся при некоторых общих условиях *асимптотически* наилучшими; достаточно близок к методу максимального правдоподобия и метод наименьших квадратов.

*Теория* точечных статистических оценок не даёт *возможности* сделать заключение о "точности" или "*достоверности*" таких оценок. *Интервальное* оценивание производится с помощью *доверительных интервалов*.

**Статистический критерий** см. *Критерий табличный*.

"Опасность не совершить попытку и опасность испытать неудачу не равны. Ибо в первом случае мы теряем огромные блага, а во втором - лишь небольшую человеческую работу." (*Фрэнсис Бэкон*; 1561-1626).

**Статистических гипотез проверка** (*греч.* υποθεδιζ - основание, принцип, предположение, **гипотеза**; υποτιθημι - полагать в основание, принимать что-либо за основание, предполагать. - *А.Д.Вейсман*; (1834-1913) - один из основных разделов *статистики математической*, объединяющий методы проверки соответствия *статистических данных* некоторой статистической *гипотезе* (гипотезе о *вероятностной* природе данных). Статистической гипотезой называется некоторое предположительное *суждение* о вероятностных *закономерностях*, которым подчиняется изучаемое *случайное явление*. Проблема проверки гипотезы статистическими методами возникает в тех случаях, когда гипотезу нельзя проверить непосредственно и приходится довольствоваться проверкой некоторых *следствий*, которые логически вытекают из содержания гипотезы. Если следствия, вытекающие из предполагаемой гипотезы, *невозможны* или противоречат *физической сущности процесса*, значит гипотеза неверна. С другой стороны, если те или иные *события* невозможны или возможны с очень малой вероятностью, но всё-таки происходят, то гипотезу также приходится отвергать. Очевидно, что, придерживаясь подобной логики рассуждений, с некоторой вероятностью можно отвергнуть гипотезу, а выявить физическую сущность изучаемого явления или показать, что же происходит на самом деле, невозможно.

*Процедуры* проверки статистических гипотез позволяют принимать или отвергать статистические гипотезы, возникающие при *обработке* или *интерпретации результатов наблюдений* (результатов *измерений переменных*). *Правило*, в соответствии с которым принимается или отклоняется та или иная гипотеза, заключается в сравнении некоторого комплекса физических *величин*, вычисленного по данным *выборки*, с подобным комплексом, вычисляемым **независимым путём**. Первый называется *статистикой критерия* (*опытным* критерием), последний - *статистическим критерием* (табличным критерием). Проверка статистической гипотезы начинается с формулировки подходящей гипотезы об исследуемой переменной. Обычно такая гипотеза называется нулевой, *обозначается* $H_0$ и, как правило, является гипотезой об отсутствии различия. Например, при *определении оценки* $m_x$ неизвестного *математического ожидания* $M_x$ подходящей нулевой гипотезой будет предположение об отсутствии различия между нулём и *арифметическим средним выборки*, $x_{ср}$. Математически это записывается в виде:

$$H_0: x_{ср}=0. \tag{1.233}$$

Подходящей альтернативной гипотезой в этом случае будет неравенство:

$$H_1: x_{ср}\neq 0. \tag{1.234}$$

Построение критерия определяется выбором подходящей *функции* $\Theta=f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ от результатов наблюдений $X_1, X_2, \ldots, X_n$, которая служит *мерой* расхождения между опытными и *гипотетическими* значениями. Функция $\Theta$ является *случайной величиной* и называется *статистикой* критерия. Центральный момент при выборе функции $\Theta$ заключается в том, что её теоретическое *распределение* вероятностей должно быть вычислено **независимым** путём, при общем допущении, что проверяемая гипотеза верна и что её распределение **не зависит** от характеристик гипотетического распределения. Распределение статистики $\theta$ табулируется для различных *степеней свободы чисел* $\nu$ и *уровней значимости* $\alpha$; с помощью этого распределения находится *критическое значение* $\theta^{\alpha}$, такое, что если гипотеза верна, то вероятность события $\theta>\theta^{\alpha}$ равна $\alpha$ (рис. 1.36).

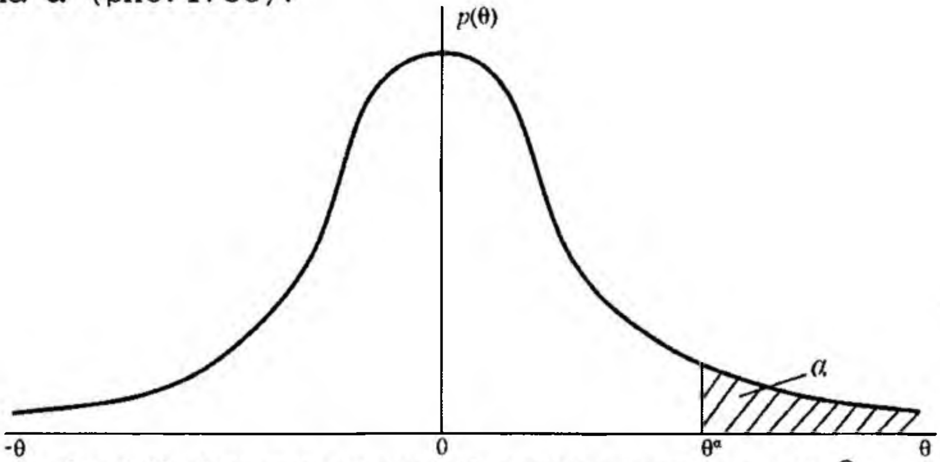



Рис.1.36. Плотность вероятностей гипотетического критерия $\theta$. Заштрихована критическая область, составляющая $\alpha$ площади под кривой (общая площадь под кривой плотности вероятностей равна 1)

Область значений $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, для которых $\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n)>\theta^{\alpha}$, называется *критической* областью, это область отклонения гипотезы $H_0$. Если в конкретном случае обнаружится, что $\theta>\theta^{\alpha}$, то гипотеза отвергается; при этом считается, что *значимость* этого расхождения равна $\alpha$, а *доверительная вероятность* правильности отклонения гипотезы равна $P=1-\alpha$. Если в конкретном случае $\theta<\theta^{\alpha}$, то считается, что с вероятностью $P$ гипотеза верна. Такого рода критерии используются как для проверки *параметров* распределения на значимость, так и для проверки гипотез о самих распределениях.

В случае проверки гипотезы об отсутствии различия между нулём и оценкой математического ожидания $m_x$ критерий конструируется в виде *отношения* неизвестной *ошибки* определения *арифметического среднего* $(x_{ср}-M_x)$ и *квадратичного* отклонения $s_x$:

$$\theta_{оп}=\frac{(\bar{x}-M_x)}{s_x}\cdot\sqrt{n}=\frac{\bar{x}}{s_x}\sqrt{n}, \qquad (1.235)$$

причём в условиях *нулевой гипотезы* $M_x=0$ (сравните с (1.69), (1.70), (1.129), (1.138)). Очевидно, что должно быть некоторое критическое соотношение $\theta_{крит}$ найденной оценки $x_{ср}$ и квадратичного отклонения $s_x$, до которого можно было бы утверждать о незначимом отличии $x_{ср}$ от нуля, а в случае превышения - о *достоверности* $x_{ср}$ с той или иной *вероятностью.* Очевидно также, что $\Theta_{\text{крит}}$ должен вычисляться *независимым* путём.

В данном случае $\Theta_{\text{оп}}$ является опытным *Стьюдента критерием* $t_\nu$, а $\Theta_{\text{крит}}$ - *статистическим критерием* $t^\alpha{}_\nu$. Опытный критерий Стьюдента сравнивается с *критическим* $t^\alpha{}_\nu$, определяемым *распределением* Стьюдента, и если $t^{\text{оп}}<t^\alpha$, то нулевая гипотеза с *доверительной вероятностью* $P=1-\alpha$ принимается (рис. 1.37).

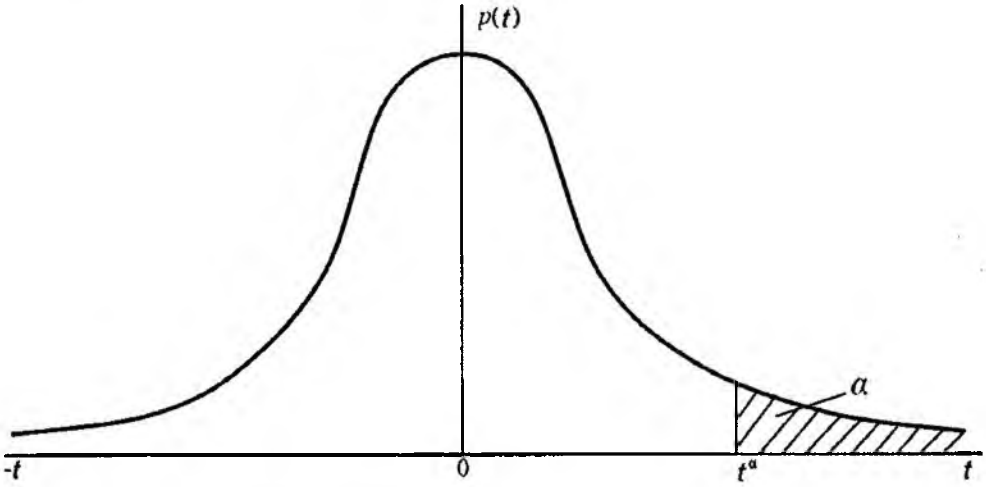



Рис.1.37. Плотность вероятностей $t$-критерия.
Заштрихована критическая область, составляющая $\alpha$ площади под кривой
(общая площадь под кривой плотности вероятностей равна 1)

Другой пример - пусть имеется две выборки:

$$x_{1,1},\ x_{1,2},\ \ldots,\ x_{1,n1};$$

$$x_{2,1},\ x_{2,2},\ \ldots,\ x_{2,n2}.$$

*Необходимо* проверить, являются ли эти две выборки частями одной и той же *совокупности* или это части разных совокупностей. Для этого нужно определить выборочные *дисперсии* $s^2{}_1$ и $s^2{}_2$ и проверить их на однородность (однородными называются дисперсии двух или более выборок из одной и той же совокупности):

$$s_1^2 = \frac{1}{n_1-1}\cdot\sum_{i=1}^{n_1}(x_{1,i}-\bar{x}_1)^2; \tag{1.236}$$

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{n_1}\cdot\sum_{i=1}^{n_1}x_{1,i}; \tag{1.237}$$

$$s_2^2 = \frac{1}{n_2-1}\cdot\sum_{i=1}^{n_2}(x_{2,i}-\bar{x}_2)^2; \tag{1.238}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{n_2} \cdot \sum_{i=1}^{n_2} x_{2,i}, \qquad (1.239)$$

где $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ - средние значения, а $s^2{}_1$ и $s^2{}_2$ - выборочные дисперсии, определённые со степенями свободы $\nu_1 = n_1 - 1$ и $\nu_2 = n_2 - 1$ соответственно. Предположим, что первая выборка взята из совокупности с дисперсией $б^2{}_1$, а вторая - из совокупности с дисперсией $б^2{}_2$. Проверяется нулевая гипотеза $H_0$ о равенстве *генеральных дисперсий* $б^2{}_1$ и $б^2{}_2$:

$$H_0:\ б^2{}_1 = б^2{}_2. \qquad (1.240)$$

Для того чтобы подтвердить эту гипотезу, необходимо доказать однородность дисперсий $s^2{}_1$ и $s^2{}_2$, а для того чтобы отвергнуть - доказать значимость различия $s^2{}_1$ и $s^2{}_2$.

В качестве статистики $\theta^{оп}$ используется дисперсионное соотношение (1.256):

$$\theta^{оп} = \frac{s^2{}_1/б^2{}_1}{s^2{}_2/б^2{}_2}.$$

В условиях нулевой гипотезы $б^2{}_1 = б^2{}_2$, $б^2{}_1/б^2{}_2 = 1$ и $\theta^{оп} = (s^2{}_1/s^2{}_2)$ (рис.1.38, см. также (1.258)).

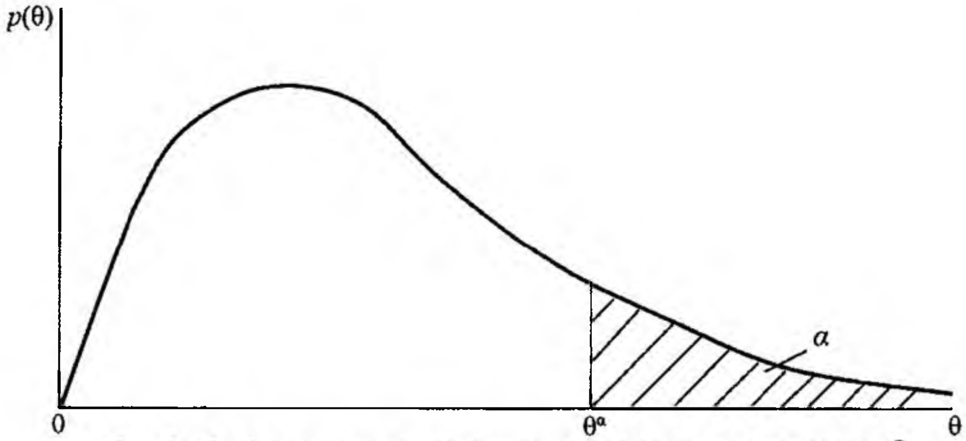



Рис.1.38. Распределение статистики гипотетического критерия $\theta$ с критической областью $\alpha$ отклонения нулевой гипотезы (гипотезы об отсутствии различия между сравниваемыми дисперсионными соотношениями) (общая площадь под кривой плотности вероятностей равна 1)

Таким образом, для *оценки* соотношения выборочных дисперсий $s^2{}_1/s^2{}_2$ может быть непосредственно использовано F-распределение (1.259):

$$F^{оп}_{\nu_1,\nu_2} = \frac{s^2{}_{ад}}{s^2{}_{оп}}. \qquad (1.241)$$

В качестве статистики $\theta$ для проверки гипотезы об однородности дисперсий $s^2{}_1$ и $s^2{}_2$ используется *Фишера критерий*, который, по существу, характеризует предельное *соотношение* однородных дисперсий (рис. 1.39).

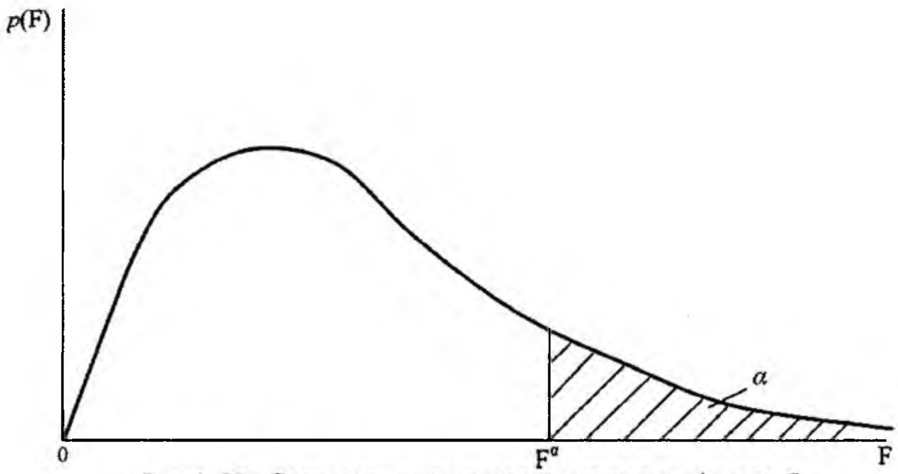



Рис.1.39. Плотность вероятностей критерия Фишера F. Заштрихована критическая область, составляющая $\alpha$ площади под кривой (общая площадь под кривой плотности вероятностей равна 1)

Если $F^{оп}$ меньше критического $F^{\alpha}$, то дисперсии однородны (рис. 1.39).

При решении вопроса о принятии или отклонении какой-либо гипотезы $H_0$ с помощью любого критерия, основанного на *результатах наблюдения*, могут быть допущены *ошибки* двух родов. Ошибка первого рода совершается тогда, когда отвергается верная гипотеза $H_0$. Ошибка второго рода совершается в том случае, когда гипотеза $H_0$ принимается, а на самом деле верна не она, а какая-либо альтернативная гипотеза $H_1$. Вероятность допустить ошибку первого рода равна $\alpha$, т.е. *уровню значимости* критерия; вероятность допустить ошибку второго рода равна $P$, т.е. *доверительной вероятности*. Эти ошибки не равноценны, так как отвергнутая гипотеза $H_0$ в худшем случае на какое-то время помешает другим исследователям работать в этом направлении и она будет подтверждена позже. Принятие же неверной гипотезы направит усилия некоторых исследователей по неверному пути, и *необходимо* будет сначала опровергнуть неверную гипотезу $H_0$, а потом выдвигать альтернативные $H_1$, $H_2$, $H_3$ и т.д. Естественно стремиться к тому, чтобы критерий для проверки данной гипотезы приводил *возможно* реже к ошибочным решениям. Обычная *процедура* построения наилучшего критерия для простой гипотезы заключается в выборе среди всех критериев с заданным уровнем значимости $\alpha$ такого, который имел бы наименьшую вероятность ошибки второго рода (или, что то же самое, наибольшую вероятность отклонения неверной гипотезы). Вероятность $1-P$ называется *мощностью статистического критерия*. Очевидно, что при любом объёме выборки $n$ вероятность допустить ошибку первого рода можно уменьшить, уменьшая *уровень значимости* $\alpha$. Однако при этом увеличивается вероятность $P$ допустить ошибку второго рода (снижается мощность критерия). Единственный способ уменьшить и $\alpha$, и $P$ состоит в том, чтобы увеличить объём выборки $n$.

Природа статистических выводов такова, что при отклонении гипотезы можно заранее оценить вероятность возможной ошибки (отклонить *истинную* гипотезу), задаваясь уровнем значимости. С другой стороны, если гипотеза не отклонена, то это не означает, что она подтверждена с заданной вероятностью, это означает лишь то, что она не противоречит *экспериментальным* данным, но вполне возможно осуществимы другие эксперименты и другая статистическая проверка, в результате которых гипотеза будет отвергнута.

В заключение необходимо упомянуть мнение Г.В.Лейбница (*Leibniz Gottfried Wilhelm*; 1646-1716) о том, что вероятностные методы не могут полностью подтвердить статистическую гипотезу.

См. также *Правило определения критического значения статистического критерия, Стьюдента критерий, t-критерий.*

**Степеней свободы число** - 1. (*мат.*) *Число независимых* источников *информации* при вычислении какого-либо *параметра*, характеризующего *совокупность*. Число степеней свободы характеризует информационный потенциал *выборки*, это всегда целое положительное число:

$$\nu = n - l. \tag{1.242}$$

где $n$ - размерность *выборки*, $l$ - число параметров, вычисленных по *данным* выборки. Например, при вычислении *дисперсии воспроизводимости* вместо *математического ожидания* $M_x$ используют *среднее значение* выборки, вычисляемое по данным выборки. При этом происходит потеря одной степени свободы, поскольку дисперсия вычисляется при этом по $n_{оп}-1$ независимым источникам информации. Таким образом $\nu_{оп}=n_{оп}-1$.

Число параметров, *определённых* по выборке, ещё называется *числом связей*, наложенных на выборку. Так вот, с точки зрения *теории информатики* число степеней свободы равно числу параметров, которое ещё можно определить по выборке после той или иной *обработки*, а с точки зрения *статистики математической* $\nu$ равно числу независимых источников информации, по которым вычисляется тот или иной выборочный параметр. Дело в том, что, используя одну и ту же выборку, *невозможно* решить сразу две задачи: *оценить* параметры совокупности и применить соответствующий *критерий* для проверки *достоверности* полученных оценок без какой-либо компенсации, связанной с двукратным обращением к имеющемуся массиву *наблюдений*. Такой компенсацией является уменьшение знаменателя в *формуле* выборочной *дисперсии* от числа наблюдений $n$ до числа независимых источников информации оцениваемого параметра $\nu$. Если, например, *математическое ожидание* $M_x$ оценивается по *результатам* пяти независимых наблюдений:

$$\bar{x} = (x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)/5; \qquad (1.243)$$

то результат имеет пять степеней свободы. Дисперсия оценивается по пяти квадратам разностей $(x_i-x_{cp})^2$, однако независимо вычисляются только четыре из этих разностей, так как, определив четыре, пятую уже можно вычислить следующим образом:

$$x_5-\bar{x} = 4\bar{x}-(x_1+x_2+x_3+x_4). \qquad (1.244)$$

Поэтому имеется только четыре независимых источника информации, по которым вычисляется выборочная дисперсия. Бывают случаи, когда в качестве *оценки* математического ожидания $M_x$ используется *величина*, не зависимая от рассматриваемой выборки (например $m_x$), т.е. оценка определяется независимым путём. В таких случаях для выборочной дисперсии следует пользоваться формулой:

$$s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_x)^2. \qquad (1.245)$$

Сравните с (1.123), (1.124), (1.318), (1.319).

При проверке гипотезы о соответствии эмпирического распределения нормальному закону возникает необходимость уменьшения числа степеней свободы (2.31) на единицу, $\nu=k-l-1$. Это объясняется тем, что независимо вычисляются частоты только в первых $k-1$ интервалах, а частота в $k$-том интервале может быть легко вычислена по "балансу" (2.32), поскольку $\Sigma n_j=n$. Другими словами, сумма вероятностей равна единице, $\Sigma p_j=1$.

2. (*физ.*) Число параметров состояния любой термодинамически равновесной системы, которым можно придавать произвольные *значения* в том *интервале*, в котором число фаз ($\varphi$) не изменяется. Это положение называется *правилом* фаз Гиббса - число $\nu$ термодинамических степеней свободы системы, состоящей из $\varphi$ фаз и $n$ компонентов, равно: $\nu=n-\varphi+2$.

3. (*мех.*) Число *независимых* движений, *возможных* для данной механической системы. Например, свободная материальная точка имеет 3

степени свободы, поскольку она может независимо перемещаться вдоль любой из осей декартовой системы координат. Свободное твёрдое тело имеет 6 степеней свободы, поскольку его *центр* инерции может перемещаться вдоль любой из трёх осей декартовой системы координат, а само тело может вращаться в любой из трёх возможных плоскостей. Наложение на тело механических связей приводит к уменьшению числа степеней свободы.

См. также *Правило определения критического значения статистического критерия.*

**Стохастическая модель** ( < *греч.* **στοχαστική τέχνη** - искусство предположений, искусство угадывания; **στοχαστικός** - умеющий целить, попадать; умеющий верно отгадывать, судить [4, 80] и *франц.* modele, *итал.* modello, <*лат.* modulus - *мера*, образец, *норма* [81, 84]) - *математическое* выражение, *уравнение*, *формула*, содержащее *переменные величины*, *параметры*, *константы* и одну (или более) *случайную* компоненту. Случайная компонента характеризует рассеяние *результатов измерений*, связанное с погрешностью измерений при осуществлении *наблюдений* или *экспериментов*, приближённым характером *математической модели*, разветвлением событий или же с собственной изменчивостью *анализируемых объектов*. В отличие от *статистической модели* модель стохастического процесса описывает изменения случайных компонент в зависимости от какого-либо неслучайного параметра, в качестве которого обычно принимают время. В *результате* стохастическая модель, построенная на *вероятностной* основе и включающая в себя независимый неслучайный *фактор* (время, координату), описывает явление лучше, чем *детерминистическая модель*.

Например, модель процесса случайного блуждания оказалась приемлемой для описания продольных профилей речных долин и процесса движения жидкости по капиллярам. Модели стохастических процессов успешно применяются при изучении роста каверн, добычи нефти, в гидрогеологии, в процессах массовой кристализации и многих других областях. [39, 62].

Выражение "**στοχαστική τέχνη**" - искусство предположений - ввёл в научную литературу Я.Бернулли (*Jacob Bernoulli*; 1759-1789) - "Искусство возможно точнее измерять вероятности вещей..."

См. также *Воспроизводимость, Детерминизм, Детерминированно-стохастическая модель, Модель, ПОНИМАТЬ, Понятие, Причина, Причинность, ПРИЧИНЯТЬ, Связь, Следствие, Случайный процесс, Статистика математическая, Сущность, Явление.*

**Структура** (< *лат.* structura - строение, расположение, порядок. - *И.Х.Дворецкий*; (1894-1979) < *лат.* struere - класть друг на друга;

строить, располагать, размещать < sternere - стлать, расстилать; раскладывать. [92]) - *совокупность* устойчивых *связей объекта*, обеспечивающих его целостность и тождественность самому себе, т.е. сохранение основных *свойств* при различных внешних и внутренних изменениях. В более широком, нестрогом смысле *понятие* "структура" употреблялось в научном и философском обиходе достаточно давно (по крайней мере со средних веков) и выступало в *качестве* одного из способов *определения* понятия *формы* (форма как структура, организация **содержания**). В строгом смысле понятие "структура" впервые развивается в химии в связи с возникновением в 19 в. *теории* химического строения вещества. В современной науке понятие "структура" обычно *соотносится* с понятиями *системы* и организации. Хотя единой точки зрения на соотношение этих понятий нет, однако в большинстве случаев в качестве наиболее широкого из них рассматривают понятие системы, характеризующее всё *множество* проявлений некоторого сложного объекта (его *элементы*, строение, *связи*, *функции* и т.д.). Структура выражает лишь то, что остаётся устойчивым, относительно неизменным при различных преобразованиях системы; организация же включает в себя как структурные, так и *динамические* характеристики системы, обеспечивающие её направленное функционирование.

См. также *Детерминизм, Детерминистическая модель, Математическая модель, Модель, Модель экспериментально-статистическая, Причина, Причинность, Связь, Следствие, Статистическая модель, Стохастическая модель, Структурная модель, Сущность, Форма, Явление.*

**Структурная модель** (< *лат.* structura - строение, расположение, порядок. - *И.Х.Дворецкий*; (1894-1979)) - *модель, отражающая физическую сущность объекта, процесса, явления.*

См. также *Детерминизм, Детерминистическая модель, Математическая модель, Модель экспериментально-статистическая, Причина, Причинность, Связь, Следствие, Структура, Форма.*

**Стьюдента критерий, *t*-критерий** - *критерий значимости*, основанный на *Стьюдента распределении* и используемый для проверки *гипотез о средних значениях нормально распределённых физических величин* и для проверки на *значимость оценок параметров*. Случайная величина $t$, характеризующая *соотношение* неизвестной ошибки определения $M_x$ и *квадратичного отклонения* $s_x$:

$$t_\nu = \frac{(\bar{x}-M_x)}{s_x}\sqrt{n}\,, \qquad (1.246)$$

имеет распределение Стьюдента или $t$-распределение (рис.1.40), (см.

также рис.1.22); *плотность вероятностей* $p(t)$ этой случайной величины имеет вид (1.252). В соотношении (1.246) $\nu=n-1$ - *степеней свободы числ*

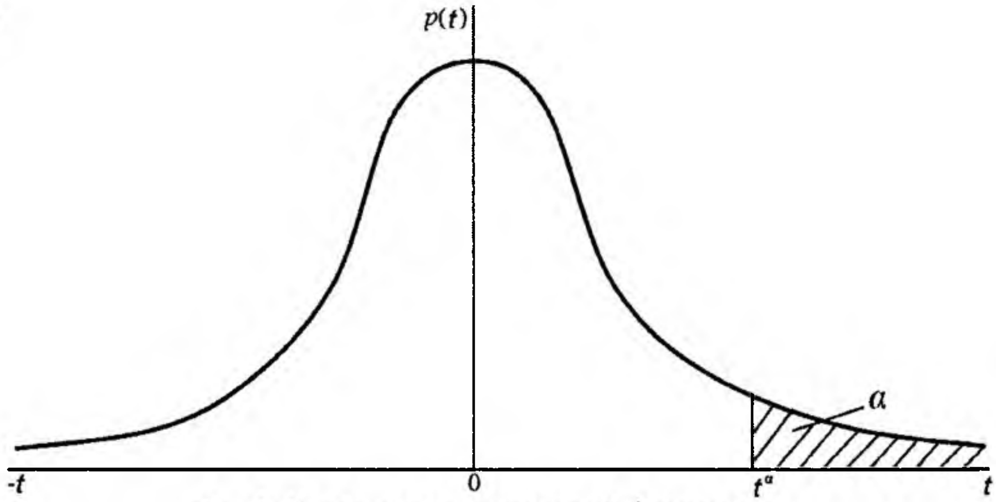



Рис.1.40. Плотность вероятностей $t$-критерия.
Случай одностороннего критерия - заштрихована критическая область, составляющая $\alpha$ площади под кривой
(общая площадь под кривой плотности вероятностей равна 1)

Пусть *результаты наблюдений* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - взаимно независимые, нормально распределённые *случайные величины* с **неизвестными параметрами** $M_x$ **и** $б^2$. При отсутствии грубых и систематических *ошибок результат* первоначальной *обработки* наблюдений $x_{cp}$ совпадает с *математическим ожиданием* $M_x$ с большей или меньшей точностью, зависящей от объёма *выборки* $n$:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i; \tag{1.247}$$

$$s^2{}_x = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_1-\bar{x})^2, \tag{1.248}$$

где $\bar{x}$ - *оценка* математического ожидания $M_x$, в частности, *арифметическое среднее*, а $s^2{}_x$ - оценка *генеральной дисперсии* $б^2$. В тех случаях, когда $s_x \approx |x_{cp}|$ или $s_x \gg |x_{cp}|$, говорят, что "оценка $x_{cp}$ математического ожидания $M_x$ *незначимо* отличается от нуля"; в этом случае может быть два исхода: либо $M_x=0$, либо $M_x \neq 0$, в обоих случаях необходимо повысить точность проведения наблюдений (*эксперимента*) и/или увеличить объём выборки. В тех случаях, когда $s_x \ll |x_{cp}|$ и возникает задача собственно оценки точности наблюдений, а более строго, *определения интервала* значений, с той или иной *вероятностью* "накрывающего" неизвестное значение *параметра* исследуемого распределения. Эта задача была решена в 1908 г. У.С.Госсетом (*William Sealy Gosset*; 1876-1937), известным под псевдонимом Student:

$$\bar{x} - \frac{s_x}{\sqrt{n}} \cdot t_\nu^\alpha \leqslant M_x \leqslant \bar{x} + \frac{s_x}{\sqrt{n}} \cdot t_\nu^\alpha, \tag{1.249}$$

где $t^\alpha$ - случайная величина, зависящая только от *степеней свободы числа* $\nu$ выборочной дисперсии и *значимости уровня* $\alpha$ (сравните с (1.128)). *Соотношения* (1.249) и (1.74) характеризуют интервал значений, с доверительной вероятностью $P=1-\alpha$ "накрывающего" неизвестное значение параметра исследуемого распределения, этими соотношениями пользуются практически при обработке экспериментальных *данных* для определения *доверительного интервала* $x_{cp}$. Очевидно, что выражение:

$$s_x^\alpha = \frac{s_x}{\sqrt{n}} \cdot t_\nu^\alpha, \tag{1.250}$$

характеризует *доверительное отклонение* среднего значения выборки. Необходимо отметить, что *уровнем значимости* исследователь задаётся независимым путём, самостоятельно, т.е. исходя из *сущности* задачи, природы процесса, явления.

Необходимо различать односторонний (рис.1.22, 1.37, 1.40) и двусторонний (рис.1.41 ) *критерии* Стьюдента. Если по физической сущности задачи *опытный* критерий Стьюдента может располагаться по обе стороны нуля, то следует брать двусторонний критерий (рис.1.41), если по одну - односторонний (рис.1.40). Значение двустороннего критерия Стьюдента берётся из таблицы для вдвое меньшего принимаемого исследователем уровня значимости (рис.1.41).

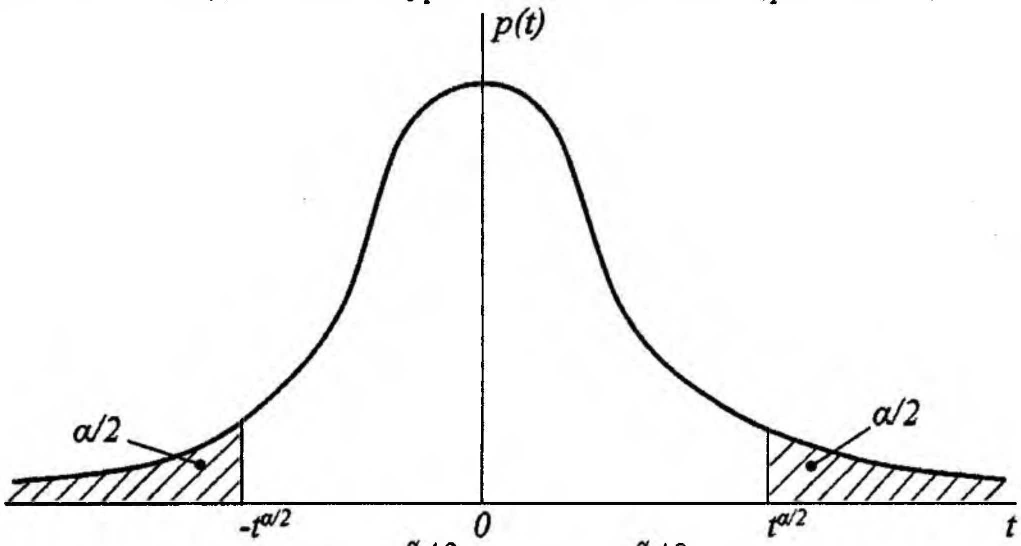



Рис.1.41. Левая ($-t^{\alpha/2}$) и правая ($t^{\alpha/2}$) критические области двустороннего $t$-критерия (общая площадь под кривой плотности вероятностей равна 1)

Табличные значения критерия Стьюдента для различных *уровней значимости* $\alpha$ приведены в Приложении 6.

См. также *Значимости уровень статистического критерия Правило определения критического значения статистического критерия, Статистических гипотез проверка.*

**Стьюдента распределение** - непрерывное *распределение вероятностей* $p(t)$ *случайной величины* $t_\nu$:

$$t_\nu = \frac{z}{\sqrt{S/\nu}}, \tag{1.251}$$

где $S$ и $z$ - *независимые* случайные величины, подчиняющиеся *хи-квадрат распределению* и *стандартизованному нормальному распределению*, соответственно; $\nu$ - *степеней свободы число* (сравните с (1.246)). *Плотность вероятностей* $p(t)$ случайной величины $t_\nu$ имеет вид:

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}, \tag{1.252}$$

где $\Gamma(\nu)$ - *гамма-функция*; $\nu$ - число степеней свободы; $t$ - *Стьюдента критерий*, $-\infty<t<+\infty$ (частный случай *Пирсона распределений*, тип 7, (1.165)).

Распределение Стьюдента с числом степеней свободы $\nu=1$ является также частным случаем *Коши распределения* с *параметрами* $\lambda=1$ и $\mu=0$. Соответствующую *функцию распределения величины* $t_\nu$, равную интегралу функции (1.252) в пределах от $-\infty$ до некоторого *заданного* значения $t_\nu$, называют $t$-распределением или распределением Стьюдента с $\nu$ степенями свободы. На рис. 1.42 изображены *кривые* плотности (а) и функции (б) распределения Стьюдента для различных чисел степеней свободы $t_\nu$.

При проверке *статистических гипотез* практический интерес представляют так называемые *критические* значения *Стьюдента критерия* - числа, характеризующие предельное *соотношение* оценки математического ожидания и её *квадратичного* отклонения для проверяемой *нулевой гипотезы* (1.233). В условиях *нулевой гипотезы* $M_x=0$ и соотношение (1.235) имеет вид:

$$t_{n-1} = \frac{\bar{x}}{s_x}\sqrt{n}, \tag{1.253}$$

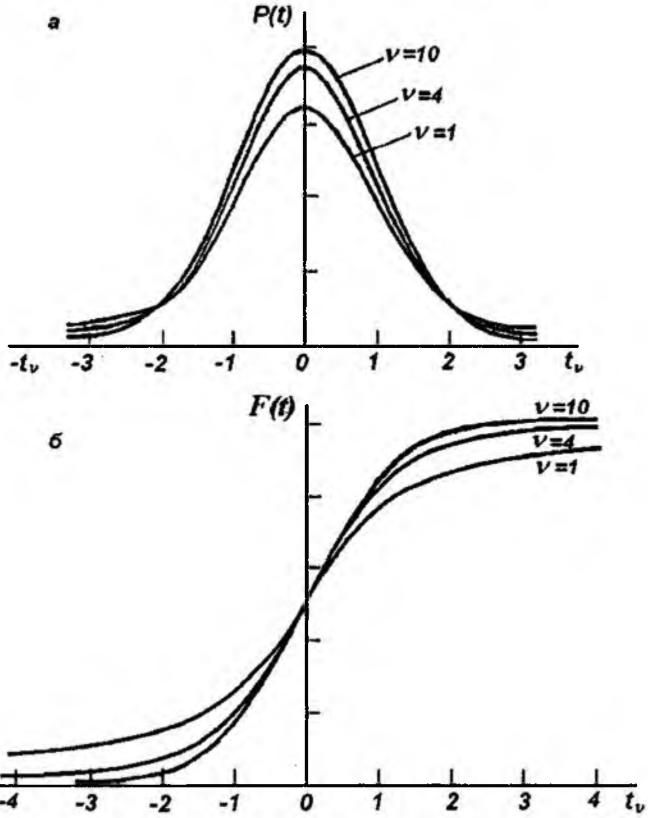



Рис.1.42. Кривые плотности (а) и функции (б) распределения Стьюдента, $t_\nu$, для различных чисел степеней свободы $\nu$ (площадь под каждой кривой плотности вероятностей равна 1)

где $n$ – размерность *выборки*, $n-1=\nu$ – *степеней свободы число*. Критические значения критерия Стьюдента *определяют* для принимаемого *уровня значимости* $\alpha$, руководствуясь *правилом*:

$$\int_{t_\nu^\alpha}^{\infty} p(t)dt = P\left(t_\nu^{оп} > t_\nu^\alpha\right) = \alpha, \qquad (1.254)$$

где $t^{оп}$ – *опытное* значение критерия Стьюдента, $\alpha$ – площадь под *кривой* $p(t)$, характеризующая *вероятность ошибочно* отвергнуть верную нулевую гипотезу. Распределение отношения двух независимых случайных величин установил У.С.Госсет (*William Sealy Gosset*; 1876-1937), известный под псевдонимом Стьюдент (Student). Табулированные значения критерия Стьюдента при различных уровнях значимости $\alpha$ приведены в Приложении 6. Необходимо различать односторонний и двусторонний критерии Стьюдента. Если по *физической сущности* задачи опытный критерий Стьюдента может располагаться по обе стороны нуля, то следует брать двусторонний критерий, если по одну – односторонний. Значение двустороннего критерия Стьюдента берётся из таблицы для вдвое меньшего принимаемого исследователем *уровня значимости* (рис. 1.41).

См. также *Значимости уровень*.

"Субстанция - неизменная часть вещи в процессе её сгущения-разряжения." (*Димитрий Панин*).

**Субстанция** (< *лат.* substantia - сущность, существо, суть) - 1. Носитель того или иного *явления* в некоторых *теоретических* построениях современного естествознания. 2. *фил.* Неизменная и вечная *сущность*, лежащая в основе вещей и всего мироздания и противополагаемая *случайному* и преходящему [79].

См. также *Пространство, Среда.*

**Субъект** (*лат.* subjectus - лежащий внизу, простирающийся у ног, подчинённый, подвластный) - 1. Человек, познающий внешний мир (*объект*). 2. Человек, как носитель каких-либо *свойств*, личность. 3. Логическое подлежащее, предмет *суждения*. Ср. *Объект.*

См. также *Объективность, Состоять.*

"Субъективизм - обычное дело при отыскании объективных причин." (*Лешек Кумор*).

**Субъективность** - *отношение* к чему-либо, *определяемое* личными взглядами, интересами, вкусами *субъекта*; отсутствие *объективности*. Субъективность достаточно опасна в научных исследованиях, в *математическом моделировании процессов*, т.к. может привести к неверным *результатам*, к (принятию) отклонению (не)верной *гипотезы*, к получению *неадекватной* математической модели.

"Человек, не осмеливающийся иметь своё суждение, есть трус, тот, кто не хочет его иметь, - лентяй, а тот, кто иметь его не способен, - дурак." (*Н.Шелгунов*; 1824-1891).

**Суждение** - *форма* мысли, в которой утверждается или отрицается что-либо *относительно субъектов*, *объектов* и *явлений*, их *свойств*, *связей* и *отношений* и которая обладает свойством выражать либо *истину*, либо ложь. В отличие от *понятия* в предикате суждения может быть как утверждение, так и отрицание относительно признаков, свойств объекта, явления. Кроме этого, в предикате суждения могут быть отображены как несущественные, так и отдельные отличительные и существенные признаки, свойства субъекта, объекта, явления.

См. также *Категория, ОБОЗНАЧАТЬ, Определение, ОПРЕДЕЛЯТЬ, Состоять, Термин технический.*

"Сущность - это путь вглубь явления, ведущий к основам мироздания, даже если явление кажется незначительным." (*Виктор Гаврилов*).

**Сущность** - философская *категория*, *отражающая* всеобщие *формы* реальности и её познание человеком. Сущность - *совокупность свойств*, *определяющих* особенность *объекта*, *явления*, *процесса* или *класса* объектов, явлений, процессов. От совокупности свойств зависят, кроме всего прочего, их изменчивые *состояния* и формы явлений. Сущность - универсальная объективная характеристика реальности, имеющая определяющее *значение* в процессе познания объекта. Категория "сущность" всегда неразрывно *связана* с категорией "явление" - она раскрывается в явлении, явление представляет собой форму проявления сущности.

В античной философии сущность мыслилась как ***начало* понимания** вещей и вместе с тем как источник их реального генезиса. Согласно Демокриту (**Δημοκριτος**; 460/470 - 360/370 г. до Р.Х.) сущность вещи неотделима от самой вещи и производна от тех атомов, из которых она составлена. По Платону (**Πλατων**; 428 или 427 до Р.Х. - 348 или 347 до Р.Х.), сущность ("идея") несводима к телесно-чувственному бытию, т.е. совокупности конкретных явлений; она имеет сверхчувственный нематериальный характер, вечна и *бесконечна*. У Аристотеля (**'Αριστοτελης**; 384-322 до Р.Х.) в отличие от Платона сущность ("форма вещей") не существует отдельно, помимо единичных вещей; с другой стороны, сущность, по Аристотелю, не выводится из той "*материи*", из которой строится вещь. В средневековой философии сущность резко противопоставляется явлению: носителем сущности выступает здесь Бог, а земное существование рассматривается как неистинное, иллюзорное. В философии нового *времени* противопоставление сущности и явления приобретает гносеологический характер и находит своё выражение в *концепции* первичных и вторичных *качеств*. В мышлении категории "сущность" и "явление" выражают переход от многообразия наличных форм *предмета* к его внутреннему *содержанию* и единству - к *понятию*. Познание сущности *системы связано* с раскрытием *законов* её развития. Постижение сущности объекта, явления, процесса составляет задачу *науки*.

См. также *Форма, Явить, являть, являвать*.

# Т

"Нет ничего более практичного, чем хорошая теория." (*Людвиг Больцман*; 1844-1906).

**Теория** (< *польск.* teorja или непосредственно из *лат.* theoria от *греч.* θεωρια - наблюдение, рассмотрение, исследование, τινος; ос. научное или теоретическое познание; наука, учение, теория. (*М.Фасмер*, (1886-1962); [100], *А.Д.Вейсман*, (1834-1913), [80]) - *формализованное* обобщение *результатов* научных исследований, *процессов, наблюдений, событий* в природе, обществе и мышлении. С другой стороны, теория есть творческое отражение реальности в сознании человека, отражение как результат *анализа данных* с последующим *синтезом* и обобщением. *Критерием истинности* теории является опыт, практика. С изменением реальности меняется и теория. При этом новая теория сохраняет в себе всё ценное, которое имелось в старой теории, - так называемая преемственность теории. Для теории характерны *диалектика* единства и преемственности, преобладание, доминирование практики и относительной самостоятельности теории.

**Термин технический, специальный** (< *вульг.лат.* terminus technicus) - слово или словосочетание, *обозначающее* **строго определённое** *понятие*: *математическое*, техническое, технологическое, научное, философское и т.п. Главное *качество* термина - *независимость* от языковой *среды*, устойчивая однозначность в различных языках. Необходимо также чётко различать научное и обыденное значение того или иного термина. Будучи неразрывно *связанным* со словом, термин в большинстве случаев тождественен слову, достаточно часто он одинаков в разных языках. Как правило, источником терминов являются греческий и латинский языки. Например, Гидродинамика, *Детерминизм*, *Диалектика*, *Дисперсия*, *Информация*, Кибернетика, *Константа*, *Модель*, *Момент*, *Норма*, *Параметр*, *Процесс*, Система, *Статистика*, *Функция* и др.

См. также *Категория*, *Понятие*, *Определение*, *Суждение*.

Сравните: **Термин** < *польск.* termin < *лат.* terminus - пограничный камень, межевой знак, границы, пределы, *конец*, *конечная* цель. **Terminus** - Термин, *римск.* бог границ и межей, в честь которого ежегодно 23 февраля справлялись празднества - Терминалии (Terminalia).

См. также *Правило определения критического значения статистического критерия*, *Понятие*.

**Трансцендентная кривая** (от *лат.* transcensum (от trans- через, сквозь, за пределами и scansum - восходить, возноситься, достигать)

- выходящий за пределы, переходящий) - плоская *кривая*, уравнение которой в *декартовых координатах* не является алгебраическим. Трансцендентные кривые в отличие от алгебраических кривых могут иметь *бесконечное количество точек* пересечения с прямой, точек перегиба, особых точек, вершин, асимптот и т.д. Трансцендентные кривые могут иметь точки, которые не существуют у алгебраических кривых: точки прекращения, угловые точки, асимптотические точки. Например, графики трансцендентных функций (показательной, логарифмической, тригонометрической и др.), все спирали, квадратриса, трактриса, цепная линия, трохоида, циклоида.

**Трансцендентная функция** (< *лат.* transcensum (от trans - через, сквозь, за пределами и scansum - восходить, возноситься, достигать) - выходящий за пределы, переходящий) - *аналитическая функция*, не являющаяся алгебраической, например, *показательная функция*, *логарифмическая* функция, тригонометрическая функция и др.

**Трансцендентное** (< *лат.* transcensum (от trans - через, сквозь, за пределами и scansum - восходить, возноситься, достигать) - выходящий за пределы, переходящий) - "то, что существует вне сознания, недоступно ему и непознаваемо" (*Иммануил Кант*; 1724-1804). Эта *формализация* И.Канта получила блестящее воплощение в "Трансцендентных этюдах" Ференца Листа (1811-1886).

**Трансцендентное число** см. *Число трансцендентное*.

**Трёх сигма правило** - мнемоническое *правило*, согласно которому в некоторых задачах *вероятностей теории* и *статистики математической* считают практически *невозможным событие*, заключающееся в отклонении значения *нормально распределённой случайной величины* от её *математического ожидания* больше, чем на три *стандартных отклонения*:

$$P\{\bar{x}-3\sigma_x < M_x < \bar{x}+3\sigma_x\}=0,9973. \qquad (1.255)$$

Это значит, что значения случайной величины $X$ будут отклоняться от её математического ожидания $M_x$ на расстояние, превышающее $3\sigma$ в *среднем* не более, чем 3 раза на одну тысячу испытаний. На этом основании в *экспериментальных* исследованиях и в технологии принято считать, что событие $\{|X-M_x|>3\sigma_x\}$ является практически невозможным и, следовательно, событие $\{|X-M_x|<3\sigma_x\}$ - практически *достоверным*. В таких случаях говорят, что экспериментатор или проектировщик придерживается *правила трёх сигма*.

Согласно *закону* нормального распределения вероятность того, что случайная величина примет значение в *интервале* $M_x-\sigma_x < X < M_x+\sigma_x$, равна 0,683, вероятность попадания в интервал $M_x-2\sigma_x \le X \le M_x+2\sigma_x$ равна 0,954, а $P(M_x-3\sigma_x \le X \le M_x+3\sigma_x)=0,997$. Эти вероятности эквивалентны соответствующим площадям под *кривой* плотности вероятностей $p(x)$ (рис. 1.43). См. также рис. 2.28.

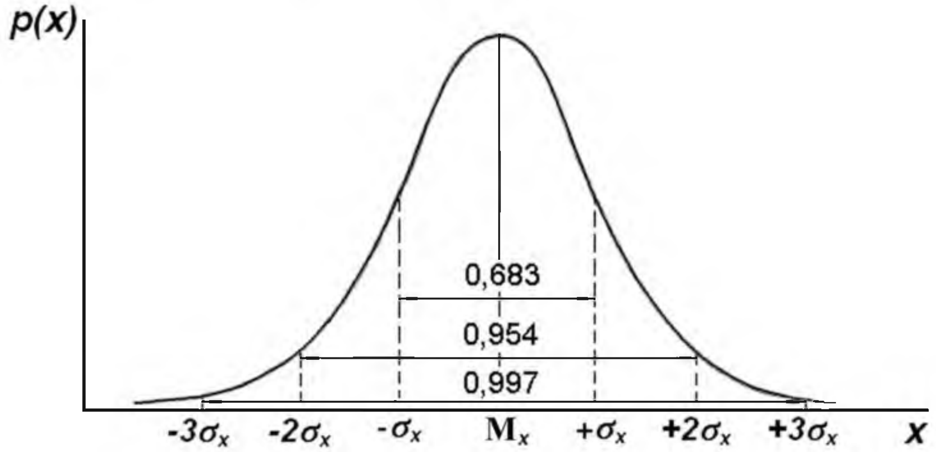



Рис.1.43. Площади под кривой плотности нормального распределения, заключённые в пределах интервалов, кратных стандартному отклонению (общая площадь под кривой плотности вероятностей равна 1)

См. также *Вероятность житейская, Вероятность математическая, Вероятность статистическая, Квадратичное отклонение, Стандартизация случайной величины, Стандартное отклонение.*

# У

**Уникальный** (< *нем.* unicum - единственный в своём роде экземпляр < *лат.* unicum (*ср.р.*), unicus - единственный в своём роде, исключительный, необыкновенный < unus - один; (один-)единственный; только (один). [79, 92]) - 1. Редкий, единственный в своём роде, исключительный, необыкновенный; редкий образец. 2. Уникум - человек исключительный, необыкновенный в каком-либо отношении.

**Уравнение математическое** - *аналитическая* запись задачи о разыскании *значений аргументов*, при которых значения двух данных *функций* равны. Аргументы, от которых зависят эти функции, называются неизвестными, а значения неизвестных, при которых значения функций равны, - решениями (корнями) *математического уравнения*. *Совокупность* математических уравнений, для которых требуется найти значения неизвестных, удовлетворяющих одновременно всем этим математическим уравнениям, называется *системой* математических уравнений, а значения неизвестных, удовлетворяющих одновременно всем математическим уравнениям системы, - решениями системы. Различают алгебраические уравнения, трансцендентные уравнения, в т.ч. тригонометрические уравнения, *логарифмические* уравнения, показательные уравнения, а также иррациональные уравнения. *дифференциальные* уравнения.

**Уровень значимости** *статистического критерия* см. *Значимости уровень статистического критерия.*

**Устойчивость распределения** см. *Распределений устойчивость.*

# Ф

"Факты - упрямая вещь, но статистика гораздо сговорчивее." (*Лоренс Питер*; 1919-1990).

**Факт** (уже при Петре I; *польск.* fakt < *лат.* factum - 1) сделанное, деяние, действие, поступок; 2) истинное происшествие, факт) - 1. Действительное, реальное событие, явление, то, что действительно произошло, происходит, существует. 2. *Частица, утвердит.* и *вводн. слово.* Выражает уверенность, уверение. 3. *букв.* Сделанное, совершённое. 4. Происшествие, случай, событие; дело, быль, быть; данное, на коем можно основаться. [83, 84, 90, 100, 104].

"Один факт способен оспорить авторитет ста философов." (*Гийом Мари Брюм*; 1763-1815).

"**ФАКТОРЪ** м. латнс. комиссiонеръ, исполнитель частныхъ порученiй; сводчикъ, кулакъ. (...) || Въ матемтк. множитель, и вообще членъ, входящий в сложный выводъ. (...) ***Фактъ*** м. происшествiе, случай, событiе; дело, быль, быть; данное, на коемъ можно основаться, пртвпл. *вымыселъ, ложь, сказка.* (...)" (*В.И.Даль*; 1801-1872), [82].

См. также *Данные, Данных обработка математическая, Середа.*

"Мы знаем действие многих причин, но мы не знаем причин многих действий." (*Чарльз Колеб Колтон*; 1780-1832).

**Фактор** (<*лат.* factor - мастер, создатель, виновник; facto - делать, совершать) - 1. Движущая сила, *причина* какого-либо *процесса, явления.* 2. Существенное обстоятельство в каком-либо процессе, явлении. 3. *Независимая переменная физическая величина* или *аргумент.* При наличии трёх и более аргументов принято говорить о *пространстве* независимых переменных, или факторном пространстве.

"Природа не признаёт шуток; она всегда правдива, всегда серьёзна, всегда строга; она всегда права; ошибки же и заблуждения исходят от людей." (*Иоганн Вольфганг Гёте*; 1749-1832).

**Физика** (< *греч.* φυσις - природа, натура, природное свойство, характер; творение, тварь) - наука, изучающая элементарные и вместе с тем наиболее общие *закономерности явлений* природы, *свойства* и строение материи и *законы* её движения. *Понятия* физики и её *законы* лежат в основе всего естествознания. Законы физики описывают универсальные *категории* материального мира. Это законы времени и пространства - фундаментальные законы, *определяющие* поведение материи. Крайне важно отличать в явлениях природы простое и универсальное (законы) от сложного и конкретного (закон с наложенными на него *начальными* и граничными условиями - *математическая модель*). Физика - точная наука, изучающая *количественные* закономерности *процессов* и явлений. С точки зрения технологии и моделирования технологических процессов особый интерес представляют термодинамика, **явления переноса** массы, энергии и импульса, т.е. процессы массопередачи, теплопередачи и гидродинамика.

**Физическая величина** см. *Величина физическая*.

**Фиксация** (*фр.* fixation < *лат.* fixus - крепкий, прочный, неизменный, незыблемый) - 1) (*моделирование*) привязка к факторному пространству, констатация *значений функции* и *факторов*; 2) прекращение действия кого-либо или чего-либо; 3) констатация *событий*, *наблюдений*, *фактов*.

**Фишера критерий, F-критерий** - *случайная величина*, имеющая *плотность вероятностей* (1.259) и зависящая от *степеней свободы чисел* числителя, $\nu_1$, и знаменателя, $\nu_2$ (в неявном виде *критерий* Фишера *определяется* также и *значимости уровнем* $\alpha$, принимаемым исследователем независимым путём). Критерий Фишера применяется для проверки *гипотез* об однородности *выборочных дисперсий*, например $s^2_1$ и $s^2_2$. *Нулевая гипотеза* формулируется как гипотеза об отсутствии различия дисперсий, $H_0: s^2_1 = s^2_2$, альтернативная - дисперсии $s^2_1$ и $s^2_2$ неоднородны и характеризуют выборки из разных *совокупностей*, $H_1: s^2_1 \neq s^2_2$. *Опытный* критерий Фишера конструируется в виде отношения:

$$F^{оп} = \frac{s^2_1/\sigma^2_1}{s^2_2/\sigma^2_2}, \qquad (1.256)$$

где $\sigma^2_1$ и $\sigma^2_2$ - неизвестные *генеральные* дисперсии первой и второй совокупностей. В условиях нулевой гипотезы генеральные дисперсии равны, $\sigma^2_1=\sigma^2_2$, выборочные дисперсии однородны, и отношение $s^2_1/s^2_2$ может непосредственно использоваться для проверки гипотезы (см. также (1.258)). Опытный критерий Фишера:

$$F^{оп}= \frac{S^2_1}{S^2_2} \Leftrightarrow F^{\alpha}_{\nu_1, \nu_2}, \qquad (1.257)$$

сравнивается с табличным значением для чисел степеней свободы числителя $\nu_1$, знаменателя $\nu_2$ и уровня значимости $\alpha$, причём в числителе должна быть большая дисперсия (таблицы критерия Фишера начинаются с единицы). В этом случае табличное значение критерия Фишера является предельным соотношением однородных дисперсий (рис. 1.44).

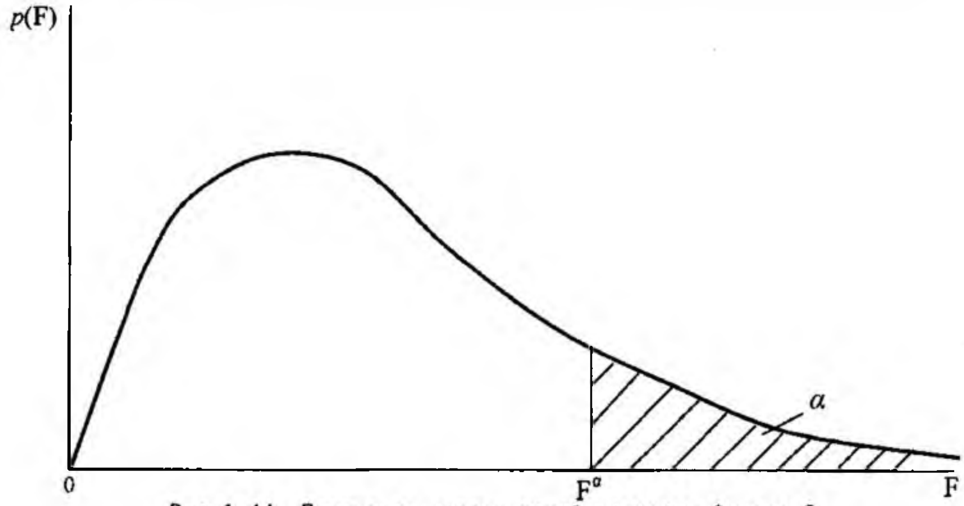



Рис. 1.44. Плотность вероятностей критерия Фишера F.
Заштрихована критическая область, составляющая $\alpha$ площади под кривой (общая площадь под кривой плотности вероятностей равна 1)

Табличные значения критерия Фишера для различных *уровней значимости* $\alpha$ приведены в Приложениях 7, 8, 9. Критерий Фишера назван в честь англ. учёного Р.Э.Фишера (*Fisher Ronald Aylmer*; 1890-1962).
См. также *Статистических гипотез проверка, Фишера распределение.*

**Фишера распределение** - непрерывное *распределение вероятностей случайной величины* F:

$$F = \frac{S_1/\nu_1}{S_2/\nu_2} = \frac{s^2_1}{s^2_2}, \qquad (1.258)$$

где $S_1$ и $S_2$ - *независимые* случайные величины, подчиняющиеся *хи-квадрат распределению* с $\nu_1$ и $\nu_2$ *степенями свободы* соответственно. *Плотность вероятностей* величины $F_{\nu_1, \nu_2}$ имеет вид:

$$p(F) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} \cdot \frac{\nu_1^{\nu_2/2}\,\nu_2^{\nu_1/2}\,F^{\nu_1/2-1}}{(\nu_1 F+\nu_2)^{(\nu_1+\nu_2)/2}}, \quad F\geqslant 0, \qquad (1.259)$$

где $\Gamma(\nu)$ - *гамма-функция*; $\nu_1$ и $\nu_2$ - *числа степеней свободы* числителя и знаменателя, соответственно (частный случай *Пирсона распределений*, тип 6, (1.162), (1.163)). Плотность распределения $p(F)$ - унимодальная функция, монотонная относительно *моды*, *асимметричная* при $\nu_2>2$ (рис.1.45).

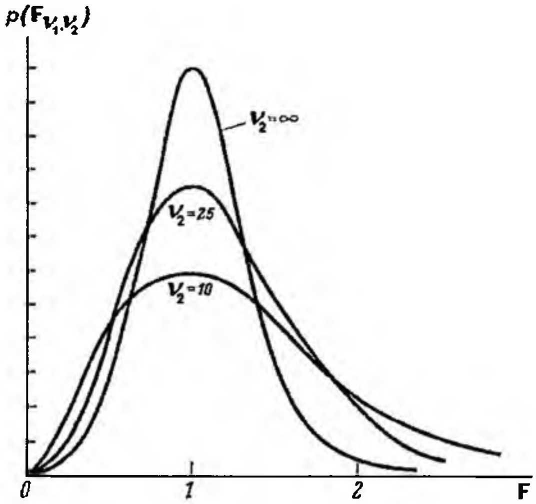



Рис.1.45. Кривые плотностей распределения Фишера (частный случай при $\nu_1=20$) (площадь под каждой кривой плотности вероятностей равна 1)

Очевидно, что F-распределение зависит только от чисел степеней свободы $\nu_1$ и $\nu_2$. Соответствующую *функцию распределения* величины $F_{\nu_1,\nu_2}$, равную интегралу функции (1.259) в пределах от 0 до некоторого заданного значения $F_{\nu_1,\nu_2}$, называют *F-распределением* с $\nu_1$ и $\nu_2$ числами степеней свободы (рис.1.46).

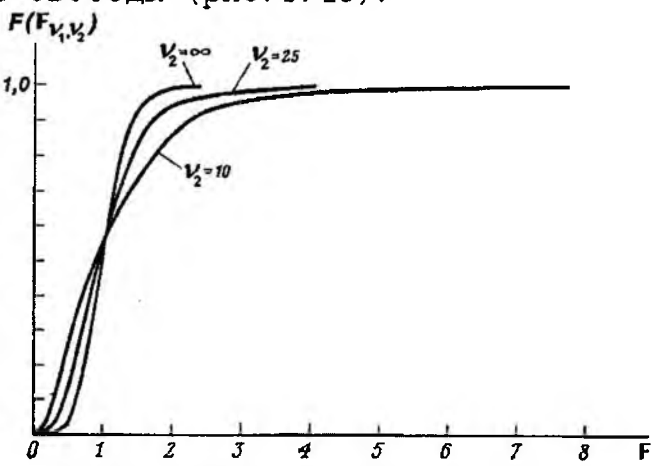



Рис.1.46. Кривые функции распределения Фишера (частный случай при $\nu_1=20$)

*Среднее значение* и *дисперсия* величины $F_{\nu_1,\nu_2}$ *определяются формулами*:

$$m_F = m_1 = \frac{\nu_2}{\nu_2 - 2}, \qquad \nu_2 > 2, \tag{1.260}$$

$$\mu_F^2 = s_F^2 = \frac{2\nu_2^2(\nu_1+\nu_2-2)}{\nu_1(\nu_2-2)^2(\nu_2-4)}, \quad \nu_2 > 4. \tag{1.261}$$

При проверке *статистических гипотез* практический интерес представляют так называемые *критические* значения *Фишера критерия*, - числа, характеризующие предельное соотношение однородных *дисперсий* (1.241), (1.257), см.также рис. 1.7, 1.23, 1.39, 1.44. Значения критерия Фишера определяют для принимаемого *уровня значимости* $\alpha$, руководствуясь *правилом*:

$$\int\limits_{F^{\alpha}_{\nu_1,\nu_2}}^{\infty} p(F)dF = P\left(F^{оп}_{\nu_1,\nu_2} > F^{\alpha}_{\nu_1,\nu_2}\right) = \alpha, \tag{1.262}$$

где $F^{оп}$ - *опытное* значение критерия Фишера (1.257), $\alpha$ - площадь под *кривой* $p(F)$, характеризующая *вероятность ошибочно* отвергнуть верную *нулевую гипотезу*.

Можно отметить, что статистика $(t_\nu)^2$ имеет F-распределение при при $\nu_1=1$ и $\nu_2=\nu$ степенях свободы.

**Флуктуации** (< *лат.* fluctuatio - колебание, волнение, непрерывное движение) - *случайные* отклонения *физических величин* от их *средних* значений или от *функциональной зависимости*. Флуктуации происходят от *множества* случайных *факторов*, сопутствующих *наблюдениям* и развитию любого *процесса*. *Количественной* характеристикой флуктуаций являются соответственно *дисперсия воспроизводимости* и дисперсия *адекватности*. *Анализ* флуктуаций производится *методами вероятностей теории* и *статистики математической*.

**Форма** (*лат.* forma - форма, вид, образ, устройство < "лик", "облик", "фигура" [84, 103]) - 1. (*мат.*) Многочлен с несколькими *переменными* какого-либо порядка, например, *линейная* форма, нелинейная форма, форма *уравнения* парной или иной *зависимости*, *логарифмическая* форма и т.п. 2. Устройство, *структура*, *система* организации чего-либо. 3. Наружный вид, внешнее очертание. 4. Шаблон. 5. Видимость чего-либо, формальность. 6. Формой бытия материи, всеобщей и всегда сохраняющейся, на всех структурных уровнях её в соответствии с современной *концепцией* является время, одномерное, *асимметричное* и необратимое. Время не *явление* и не *процесс*. 7. Формой существования, бытия материи в соответствии с современной концепцией является пространство, характеризующее её протяжённость, структурность, порядок взаимодействия *элементов* всех материальных систем. 8. Мыслеформа (мысленная модель) - образ, создаваемый человеком в своём *разуме* и изучаемый его же мысленным взором. Создание в своём разуме мыслеформ (мысленное моделирование), по существу, - содержание жизни человека. Акт *понимания* - *процедура* создания в разуме адекватной мысленной модели. Значений человека для общества определяется тем, как и какие мысленные модели строит человек и какие принимает решения.

См. также *Среда*.

**Формализация** - выявление *структуры* (*сущности*) *явления*, *процесса*, *формы* мысли и символическое обозначение её. С другой стороны, формализация - это один из путей изучения и *математического описания* процессов, при котором исследователь, частично отвлекаясь от физической сущности процесса (явления), выражает содержание *объекта* в виде относительно жёсткой *функциональной зависимости* выхода от входа (*независимых переменных* или *факторов*). Под формализацией понимается также представление объекта, процесса, явления в виде *формул*, *уравнений*, *систем* уравнений с соответствующими *параметрами*.

См. также *Детерминизм, Детерминированно-стохастическая модель, Детерминистическая модель, Математическая модель, Модель, Модель экспериментально-статистическая, ПОНИМАТЬ, Понятие, Причина, Причинность, Связь, Следствие, Статистическая модель, Стохастическая модель, Структурная модель, Сущность, Форма, Явление.*

**Формула** (< *лат.* formula - формула, форма, модель, правило, предписание, норма) - 1. Всякое *определение*, выраженное в краткой *форме*. 2. (*мат.*) Комбинация *физических величин*, выраженных буквами и числами, и *математических* знаков, выражающая какое-либо предложение. 3. (*хим.*) *Обозначение* состава химического соединения с помощью одной или двух *начальных* букв латинского названия химического элемента и подстрочных цифр, указывающих на *количество* атомов этого элемента в молекуле соединения (например, вода - $H_2O$, этанол - $C_2H_5OH$).

См. также *Модель, Норма, Правило.*

**Функционирование** - выполнение своих *функций*, действие, выполнение *операций*, *процедур*, присущих кому-либо или чему-либо.

**Функция** (<*лат.* functio - исполнение, совершение, служебная обязанность, функция)) - *явление*, зависящее от другого и изменяющееся по *мере* изменения этого другого явления.

1. (*мат.*) Функция - одно из основных *понятий математики*, выражающее *зависимость* одних *переменных величин* от других. Слово "величина" в этом *определении* функции *понимается* в самом широком смысле: именованное *число*, отвлечённое число (действительное или комплексное), несколько чисел (т.е. точка пространства) и вообще *элемент* любого *множества*. В простейшем случае действительной функцией одной действительной переменной величины, когда величина - действительное число, понятие функции определяется следующим образом. Пусть каждому числу $x$ из заданного множества $X$ поставлено в соответствие число $y$, *обозначаемое* $y=f(x)$; в этом случае говорят, что на множестве $X$ задана функция:

$$y=f(x),\ x\in X, \tag{1.263}$$

где $x$ - *независимая* переменная величина, или *аргумент*, или *фактор*; $y$ - зависимая переменная величина, или функция; $X$ - множество значений, которые может принимать $x$. Другими словами, $X$ - область определения, или область задания функции. Выражение "поставлено в соответствие" означает, что указан определённый способ, по которому для каждого $x\in X$ находится $y=f(x)$. Функция может быть задана различными способами: *аналитически*, *графически*, таблично и в словесной *форме*.

Аналитический способ наиболее распространён, при этом функция задаётся *формулой*, указывающей, какие вычислительные операции необходимо произвести над $x$, чтобы получить $y$. Например, $y=3+\ln x$; $y=3+4x+5x^2+6x^3$.

При табличном способе задания функция задаётся в виде таблицы, в которой каждому значению аргумента указывается соответствующее ему значение функции. Такой способ задания функции является *результатом* подавляющего большинства *экспериментальных* исследований, и именно таблично заданная функция используется для *статистического* анализа *данных*, восстановления зависимости и проверки статистических *гипотез* об исследуемом *процессе*. Широко распространена и обратная *процедура*, когда аналитическая функция табулируется, т.е. представляется в виде таблиц: таблиц *логарифмов*, тригонометрических функций, а такие функции, как *распределения Стьюдента*, Фишера и другие практически используются только в виде таблиц.

Графический способ необходим исследователю для визуального представления и первичного анализа экспериментально полученной зависимости. Графиком функции $y=f(x)$ называется множество точек плоскости с прямоугольными координатами ($x$, $y$), где $x \in X$. Однако функция, заданная графически, недостаточно определена с чисто математической точки зрения, и её табличное представление используется в *качестве* задачи восстановления зависимости.

Действительная функция нескольких действительных переменных широко используется при *математическом моделировании* технологических процессов. В случае *множества* аргументов (*факторов*) принято говорить о расчётном значении функции $y_{расч}$ (аналитической функции) и факторном пространстве $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, где $k$ - *количество* независимых переменных (факторов) или размерность факторного пространства. При *статистическом моделировании* размерность факторного пространства не ограничена, а при построении *детерминистических* моделей обычно ограничиваются четырьмя факторами - три координаты нашего трёхмерного мира и время (например, процесс нестационарного теплообмена, массообмена и др.).

Впервые *термин* "функция" использовал Г.Лейбниц (*Leibniz Gottfried Wilhelm*; 1646-1716) в рукописи 1673 г., оставшейся неизданной, под названием "Обратный *метод* касательных или [рассуждения] по поводу функций" по поводу задачи, в которой требовалось определить координаты, исходя из заданного *свойства* касательных к *кривой*. Г.Лейбниц называл функцией любую линию (длина которой зависит от положения некоторой точки на данной кривой), которая в общепринятом смысле слова выполняет свою функцию в фигуре, иначе говоря, играет роль касательной, *нормали*, подкасательной и так далее и которая таким образом "функционирует". Подобное соглашение о смысле слова "функция" было принято и в некоторых других его статьях, опубликованных в 1692 и 1694 гг., и в том же смысле это слово появилось в 1697 г. в работе Иоганна Бернулли (*Johann Bernoulli*; 1667-1748).

2. (*биол.*) Специфическая деятельность животного или растительного организма, его органов, тканей и клеток.

3. (*лингв.*) Значение какой-либо языковой *формы*, её роль в системе языка, *определяемая соотношением* с другими формами.

4. (*соц.*) Обязанности, круг деятельности, назначение, роль.

**Функция аналитическая** (< *франц.* analyse < *лат.* analysis < *греч.* αναλυσις - разложение, растворение. *М.Фасмер*; (1886-1962).

[100]; $\alpha\nu\alpha\lambda\upsilon\sigma\iota\varsigma$ - разрушение, освобождение от чего: $\varkappa\alpha\varkappa\omega\nu$; смерть. *А.Д.Вейсман*; (1834-1913); [80]) - *функция*, которая может быть представлена *степенным* рядом. Например,

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{j=1}^{k} b_j x_j + \sum_{l \neq m}^{k} b_{l.m} x_l x_m + \sum_{j=1}^{k} b_{jj} x_j^2 \ldots, \qquad (1.264)$$

а в случае парной *зависимости* вида $y=f(x)$:

$$\hat{y} = \sum_{j=0}^{k} b_j x^k, \qquad (1.265)$$

где $\hat{y}$ - значение функции, $x_1$, $x_2, \ldots, x_k$ - *независимые переменные* или *факторы*, а $b_0$, $b_j$, $b_{l.m}$, $b_{jj}$ - *коэффициенты уравнения*, которые достаточно легко можно вычислить *методом* наименьших квадратов.

Класс *аналитических* функций исключительно важен с точки зрения широты охвата большинства функций, встречающихся в *математике*, в *моделировании* технологических *процессов* и других приложениях. Кроме этого, класс аналитических функций замкнут *относительно* основных операций арифметики, алгебры и анализа: арифметические действия с аналитическими функциями, алгебраические действия с *параметрами*, дифференцирование и интегрирование приводят снова к аналитическим функциям. Кроме этого, аналитическая функция, полученная в *результате анализа* результатов *экспериментов* (таблично *заданной* функции), справедлива только для того *объекта* или *системы*, которые подвергались исследованию (это частный случай). В математике это *свойство* называется свойством единственности.

Аналитические функции нескольких действительных переменных широко используются при *математическом моделировании* технологических *процессов*, при этом их чаще называют *экспериментально-статистическими моделями* или *регрессионными уравнениями*. В случае *множества аргументов* (факторов) принято говорить о факторном пространстве $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, где $k$ - *количество* независимых переменных (факторов) или размерность факторного пространства. При *статистическом* моделировании размерность факторного пространства не ограничена, а при построении *детерминистических* моделей обычно ограничиваются четырьмя факторами - тремя координатами нашего трёхмерного мира и временем (например, процессы нестационарного теплообмена, массообмена и др.).

См. также *Статистическая модель*.

**Функция отклика** - реакция открытой *системы* на возмущение, имеющая то или иное *распределение элементов* возмущающего воздействия во времени и/или в пространстве.

**Функция распределения** *случайной величины, кумулятивная функция* - функция $F(x)$, характеризующая *вероятность* того, что случайное значение величины $X$ не превысит $x_1$ (рис.1.47).

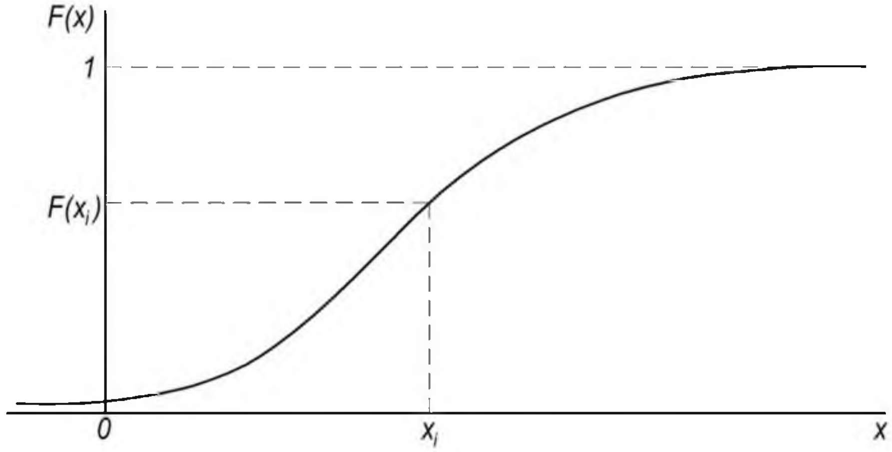



Рис.1.47. Функция распределения случайной величины $X$, кумулятивная функция.

$$\lim_{x\to-\infty} F(x)=0, \ \lim_{x\to\infty} F(x)=1$$

*Понятие* "функция распределения" следует отличать от понятия "*распределение вероятностей*" которое характеризует *относительную частоту* появления того или иного признака. Понятие функция распределения применяется к неубывающим функциям, стремящимся к нулю при $x\to-\infty$ и к единице при $x\to+\infty$. Функция распределения, например, *дискретной* случайной величины $X$ *определяется формулой*:

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\sum_{x_1\leqslant x} p(x_1), \qquad (1.266)$$

в которой сумма берётся по всем значениям $x_1$, не превосходящим $x$. См. также *Распределения функция случайной величины X*. Подробно см. раздел 2.4.

**Функция случая** см. *Случайная величина*.

# Х

**Хи-квадрат критерий**, $X^2$-критерий - *критерий* проверки различных *статистических гипотез*, основанный на *хи-квадрат распределении*. Например, пусть *результаты наблюдений* $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ являются взаимно *независимыми случайными величинами*, подчиняющимися *нормальному распределению* с неизвестными *параметрами* $m_x$ и $\sigma^2{}_x$. *Оценкой гене-*

*ральной дисперсии* $б^2{}_x$ является *выборочная дисперсия* $s^2{}_x$, а *доверительный интервал* для генеральной дисперсии можно получить с помощью $X^2$-критерия:

$$X^2 = \frac{1}{б^2{}_x} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \nu \frac{s^2{}_x}{б^2{}_x}, \qquad (1.267)$$

где $б^2{}_x$ - *генеральная дисперсия*, $s^2{}_x$ - *выборочная* дисперсия:

$$s^2_x = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2. \qquad (1.268)$$

где $\bar{x}$ - *арифметическое среднее*:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i. \qquad (1.269)$$

*Статистика* (1.267) подчиняется распределению хи-квадрат с $\nu = n-1$ *степенями свободы* и *уровнем значимости* $\alpha$. При *доверительной вероятности* $P = 1-\alpha$ *доверительный интервал* для $X^2$ имеет вид:

$$X^2{}_\nu(\alpha/2) \leqslant X^2 \leqslant X^2{}_\nu(1-\alpha/2). \qquad (1.270)$$

Односторонние доверительные оценки имеют вид:

$$X^2 \leqslant X^2{}_\nu(1-\alpha), \quad X^2 \geqslant X^2{}_\nu(\alpha). \qquad (1.271)$$

Доверительный интервал для генеральной дисперсии $б^2{}_x$ *определяется* следующим выражением:

$$\frac{\nu s^2{}_x}{X^2{}_\nu(1-\alpha/2)} \leqslant б^2{}_x \leqslant \frac{\nu s^2{}_x}{X^2{}_\nu(\alpha/2)}. \qquad (1.272)$$

Аналогично определяются односторонние доверительные оценки для генеральной дисперсии:

$$б^2{}_x \leqslant \frac{\nu s^2{}_x}{X^2{}_\nu(\alpha)}; \qquad (1.273)$$

$$б^2{}_x \geqslant \frac{\nu s^2{}_x}{X^2{}_\nu(1-\alpha)}. \qquad (1.274)$$

Наиболее известно применение хи-квадрат критерия как *критерия согласия Пирсона* при проверке гипотезы о принадлежности *функции распределения* независимых, одинаково распределённых случайных величин $x_1$, $x_2, \ldots, x_n$ семейству *непрерывных* функций $F(x, \Theta)$ на исследованном интервале и при проверке гипотезы о неизвестной функции распределения $F(x)$ независимых одинаково распределённых результатов наблюдений $x_1$, $x_2, \ldots, x_n$. В последнем случае критерий для проверки гипотезы о том, что $F(x)=F_0(x)$, где $F_0(x)$ - заданная или предполагаемая функция распределения, строится следующим образом. Диапазон изменения значений $x_1-x_n$ в *выборке* объёма $n$ разбивается на $k$ непересекающихся *интервалов* $\Delta_1$, $\Delta_2, \ldots, \Delta_k$, (в пределах от 5-8 до 20-30), оптимальное *число* равных интервалов можно определить по *формуле*:

$$k=1+3,332\lg(n), \quad k\geqslant 2, \tag{1.275}$$

и подсчитывается число $n_j$ *элементов* выборки, попавшее в $j$-тый интервал ($n_j$ - число $X_i \in \Delta_j$, $j=1, 2, \ldots, k$; $i=1, 2, \ldots, n_j$; $n_j \geqslant 2$). По результатам расчётов строится *гистограмма* выборочного распределения, которая может служить основанием для выбора вида *закона* распределения наряду с общими соображениями о механизме возникновения случайной величины. Параметры выбранного закона могут быть оценены по выборке или определены из теоретических соображений, что и является основанием для вычисления *вероятностей* $p_i$ попадания случайной величины $X$ в $j$-й интервал, $p_j=P\{X_i \in \Delta_j\}>0$ в предположении, что проверяемая гипотеза верна. Проверка гипотезы соответствия *частот* $n_j/n$ вероятностям $p_j$ основана на *критерии Пирсона*:

$$X^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(n_j-np_j)^2}{np_j}, \tag{1.276}$$

где $k$ - *число* интервалов, $n$ - объём выборки (желательно $n\geqslant 50\div 150$), $n_j$ - число *элементов* выборки, попавшее в $j$-й интервал (желательно $n_j\geqslant 5\div 10$). Сумма (1.276) в случае, если $F(x)=F_0(x)$ имеет *асимптотически* хи-квадрат распределение с $\nu$ степенями свободы. Число степеней свободы $\nu$ как обычно равно числу независимых источников *информации*, с помощью которых вычисляется $X^2$. В данном случае $\nu$ равно $k$ минус число независимых *линейных связей* (ограничений), наложенных на рассматриваемую выборку. Как и в случае с числом степеней свободы *дисперсии воспроизводимости*, первое ограничение обусловлено тем, что частота в $k$-том интервале может быть *определена* после определения частот в первых $k$-1 интервалах (в данном случае $\Sigma n_j=n$, в общем случае сумма вероятностей равна единице, $\Sigma p_j=1$). Второе ограничение обусловлено подгонкой теоретической *плотности распределения* к выборочной *гистограмме*. Так, если *постулируется* гипотеза о соответствии выборочного распределения *нормальному закону*, то ещё две степени свободы теряются в результате вычисления *среднего значения*, $x_{ср}$, и *дисперсии*, $s^2_x$. Таким образом, $\nu=k-l-1=k-3$. Гипотеза о нормальном законе распределения принимается с *данным уровнем значимости* $\alpha=1-P$, если:

$$X^2 < X^2_\nu(\alpha), \qquad (1.277)$$

где $X^2_\nu(\alpha)$ - табличное значение $X^2$-критерия для принятого *уровня значимости* $\alpha$ и числа степеней свободы $\nu$. Если $X^2 > X^2_\nu(\alpha)$, то гипотеза о нормальности исследуемого распределения отклоняется.

Хи-квадрат критерий используется также как критерий однородности, критерий *независимости* в таблицах сопряжённости признаков и др.

См. также *Частота случайного события.*

**Хи-квадрат распределение**, $X^2$-распределение - *непрерывное*, сосредоточенное на положительной полуоси $(0, \infty)$ *распределение вероятностей с плотностью*:

$$p(X^2) = \frac{1}{2^{\nu/2}\,\Gamma\left(\dfrac{\nu}{2}\right)}\,(X^2)^{\nu/2-1}\,\exp(X^2/2), \quad (X^2)\geqslant 0, \qquad (1.278)$$

где $\Gamma(\lambda)$ - *гамма-функция*, $\nu$ - *степеней свободы число*, $\nu\geqslant 1$ (частный случай *Пирсона распределений*, тип 3, (1.155)). Хи-квадрат распределение с $\nu$ степенями свободы может быть выведено как распределение суммы квадратов *независимых случайных величин* $z_1$, $z_2$, ..., $z_\nu$, имеющих одинаковое *нормальное распределение* с нулевым *математическим ожиданием* и единичной *дисперсией*:

$$X^2_\nu=z^2_1+z^2_2+\ldots+z^2_\nu. \qquad (1.279)$$

Величина $X^2_\nu$ называется хи-квадрат с $\nu$ степенями свободы. Число степеней свободы $\nu$ есть число независимых значений квадратов величин $z$, входящих в сумму (1.279). Плотность распределения $X^2$ имеет вид *кривых* на рис. 1.48.

*Функцию распределения* $F(X^2_\nu)$, равную интегралу (1.278) от нуля до *заданного* значения $X^2_\nu$, называют распределением $X^2_\nu$ с $\nu$ степенями свободы (см. рис. 1.49).

Хи-квадрат распределение представляет собой частный случай *распределений Пирсона* и *гамма-распределения* и обладает всеми *свойс-*

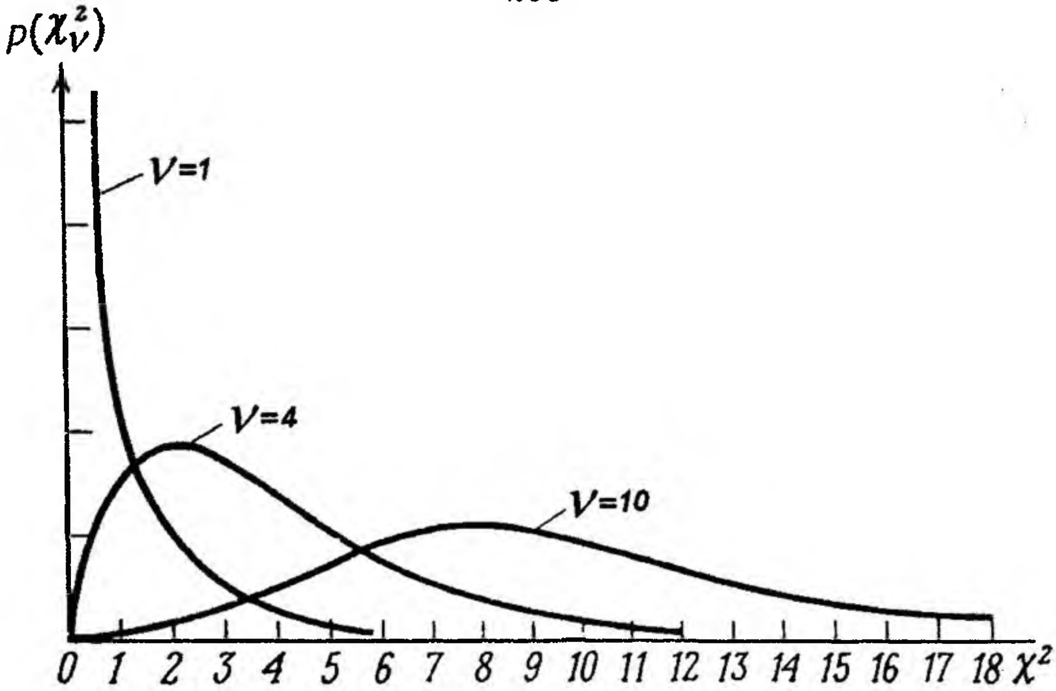



Рис.1.48. Плотность распределения критерия $X^2$
(площадь под каждой кривой плотности вероятностей равна 1)

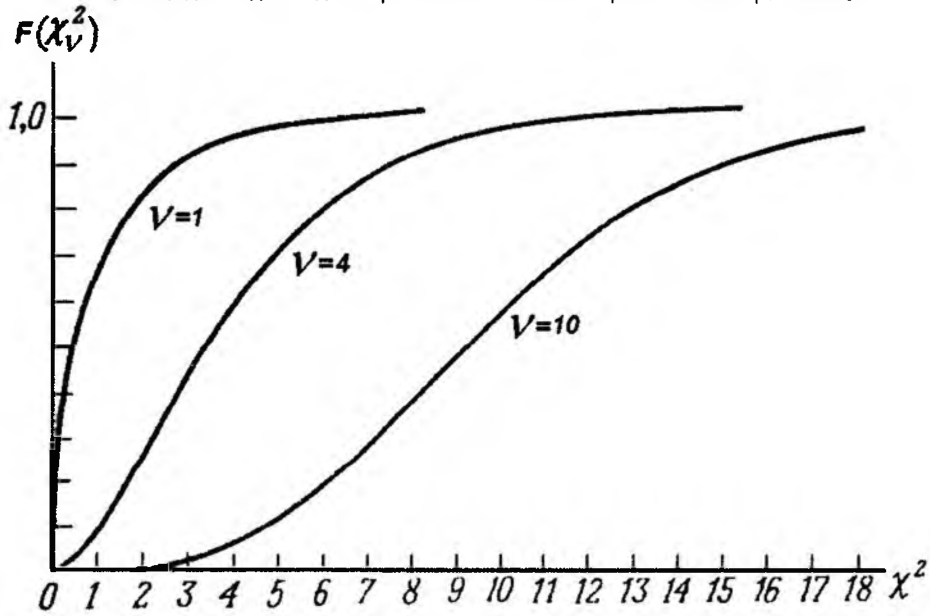



Рис.1.49. Функция распределения критерия $F(X^2{}_\nu)$

*твами* последнего. *Плотность вероятностей* $p(x)$ при $\nu=1$ и $\nu=2$ монотонна, а при $\nu>2$ унимодальна, монотонна *относительно моды* и *несимметрична* (рис. 1.48). При $\nu\geq 2$ хи-квадрат распределение имеет моду в точке $x=\nu-2$, *математическое ожидание* и *дисперсия* хи-квадрат распределения равны, соответственно, $n$ и $2n$. Величина $X_2$, равная корню квадратному из суммы $X^2{}_2$ с двумя степенями свободы, подчиняется *Рэлея распределению*, которое применяется при решении задачи о стрельбе по круговой цели. Величина $X_3$, равная корню квадратному из суммы $X^2{}_3$ с тремя степенями свободы, подчиняется *Максвелла распределению*, которое применяется при решении задачи о стрельбе по сферической цели. При увеличении числа степеней свободы хи-квадрат распределение приближается к распределению К.Гаусса. В частности, при $\nu>30$ величина $\sqrt{2X^2_\nu}$ распределена приблизительно по *нормальному закону* со *средним* значением $m_{x2}=\sqrt{(2\nu-1)}$ и дисперсией $\sigma^2=1$.

Эта тесная *связь* с нормальным распределением *определяет* ту важную роль, которую играет хи-квадрат распределение в *вероятностей теории* и *статистике математической*. Многие распределения, такие, как *Максвелла распределение*, *Рэлея распределение*, *Стьюдента распределение*, *Фишера распределение* и др., определяются посредством хи-квадрат распределения. Эти и другие распределения описывают *выборочные* распределения различных функций от нормально распределённых *результатов наблюдений* и используются для построения *доверительных интервалов* и *статистических критериев*. Так, например, для независимых нормально распределённых *случайных величин* $x_1$, $x_2, \dots, x_n$ с *математическим ожиданием* $M_x$ и *генеральной дисперсией* $\sigma^2_x$ отношение $s^2_x/\sigma^2_x$ (см. (1.256) и (1.267)) подчиняется хи-квадрат распределению с $\nu$ степенями свободы при любых значениях $m_x$ и $\sigma^2_x$. Этот факт является основанием для получения *доверительных интервалов* генеральной дисперсии и критерия для проверки *гипотезы* о неизвестных *параметрах* распределения $M_x$ и $\sigma^2_x$. В частности, при решении вопроса о *возможном абсолютном* отклонении случайной величины:

$$\Delta X=|X-m_x|. \tag{1.280}$$

Так, согласно закону нормального распределения *вероятность* того, что случайная величина примет значение в интервале $M_x-\sigma<X<M_x+\sigma$, равна 0,683, вероятность попадания в интервал $M_x-2\sigma<X<M_x+2\sigma$ равна 0,954, а $P(M_x-3\sigma<X<M_x+3\sigma)=0,997$. Последнее соотношение называется *правилом трёх сигма* (1.255). Что оно означает? То, что на практике при принятии решений относительно возможных результатов *событий*, подчиняющихся закону нормального распределения, пренебрегают возможностью отклонений от $M_x$, превышающих $3\sigma$ (соответствующая вероятность меньше 0,003).

При проверке *статистических гипотез* представляют интерес *критические* значения *хи-квадрат критерия*. Их определяют для принимаемого *уровня значимости* $\alpha$, руководствуясь *правилом*:

$$\int_{X^\alpha_\nu}^{\infty} p(X^2)\,dX^2 = P\left\{X^2_\nu > \left(X^2_\nu\right)^\alpha\right\} = \alpha, \tag{1.281}$$

где $X^2_\nu$ - *опытное* значение хи-квадрат критерия, $\alpha$ - площадь под *кривой* $p(X^2)$, характеризующая *вероятность ошибочно* отвергнуть верную *нулевую* или *основную гипотезу*. Табулированные значения хи-квадрат критерия при различных уровнях значимости $\alpha$ приведены в Приложении 5.

# Ц

"Вселенная есть целиком центр. Центр вселенной повсюду и во всём." (*Джордано Филиппо Бруно*; 1548-1600).

**Центр** (< *нем.* zentrum < *лат.* centrum < *греч.* κέντρον - остриё циркуля. - *М. Фасмер*; 1886-1962. [100]). **"ЦЕНТРЪ** м. латн. средоточіе, остіе, осенъ, остенъ. (...) ***Центральный,*** срединный, средоточный, остенный. (...) ***Цетробежная*** *сила, движенье,* вернее ***центроотбежная,*** средоотбойная, удаляющая тело отъ средоточія, средоотбежная, пртвп. средоприбежная. ***-стремительная, -влечная,*** приближающая ко средоточію. (...) ***Централизація,*** сосредоточенье." (*В.И.Даль*; 1801-1872), [82].

**Центральная предельная теорема** - теорема *вероятностей теории*, которая утверждает, что если *выборки* извлечены *случайно* из любой *совокупности*, то *средние арифметические*, вычисленные для этих *данных*, а именно выборочные средние, являются *случайными величинами*, *распределение* которых стремится к *нормальному* при увеличению объёма выборок.

Центральная предельная теорема на первый взгляд кажется не вполне понятной, поскольку совершенно не очевидно, почему средние выборок должны подчиняться *нормальному распределению*, если образцы были выбраны из совокупности совершенно другого типа. Попробуем убедиться в *правильности* центральной предельной теоремы, рассуждая следующим образом. Предположим, что выборка произведена из совокупности, имеющей распределение, совершенно отличное от нормального, например, *U*-образного вида, т.е. распределения, имеющего *максимальные* значения *плотности* по краям (рис. 1.50).

Из этой совокупности случайным образом взяты три выборки по 5 *наблюдений* в каждой (рис. 1.50). Очевидно, что средние значения каждой выборки располагаются достаточно близко к центру распределения (рис. 1.50), и если подобное *экспериментирование* продолжить, то

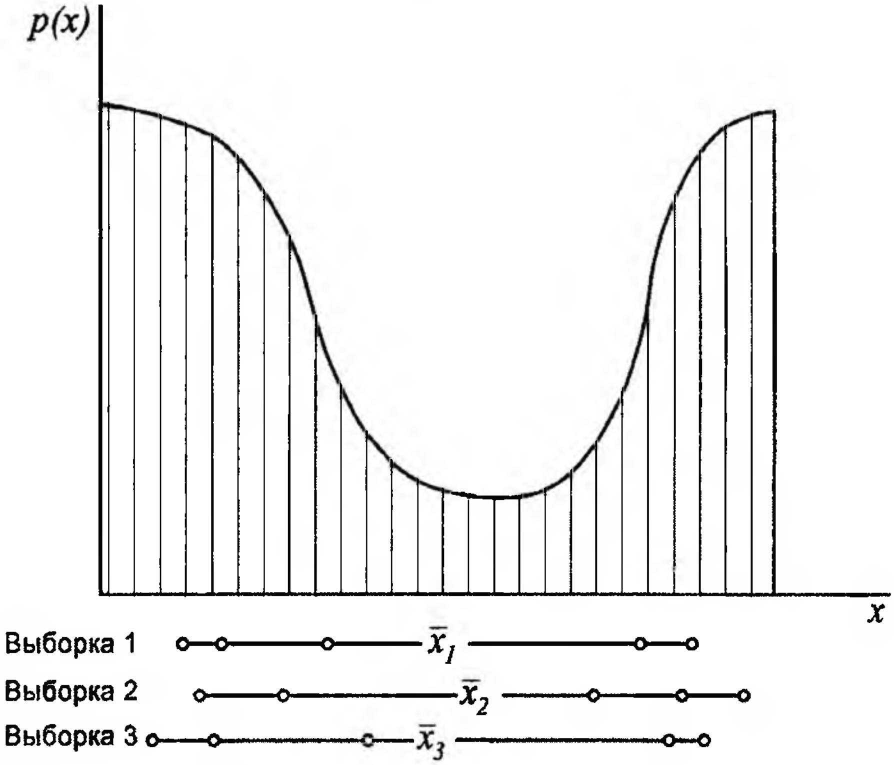



Рис.1.50. Плотность вероятностей распределения $U$-образного вида (общая площадь под кривой плотности вероятностей равна 1)

образуется новая совокупность из средних значений $x_{ср.i}$, распределение которой будет стремиться к *центру*.

Подробнее. В таком случае большая часть индивидуальных *наблюдений* в выборке будет получена из двух краёв распределения, которые являются максимумами совокупности. Когда эти значения усредняются с целью нахождения среднего арифметического, большие значения погашаются низшими значениями, в *результате* получается среднее, близкое к центру распределения. Только в очень редких случаях, когда все случайно выбранные *наблюдения* окажутся близкими либо к высоким значениям, либо к самым низким, при вычислении среднего будет получено значение, сильно отличающееся от центрального. Рассуждая подобным образом для десятков, сотен и более выборок, мы придём к выводу, что выборочные средние значения кластеризуются (собираются в пучки) вблизи центрального значения любого *гипотетического* распределения и выборочные средние будут располагаться наподобие хорошо известной колоколообразной нормальной *кривой*. На рис. 1.51 показано, что *аналогичные* результаты будут получены, если начать *моделирование* с любого другого исходного распределения (*Л.Л.Лапин*).

**Центральный момент** см. *Момент, Моментов метод* и раздел 3.

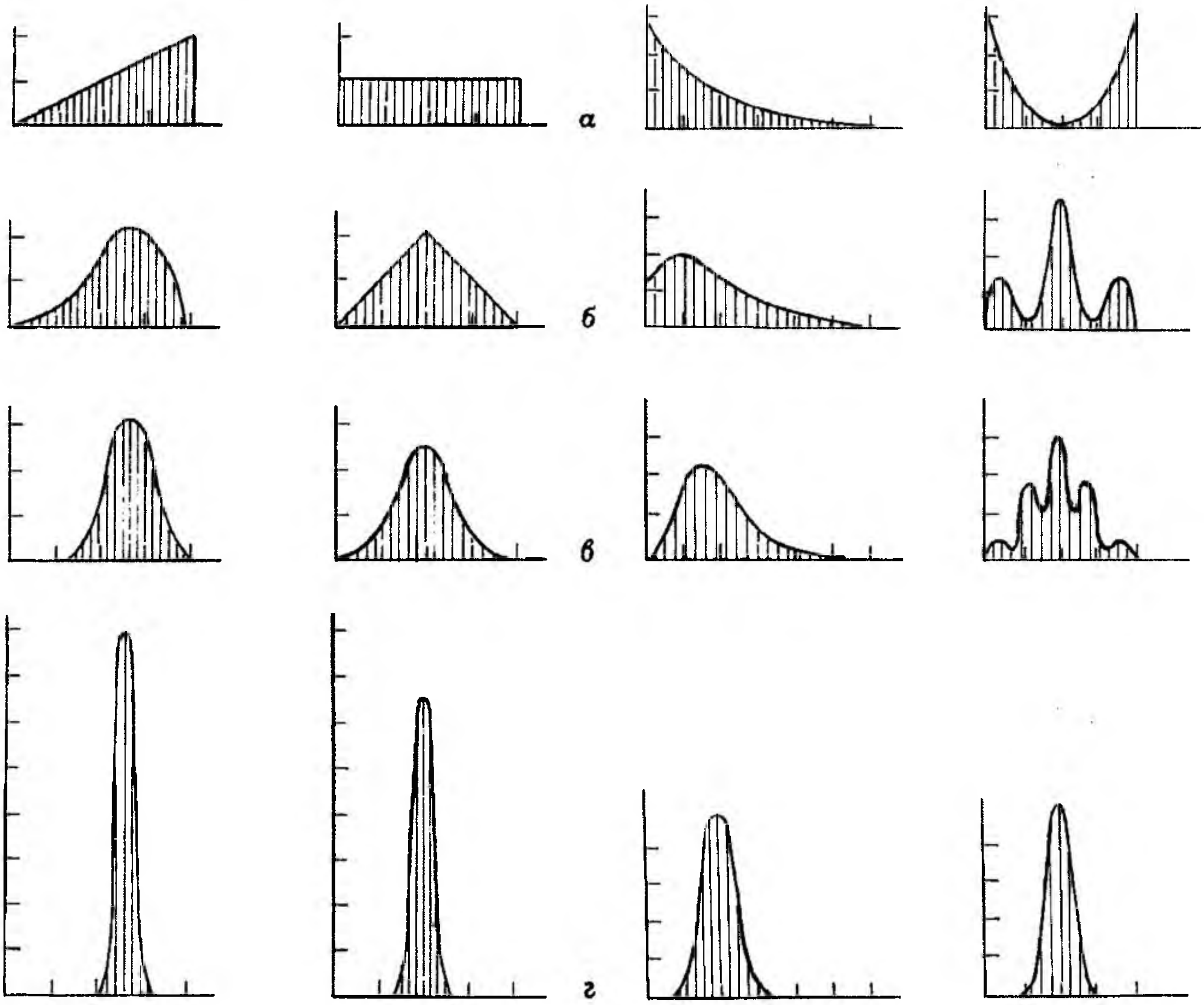



Рис.1.51. Распределения средних значений $x_{ср}$ для большого числа случайных выборок размерности $n$ взятых из совокупностей с распределением существенно отличающимся от нормального: а - распределение исходных совокупностей, из которых взяты выборки; б ÷ г - распределения $x_{ср}$ для выборок размерности $n$=2 (б), $n$=4 (в), $n$=25 (г) (площадь под каждой кривой плотности вероятностей равна 1)

**Центрирование случайной величины** - преобразование *случайной величины* с целью получения *распределения* с *центром* в нуле. Центрирование *нормального распределения* (1.121), (1.193), (1.225), (1.299), (2.20) производится с помощью соотношения:

$$æ = x - M_x, \qquad (1.282)$$

где $x$ - случайная величина, $M_x$ - *математическое ожидание*, $æ$ - центрированная случайная величина (от *греч.* χεντρον - остриё циркуля). Центрирование *выборочной* случайной величины производится путём вычитания из неё *среднего значения* выборки:

$$æ_1 = x_1 - m_x, \qquad (1.283)$$

где $m_x$ - *оценка* математического ожидания; в частном случае среднее арифметическое. См. также раздел 2.9, (2.16), (2.17). Получаемое при этом распределение называется центрированным. Такое преобразование случайной величины позволяет вычислять центральные *моменты распределения*.

См. также *Среднее, среднее значение, Стандартизация случайной величины* и раздел 2.7.

# Ч

**Частота** *случайного события* - *отношение числа* $n_i$ наступлений $i$-того события в *данной* последовательности испытаний к общему числу $n$ испытаний:

$$h_i = \frac{n_i}{n}. \qquad (1.284)$$

Очевидно, что $0 \leqslant h_i \leqslant 1$. В ситуации, к которой по соображениям *симметрии* принято "классическое" *определение вероятности*, частота $n_i/n$ $i$-того события совпадает с вероятностью $p_i$. В ином случае, если испытания *независимы* и *априори постулируется* существование определённой вероятности $p_i$ наступления $i$-того события, то при любом сколь угодно малом числе $\varepsilon > 0$ и больших $n$ практически *достоверно*, что частота $n_i/n$ удовлетворяет неравенству $|n_i/n - p_i| \leqslant \varepsilon$. Эта близость $n_i/n$ к $p_i$ позволяет при решении задачи *оценивания* неизвестной вероятности $p_i$ по *результатам наблюдения* в *статистике математической* принимать частоту в качестве приближённого значения или, как принято говорить, *статистической оценки* вероятности. Важно отметить, что в отличие от вероятности частота события является **случайной величиной**, т.к. она зависит от результатов $n$ *экспериментов*.

Из других определений частоты случайного события можно отметить то, что *математическое ожидание* частоты события $B$ равно вероятности его появления; это является *следствием закона больших чисел*.

См. также *Вероятность, Вероятностей теория, Вероятность математическая* и раздел 2.3.

"**ЧИСЛО** ср. количество, счетомъ, на вопросъ: *сколько?* и самый знакъ, выражающій количество, цыфра. (...) *Числа римскія, арабскія* или *церковныя*. *Целое число*, пртвпл. *дробь*. (...) ***Числитель***, м. числящій, исчисляющій что. || *Числитель*, верхняя цыфра дроби, означающая, сколько *частей* взято отъ *целаго*, разделеннаго на столько частей, сколько единицъ въ *знаменателе*. (...) ***Числословіе***, арифметика, математика, счетная наука." (*В.И.Даль*; 1801-1872), [82].

См. также *Количество, Математика, Число.*

"Первообразы и первоначала не поддаются ясному изложению на словах, потому что их трудно уразуметь и трудно высказать,- оттого и приходится для ясности обучения прибегать к числам." (*Пифагор*; 576-496 г. до Р.Х.).

**Число** - важнейшее *математическое понятие*. В простейшем виде - в виде натурального числа - понятие числа, безусловно, возникло ещё в первобытном обществе. Но первыми древними цивилизациями, от которых до нас дошли письменные доказательства их математических познаний, были вавилонская (около 1894-1595 г. до Р.Х.) и египетская (около 1650 г. до Р.Х.). В течение нескольких тысячелетий понятие числа усложнялось и обогащалось *содержанием* по *мере* развития человеческого общества. "Говорят, что числа правят миром. Нет, они только показывают, как правят миром." (*И.В. Гёте*; 1749-1832).

Понятие натурального числа *связано* с наличием в языке различных слов для *обозначения* одного и того же *количества* различных *объектов*. Такие именованные числовые ряды были очень короткими и завершались неиндивидуализированными, но именованными понятиями "*много*", например, в русском языке "толпа", "стадо", "стая", "груда", "куча", "косяк" и т.д.

Понятие отвлечённого числа связано с сопоставлением предметов *данной* конкретной *совокупности* с предметами некоторой эталонной совокупности. У большинства народов первым таким эталоном являются пальцы рук (пятеричная, десятичная *системы* счисления), суставы пальцев рук (двенадцатиричная системы счисления), ног и т.п. Позже появились отвлечённые счётные эталоны, например, зарубки на палочках и т.п.

С развитием письменности возможности воспроизведения числа существенно увеличились. Чёрточки на глиняных табличках, клинопись, римские цифры; крупным шагом вперёд было изобретение индийцами современной позиционной системы счисления, позволяющей записать любое натуральное число при помощи десяти знаков - цифр. Развитие письменности способствовало абстрагированию понятия натурального числа, отвлечению его от конкретных предметов. Одновременно в практику включались действия над числами. Действия сложения и вычитания возникали вначале как действия над самими *совокупностями* в *форме* объединения двух совокупностей в одну и отделения *части* совокупности. Умножение возникло, по-видимому, в *результате* счёта равными частями (по два, по три и т.д.), деление - как деление совокупности на равные части. В *процессе* развития цивилизации происходило разделение *количественных* и *качественных* характеристик числа, стали разрабатываться *правила* действий, изучаться их *свойства*, создаваться *методы* для решения задач, т.е. начинается развитие науки о числе - арифметики. В процессе развития арифметики происходит детализация понятия натурального числа, вводится понятие *бесконечного* числа, выделяются классы чётных и нечётных чисел, простых и составных, вводятся понятия порядкового числа и дробных чисел. В частности, целые числа, чётные и нечетные формализовал Пифагор (576-496 г. до Р.Х.).

В процессе развития алгебры как науки, одним из предметов которой являются общие способы решения арифметических задач, были введены отрицательные числа, иррациональные числа и, наконец, комплексные числа. В современной *теории* чисел изучаются *p*-адические числа, группы, алгебры, кольца, поля.

**Число связей** наложенных на *выборку* см. *Связей число*, *Степеней свободы число*.

**Число степеней свободы** см. *Степеней свободы число*.

**Число трансцендентное** ( <*лат.* transcensum (от trans - через, сквозь, за пределами и scansum - восходить, возноситься, достигать) - выходящий за пределы, переходящий) - *иррациональное число*, не могущее быть *корнем* никакого алгебраического *уравнения* с *целыми коэффициентами*, например, *e*, $\pi$, ln 2 и др. В 19 в. была доказана *трансцендентность* только чисел $\pi$ и *e*. В период 1929-1934 гг. была доказана трансцендентность всех чисел вида $\alpha^{\beta}$, где $\alpha$ - любое алгебраическое число, кроме 0 и 1, а $\beta$ - *иррациональное число*. "Трансцендентное" обозначает то, что существует вне сознания, недоступно ему и непознаваемо. (*Иммануил Кант*; 1724-1804).

# Ш

"**ШУМЪ** м. всякіе нестройные звуки, голоса, поражающіе слухъ; громкіе голоса, крикъ; стукъ, гулъ, зыкъ, ревъ, громкій шорохъ, все, что нескладно раздается въ ушахъ. (...) *Шумъ ветра, бури, дождя.* (...) *Шумъ водопада. Шумъ листьевъ подъ ногами не даетъ подходу* къ *дичи*. *Шумъ въ ушахъ*, гулъ, звонъ, какъ внутренее ощущенье. (...) *Въ голове шумитъ*, или *зашумело*, хмель разбираетъ. (...)" (*В.И.Даль*; 1801-1872), [82]. См. также *Шум*.

**Шум** - название различных помех, искажающих *результаты измерений* в *процессе* исследований, испытаний, *экспериментов*, а также помехи, искажающие полезный сигнал в процессе передачи *информации* по каналу *связи*.

См. также *Мера, Нормальное распределение, Ошибок теория, ШУМЪ*.

# Э

**Эксперимент** см. раздел 2.1., раздел *СВЯЗИ, НЕОБХОДИМОСТЬ, СЛУЧАЙНОСТЬ* и статью *Опыт* (*ОПЫТЫВАТЬ*).

**Экспоненциальная кривая** - *график показательной функции*.

**Экспоненциальная функция**, *показательная функция* (< *лат.* exponens, род. падеж exponentis - показывающий) - *функция* $y=e^x$; *обозначается* также $y=exp(x)$. Иногда экспоненциальной функцией называют и функцию $y=a^x$ при любом основании $a>0$. *Термин* "экспоненциальная функция" ввёл Г.Лейбниц (*Leibniz Gottfried Wilhelm*; 1646-1716). Экспонента и всё, что ею описывается, естественно для нашего четырёхмерного пространства-времени. Экспонента описывает преимущественно *динамические процессы*.

*Формула* Л.Эйлера (*Leonhard Euler*; 1707-1783) для *определения* усилия матроса при швартовке судна:

$$F=fe^{-k\alpha}, \tag{1.285}$$

где $F$ - *сила*, создаваемая судном при швартовке, $f$ - усилие, приложенное матросом к канату, навитому на кнехт или сваю, $k$ - *коэффициент* трения, $\alpha$ - угол навивания (*отношение* длины дуги, охваченной верёвкой к радиусу этой дуги).

Гипсометрический закон Лапласа (*P.S.Laplace*; 1749-1827) (барометрическая формула):

$$p=p_0\exp(-Mgh/RT), \tag{1.286}$$

где $p_0$ - давление у поверхности планеты, $p$ - давление на высоте $h$, $g$ - ускорение силы тяжести вблизи поверхности планеты, $M$ - относительная молекулярная масса газа, $R$ - универсальная газовая постоянная, $R$=8,31441 Дж/(моль·К), $T$ - температура по шкале Кельвина (выражение под знаком экспоненты - безразмерная величина).

Распределение твёрдых частиц по высоте в неподвижной газовой среде, в которой частицы подвержены действию силы тяжести и ударам хаотически движущихся молекул газа, описывается формулой, выведенной А.Эйнштейном (1879-1955) и Смолуховским и подтверждённой Перреном:

$$n = n_0 V(\rho_т-\rho)gh\cdot exp(-N_A/RT), \qquad (1.287)$$

где $n_0$ - число частиц в единице объёма на нулевом уровне, $n$ - то же на высоте $h$, $V$ - объём частицы, $\rho_т$ - плотность дисперсной фазы, $\rho$ - плотность дисперсионной среды, в которой частица витает, $g$ - ускорение силы тяжести, $N_A$ - число Авогадро, $N_A$=6,022·$10^{23}$, $R$ - универсальная газовая постоянная, $R$=8,31441 Дж/(моль·К), $T$ - абсолютная температура, К. Формула Эйнштейна-Смолуховского аналогична гипсометрическому закону Лапласа (1.286).

Радиоактивный распад:

$$N=N_0 \exp(-\lambda\tau), \qquad (1.288)$$

где $N_0$ - *количество* ядер в данном объёме вещества в *момент* времени $\tau$=0, $N$ - количество ядер в том же объёме в момент времени $\tau$, $\lambda$ - постоянная распада.

*Параметрическая* концентрация трассера в проточном аппарате, к которому применима *модель идеального* смешения, описывается экспоненциальными *зависимостями*:

$$C=\exp(-\theta) \qquad (1.289)$$

и

$$F=1-\exp(-\theta). \qquad (1.290)$$

*Формула* ячеечной модели в *интегральном* виде также включает в себя экспоненту:

$$C = \frac{n^n}{(n-1)!}\cdot\theta^{n-1}\exp(-n\theta), \qquad (1.291)$$

где $C=c/c_0$ - *параметрическая* концентрация трассера, $\theta=\tau/\bar{\tau}$ - параметрическое время.

Скорость исчезновения вещества $A$ в реакции первого порядка описывается экспонентой:

$$\ln\frac{c_A}{c_{A,0}} = -k_A\tau, \qquad (1.292)$$

или

$$c_A=c_{A,0}\exp(-k\tau), \qquad (1.293)$$

где $k_A$ - *константа* скорости химической реакции по реагенту $A$.

Уравнение Аррениуса (*S. Arrhenius*; 1859-1927) описывает *зависимость* константы скорости химической реакции от температуры $T$:

$$k_A = A \cdot \exp\left(-\frac{E}{RT}\right), \tag{1.294}$$

где $E$ - энергия активации химической реакции, $A$ - предэкспоненциальный множитель.

Константа химического равновесия в случае реакции *идеальных* газов изменяется с температурой по *закону*:

$$K_p = \exp\left(-\frac{\Delta G^0}{RT}\right), \tag{1.295}$$

где $\Delta G^0$ - изменение *стандартного* изобарного потенциала. В этом случае экспонента описывает состояние термодинамического равновесия.

Следующее, очень похожее уравнение Андраде (1887-1971) описывает зависимость динамического коэффициента вязкости, $\mu$, газов и жидкостей от температуры, $T$:

$$\mu = \exp\left(A + \frac{B}{T+C}\right), \tag{1.296}$$

где $A$ - *натуральный логарифм* предэкспоненциального множителя, $C$ - формальный *параметр*. Уравнение (1.296) характеризует влияние температуры на *динамику* межмолекулярного взаимодействия.

*Аналогичное* уравнение Антуана описывает зависимость давления насыщенных паров жидкости, $p$, от температуры, $T$:

$$p = \exp\left(A + \frac{B}{T+C}\right), \tag{1.297}$$

Здесь экспонента характеризует состояние динамического равновесия молекул вещества, переходящих через границу раздела фаз в обоих направлениях. Уравнение Антуана является *эмпирическим* уравнением, оно более точное, чем его теоретическая *форма*:

$$p = \exp\left(A - \frac{\Delta H}{RT}\right), \tag{1.298}$$

получаемая из уравнения Клапейрона-Клаузиуса при допущениях, что для паровой фазы справедливо уравнение состояния *идеальных* газов, а давление $p$ достаточно удалено от *критического*.

*Распределение вероятностей случайной величины X* называется *нормальным*, если оно имеет *плотность вероятностей*:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi б_x^2}} e^{-(x-M_x)^2/2б_x^2}, \qquad (1.299)$$

где $M_x$ - *математическое ожидание* случайной величины X, $б^2{}_x$ - *генеральная дисперсия*. В этом случае экспонента отражает хаос и динамичность *множества причинно-следственных связей*.

Напряжение после прекращения деформации мучного теста уменьшается по *закону* экспоненты:

$$б_{рел}=\exp(-\tau/\lambda), \qquad (1.300)$$

где $\lambda$ - постоянная времени *экспоненциального* ослабления напряжения при неизменной деформации (время релаксации полимеров).

*Степень* минерализации породы может убывать по экспоненциальному *закону* в *зависимости* от расстояния до источника минерализации. Такая же экспоненциальная зависимость существует между размерами переносимых частиц осадка и скоростью потока.

Экспоненциальная зависимость характерна для законов охлаждения тел, колебания маятника, колебательных *явлений* в радиоконтуре, сохранения электрического заряда, формулы Циолковского для скорости ракеты, роста клеток и др. [8, 14]. Например, процессы органического роста:

$$m(\tau)=m_0\exp(c\tau), \qquad (1.301)$$

где $m_0$ - начальная масса органического вещества, $c$ - постоянная роста [8]; процессы распада:

$$m(\tau)=m_0\exp(\lambda\tau), \qquad (1.302)$$

где $m_0$ - начальная масса, $\lambda$ - постоянная распада [8]; затухающие колебания:

$$f(\tau)=\exp(-k\tau)\sin(\omega\tau+\varphi), \qquad (1.303)$$

где $\varphi$ - смещение по фазе, $\omega$ - круговая (циклическая) частота (число колебаний за $2\pi$ секунд) [8].

Если в формулу нормального распределения (1.121), (1.193), (1.225), (1.299), (2.20) подставить вместо $x$ *логарифм* диаметра (радиуса) частиц дисперсной фазы, то получится *логарифмически нормальное распределение*, или логнормальное распределение:

$$p(\ln d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot exp\left(-\frac{(\ln d - M_{\ln d})^2}{2\sigma^2}\right), \qquad (1.304)$$

В середине XX в. Разумовский Н.К. отмечал, что на основании результатов многих исследований "вырисовывается весьма важный факт – участие логарифмически нормального закона во всех тех случаях, где мы имеем дело с частицами вещества, индивидуализирующимися в пространстве тем или иным способом, будь то механическое дробление и химическое выпадение или сегрегация одного соединения среди других, ему подобных (как, например, в горных породах)". Этот факт отражается в формулах Мартина, Вейнига, Андреасена, Розина-Раммлера, Гриффитса (см. ниже в принятых автором обозначениях) и др. А наиболее ясно наличие логарифмически нормального закона при распределении частиц констатировано Ловеландом (*P.P. Loveland*) и Травелли (*A.P.H. Travelli*), Хэчем (*T. Hatch*) и Четом (*S.P.Choate*).

Формула Мартина (*G.Martin*) плотности распределения частиц горных пород в результате измельчения по диаметрам [38]:

$$p(d) = \frac{100}{n} \cdot \frac{\Delta n}{\Delta d} = Ce^{-bd}, \qquad (1.305)$$

где $\Delta n/\Delta d$ – частота наблюдения частиц кварцевого песка с диаметром в интервале $\Delta d$, отнесённая к величине этого интервала; $n$ – общее число частиц в пробе; $C$ и $b$ – *константы*, определяемые в результате анализа результатов эксперимента, $d$ – диаметр частицы.

Формула Вейнига (*A.J. Weinig*) плотности распределения частиц горных пород в результате измельчения по диаметрам [38]:

$$p(d) = Bd^{3-b} exp(-a^2 d^2), \qquad (1.306)$$

где $a$, $B$ и $b$ – константы, определяемые в результате анализа результатов эксперимента.

Формула Андреасена (*A.H.M. Andreasen*) плотности распределения массы продуктов помола по диаметрам [38]:

$$p(d) = Bd^3 e^{-bd}, \qquad (1.307)$$

где $B$ и $b$ – константы, определяемые в результате анализа результатов эксперимента.

Формула Розина-Раммлера (*E. Rammler, P. Rosin*) плотности распределения массы продуктов помола по диаметрам, в частности, цементного клинкера [38]:

$$p(d) = 100abd^{a-1}e^{-b^{a}}, \qquad (1.308)$$

где $a$ и $b$ - константы, определяемые в результате анализа результатов эксперимента.

Формула Гриффитса (*L.A. Griffith*) плотности распределения массы диспергированного материала по диаметрам частиц [38]:

$$p(d) = Be^{-a/d}d^{-c}, \qquad (1.309)$$

где $a$, $B$ и $b$ - константы, определяемые в результате анализа результатов эксперимента, причём $0<c<2$. При выводе этого уравнения Гриффитс сделал предположение, что распределение количества молекул в частицах в зависимости от размеров последних аналогично распределению молекул идеального газа по их энергии.

В достаточной степени интересен и важен закон забывания Г.Эббингауза (1885):

$$\Pi(\tau)=\Pi_д+\Pi_к(\tau)=\Pi_д+(100-\Pi_д)\exp\left(-\frac{\tau}{\tau_з}\right), \qquad (1.310)$$

где $\Pi(\tau)$ - *информация* в памяти обучаемого как функция времени после её однократного предъявления, $\Pi_д$ - объём долговременной памяти, $\Pi_к(\tau)$ - объём кратковременной памяти, $\tau_з$ - постоянная времени забывания, константа, $\tau_з$=9 час, $\tau$ - время, час.

Очевидно, что экспонента описывает **динамические процессы**, протекающие в природе, обществе и мышлении.

**Экспоненциальное распределение** - см. *Показательное распределение*.

**Экстремум** ( <*лат.* extremum - край, конец; extremus - крайний, конечный, критический; высший, величайший, т.е. **лучший** или **худший**) - наибольшее и наименьшее значения *функции*; в *математику* было введено для объединения *понятий максимума* и *минимума*. Точнее, *непрерывная* в точке $x_0$ функция $f(x)$ имеет в $x_0$ максимум (*локальный* максимум) или минимум (локальный минимум), если существует окрестность $(x_0-\Delta x)$ - $(x_0+\Delta x)$ этой точки, содержащаяся в области *определения* функции $f(x)$, такая, что во всех точках этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0)\geqslant f(x)$ (соответственно $f(x_0)\leqslant f(x)$). Если при этом существует такая окрестность, что в ней $f(x_0)>f(x)$ (или $f(x_0)<f(x)$) при $x_0\neq x$, то говорят о строгом локальном максимуме (или

строгом локальном минимуме), в противном случае - о нестрогом локальном максимуме (или нестрогом локальном минимуме). Если функция имеет несколько эстремумов на заданном отрезке, то наибольший локальный максимум (наименьший локальный минимум) называется глобальным максимумом (минимумом) функции $f(x)$ на этом отрезке.

Экстремум функции не следует смешивать с наибольшим и наименьшим значениями функции. *Необходимым* условием экстремума функции $f(x)$ в некоторой точке $x_0$ является непрерывность функции в $x_0$ и чтобы либо $f'(x_0)=0$, либо $f'(x_0)$ не существовала. К достаточным условиям экстремума относятся: перемена знака первой *производной* при переходе через точку $x_0$ (если в некоторой окрестности точки $x_0$ производная $f'(x)$ слева от $x_0$ положительна, а справа отрицательна, то $f(x)$ имеет в $x_0$ максимум; если $f'(x)$ слева от $x_0$ отрицательна, а справа положительна, то - минимум. Если $f'(x)$ не меняет знака при переходе через точку $x_0$, то функция $f(x)$ не имеет экстремума в точке $x_0$. Если $f(x)$ в точке $x_0$ имеет $n$ последовательных производных, причём $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, а $f^{(n)}(x_0)\neq0$, то при $n$ нечётном $f(x)$ не имеет экстремума в точке $x_0$. При $n$ чётном имеет минимум, если $f^{(n)}(x_0)>0$, и максимум, если $f^{(n)}(x_0)<0$.

Аналогично экстремума функции одной *переменной* определяется экстремум функции многих переменных, только в этом случае говорят о частных производных.

**Эксцесса коэффициент**, **эксцесс** (< *лат.* excessus - уход, выход, уклонение, отступление) - *скалярная* характеристика островершинности *графика плотности вероятности* унимодального *распределения*, которую используют в качестве некоторой *меры* отклонения рассматриваемого распределения от *нормального*. *Коэффициент* эксцесса $E_x$ *определяется* по *формуле*:

$$E_x=\frac{\mu_4}{(\mu_2)^2}-3, \qquad (1.311)$$

где $\mu_2$ и $\mu_4$ - центральные *моменты выборочного распределения* второго и четвёртого порядка соответственно. Для нормального распределения коэффициент эксцесса $E_x=0$; случай $E_x>0$ соответствует, как правило, тому, что график плотности рассматриваемого распределения в окрестности *моды* имеет более острую и более высокую вершину, чем нормальная *кривая*. Случай $E_x<0$ соответствует отрицательному эксцессу, при этом плотность вероятности имеет в окрестности моды более низкую и плоскую вершину, чем плотность нормального *закона* (рис.1.52).

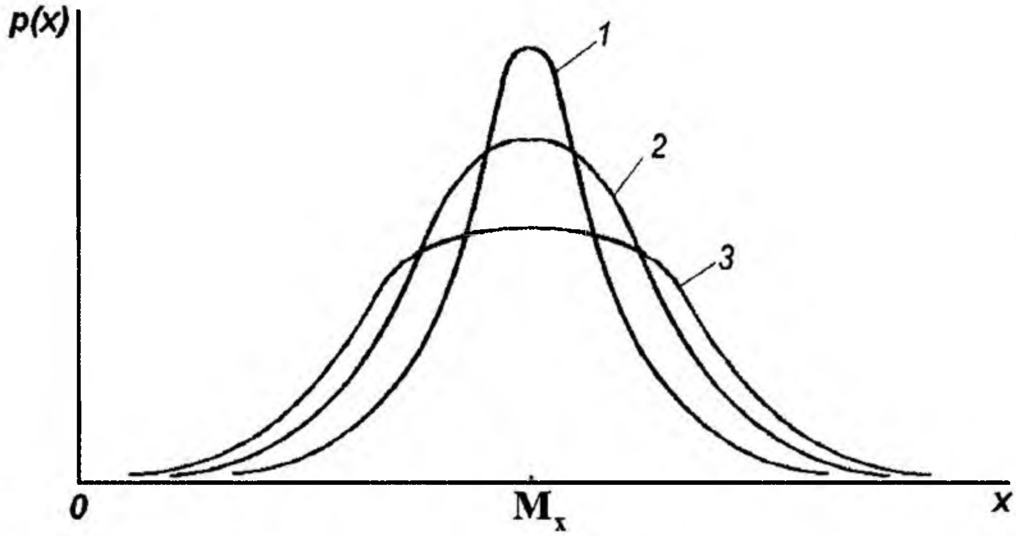



Рис.1.52. Плотности вероятностей симметричных распределений:
1 - островершинное распределение; 2 - нормальное распределение;
3 - плосковершинное распределение
(площадь под каждой кривой плотности вероятностей равна 1)

В *формуле* (1.311) *число* 3 вычитается потому, что для распределения К.Гаусса *отношение* $\mu_4/(\mu_2)^2=3$, следовательно, для нормального распределения $E_x=0$. Поэтому, если выборочный коэффициент эксцесса существенно отличается от нуля, следует признать, что распределение *случайной величины* исследуемого распределения отлично от нормального. См. также рис.1.34.

**Элементы** *системы* (< *лат.* elementum - первичная материя, первоначало, возникновение; семантич. *греч.* **στοιχεῖον** - первая и самая простая часть чего-либо, основание, начало, ***элемент***) - составные части сложного целого. Элементы системы отличаются двумя особенностями - они находятся во взаимодействии друг с другом и с внешним миром.

**Эмпиризм** (< *греч.* **ἐμπειρία** - опытность, опыт, знание приобретённое опытом) - философское учение, признающее чувственный *опыт* единственным источником наших представлений, идей, *понятий*, знаний.

**Эмпирическая функция распределения** (< *греч.* ἐμπειρία - опытность, опыт, знание, приобретённое опытом) - *функция распределения случайной величины*, полученная по *результатам наблюдений*.

См. также *Распределение вероятностей случайной величины, Распределения закон, Распределения функция случайной величины X, РАСПРЕДЕЛЯТЬ, Эмпирическое распределение.*

**Эмпирическое распределение, выборочное распределение** (< *греч.* ἐμπειρία - опытность, опыт, знание, приобретённое опытом) - *распределение вероятностей случайной величины* X, которое *определяется* по *выборке* для *оценки* неизвестного *истинного* распределения. Исследование эмпирического распределения *неизбежно связано* с определением оценки *математического ожидания* и *дисперсии* выборочного распределения.

Следует различать дисперсию *эмпирического распределения* (дисперсию выборочного распределения) и *дисперсию воспроизводимости* (опытную дисперсию). Для определения дисперсии воспроизводимости осуществляют так называемые *параллельные опыты* и оценку математического ожидания, как правило, производят по формуле среднего арифметического. При этом предполагают (при необходимости проверяют), что ошибки измерения физических величин подчиняются закону нормального распределения. В случае эмпирического распределения параллельные опыты имеют второстепенное значение и производятся для отладки методики конкретных *наблюдений, экспериментов*. Главная задача исследования эмпирического распределения - сделать *представительную выборку* из *совокупности*. Если эмпирическое распределение *асимметрично*, то возникает достаточно серьёзная проблема выбора центра распределения. Центром *распределения* могут быть *медиана, мода, начальный* момент первого порядка, *арифметическое среднее, арифметическое взвешенное среднее, взвешенное степенное среднее, гармоническое среднее, геометрическое среднее, среднее квадратичное, среднее кубическое, арифметико-геометрическое среднее* и др. параметры. Другими словами, дисперсия выборочного распределения характеризует *вариацию* признака относительно *среднего значения выборки* - параметра, определяемого *сущностью* задачи и *концепцией* исследователя.

Эмпирическое распределение является *статистическим аналогом истинного* распределения вероятностей. Дело в том, что все *результаты наблюдений* - результаты научных *экспериментов*, результаты работы технологических установок, результаты наблюдений и вообще все *данные* о *процессах*, происходящих в природе и обществе, являются *выборками* из *совокупности*, и в результате *обработки* данных можно получить лишь только **оценки** тех или иных *параметров*. Кроме этого, надёжность оценки зависит от точности *измерений*, методики экспериментальной работы, *ошибок* в процессе любой практической деятельности, эмоционального состояния исследователя и многих других *причин*. Не боясь впасть в преувеличение, можно утверждать, что потребность человека найти **истину** по результатам скудных данных человеческой практики в значительной *степени* обусловила развитие мощного *математического* аппарата *вероятностей теории* и *статистики математической*.

*Необходимо* также отметить, что в большинстве случаев собственно **ошибки** измерения подчиняются *закону нормального распределения*.

Пусть результаты наблюдений $X_1$, $X_2, \ldots, X_n$ объёма $n$ - взаимно *независимые* и одинаково распределённые *случайные величины* с *функцией* распределения $F(x)$ и пусть $X_1<X_2<\ldots<X_n$ - соответствующий *вариационный ряд*. При этом каждому значению $X_i$ соответствует *вероятность* наблюдения $1/n$, а если какие-либо $j$ из $X_i$ совпадают между собой (что для *измеряемых физических величин* практически *невозможное событие*), то их общему значению приписывается вероятность $j/n$ (при большом числе наблюдений $n$ эмпирическое распределение задаётся с помощью *частот* $h_j=n_j/n$, $j=1, 2, \ldots, k$, где $k$ - *число* групп, на которые разбивается вся совокупность наблюдений $X_i$, а $n_j$ - число значений $X_i$ в $j$-й группе). Эмпирическим распределением, соответствующим случайной выборке $X_1$, $X_2, \ldots, X_n$, называется *дискретное* распределение, приписывающее каждому значению $X_i$ вероятность $1/n$. Функция эмпирического распределения $F_n(x)$, называемая *эмпирической функцией распределения*, является ступенчатой функцией со скачками, кратными $1/n$, в точках, определяемых величинами $X_1$, $X_2, \ldots, X_n$, если все они различны:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant X_1 \\ \nu(X_1, X_2, \ldots, X_n : x)/n, \\ 1, & x > X_n \end{cases} \tag{1.312}$$

$$X_i < x \leqslant X_{i+1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1;$$

где $\nu(X_1, X_2, \ldots, X_n : x)$ - число $X_i$ меньших $x$. При каждом фиксированном действительном значении $x$ эмпирическая функция распределения $F_n(x)$ является случайной величиной. Если случайные величины $X_1$, $X_2, \ldots, X_n$ принимают значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то $F_n(x)$ как функция $x$ обладает всеми *свойствами* обычной функции распределения. Таким образом, эмпирическое распределение, соответствующее выборке $X_1$, $X_2, \ldots, X_n$, задаётся семейством случайных величин $F_n(x)$, зависящих от действительного значения $x$. При этом для фиксированного $x$:

$$\mathbf{E}F_n(x)=F(x); \quad \mathbf{D}F_n(x)=\frac{1}{n}F(x)[1-F(x)]; \tag{1.313}$$

$$\mathrm{P}\left\{F_n(x)=\frac{i}{n}\right\} = C_n^i [F(x)^i F(x)]^{n-i}. \tag{1.314}$$

В соответствии с *больших чисел законом* $F_n(x) \to F(x)$, $n \to \infty$, при каждом $x$. Это означает, что $F_n(x)$ - *несмещённая* и *состоятельная* оценка *функции* распределения $F(x)$. Эмпирическое распределение является основой для вычисления *выборочных* или *эмпирических моментов* - *начальных*:

$$m_\beta = \int_{-\infty}^{+\infty} x^\beta p(x)\,dx, \qquad (1.315)$$

и *центральных*:

$$\mu_\beta = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_x)^\beta p(x)\,dx. \qquad (1.316)$$

Например, *выборочное среднее*:

$$m_1 \approx \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad (1.317)$$

*выборочная дисперсия* (*смещённая* оценка *генеральной* дисперсии $б^2{}_x$):

$$\mu_2 \approx s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2, \qquad (1.318)$$

(сравните с (1.245)), *выборочная дисперсия* (несмещённая оценка генеральной дисперсии $б^2{}_x$):

$$\mu_2 \approx s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2. \qquad (1.319)$$

Выборочные *моменты* являются статистическими оценками соответствующих характеристик исходного распределения. Кроме этого, поскольку выборочные моменты полностью характеризуют распределение, они могут быть использованы для сравнения разных эмпирических распределений без сравнения соответствующих *кривых*.

В заключение необходимо отметить, что эмпирическое распределение формируют внутренние причины *явления*, а не *больших чисел закон*. Большое число *наблюдений* - условие для того, чтобы *случайные* отклонения $n_i/n$ от $p_i$ погашались.

См. также *Воспроизводимость, РАСПРЕДЕЛЯТЬ.*

**Эффект** - *стар.* ефект < *нем.* Effekt < *лат.* effectus - исполнение, осуществление, действие, эффект, воздействие, влияние, *результат* (*М.Фасмер*; 1886-1962. [100]).

**Эффективная статистическая оценка** (< *лат.* effectivus - творческий, действенный, созидательный) - *оценка*, обладающая наименьшей *дисперсией* среди нескольких оценок одного и того же *параметра*.

См. также *Статистическая оценка*.

**Эффективность оценки** - *свойство оценки* иметь больший или меньший *доверительный интервал*. Оценка *параметра* называется эффективной, если среди нескольких оценок того же параметра она обладает наименьшей *дисперсией*. Если *ошибки измерений физических величин* подчинены *закону нормального распределения*, то *среднее арифметическое* обладает наименьшей дисперсией.

См. также *Квадратичное отклонение, Параллельные измерения, Стандартное отклонение*.

# Я

"***Явить***, **являть**, ***являвать*** что, казать, оказывать, показывать, делать явнымъ, виднымъ, ставить на видъ; изъявлять, проявлять, выявлять; предъявлять, представлять. (...) **Являться**, быть явлену; || появляться, проявляться, оказываться, открываться, обнаруживаться как-бы собою; || представляться, по службе, начальнику. (...) || **Явленье** ср. действiе и состоянье по гл. *явить*, -ся. (...) || *Явление природы*, всякая внезапная, нежданная, необычайная перемена, случай, оказательство, событiе, и вообще, всякая видимая перемена. (...)" (*В.И.Даль*; 1801-1872), [83].

См. также *СОБЫТИЕ, событность, Событие*.

"Действительность заключена в явлениях."
(*Демокрит*; 460/470-360/370 г. до Р.Х.).

**Явление** - философская *категория*, отражающая всеобщие *формы* реальности, и её познание человеком. От *совокупности свойств*, *определяющих* особенность *объекта*, явления, *процесса* или класса объектов, явлений, процессов, зависят, кроме всего прочего, их изменчивые *состояния* и формы явлений. Явление - то или иное обнаружение (выражение) объекта, внешней формы его существования. Явление - универсальная объективная характеристика предметного мира; в процессе познания *сущность* и явление выступают как ступени постижения объекта. Категории "сущность" и "явление" всегда неразрывно *связаны*: явление представляет собой форму проявления сущности, последняя раскрывается в явлении. Явление богаче сущности, ибо оно включает в себя не только обнаружение внутреннего содержания объекта, взаимодействия *элементов системы* между собой и с внешним миром, но и всевозможные *случайные отношения*, *стохастическое* взаимодействие элементов системы между собой и внешним миром. Явления *динамичны*, изменчивы, случайны, в то время как сущность образует нечто, *диалектически* сохраняющееся во всех изменениях.

См. также, *Сущность*, *Явить*, *являть*, *являвать*.

# 2. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

## 2.1. События, наблюдения, эксперименты

"События большого значения часто возникают из пустяковых обстоятельств". (*Тит Ливий*; 59 до Р.Х.- 17 после Р.Х.).

**Событие** - то, что произошло, то или иное **уникальное** *явление*, *случившийся* факт. *Событие* становится *достоверным*, если в *данном* конкретном сочетании *факторов* оно *необходимо* осуществляется. Событие рассматривается *случайным*, если оно может осуществиться, а может и не осуществиться. Изолированных событий в природе нет, все события осуществляются или не осуществляются в той или иной *определённой системе* событий. Событие может быть *причиной*, может быть *следствием*, но "Следует всегда помнить, что мы не можем управлять событиями, а должны прилаживаться к ним" (*Эпиктет*; 50-138). Событие как явление окружающего нас мира может пройти незамеченным, а может быть целью. В последнем случае можно говорить о событии как *результате наблюдения*.

"Наблюдения - это история естественных наук." (*Шарль Луи Монтескье*; 1689-1755).

**Наблюдение** (*лат.* observatio) - *метод* исследования предметов и *явлений* реальности в том виде, в каком они существуют и происходят в природе и обществе. Наблюдение отличается от простого восприятия *информации* наличием цели и активной позицией наблюдателя. Наблюдение отличается и от *эксперимента* отсутствием активного управляющего воздействия на явление или *процесс*. Наблюдение - это *фиксация* характерных признаков предмета или развития явления в пространстве и/или во времени. Ярким примером является древнейшая наука - астрономия. Можно также упомянуть наблюдателей на выборах, экологов, социологов, археологов, историков и т.д.

"Эксперимент - истинный посредник между человеком и природой". (*Леонардо да Винчи*; 1452-1519).

**Эксперимент** (<*лат.* experimentum - проба, законченный опыт, практика, основанное на опытах доказательство) - (1) научно поставленный лабораторный или промышленный *опыт*, *наблюдение* исследуемого *процесса* в фиксируемых условиях; возможность многократного воспроизводства процесса в требуемых или повторяющихся условиях; (2) опыт вообще, попытка осуществить чего-либо. Нередко главной задачей *эксперимента* является проверка *гипотез* и предсказаний *теории*, имеющих принципиальное значение. В этом случае эксперимент выполняет *функцию критерия истинности* научного познания в целом.

Экспериментальный *метод* исследования возник в естествознании нового времени (Уильям Гильберт (1544-1603), Галилео Галилей (*Galilei Galilio*; 1564-1642)). Первую классификацию эксперимента разработал Фрэнсис Бэкон (1561-1626). Основы *статистического* метода *анализа* наблюдений были заложены К.Гауссом (*Gauss Carl Friedrich*; 1777-1855) - в 1794-95 г. он открыл и в 1821-23 г. разработал первый *математический* метод *обработки неравноценных* опытных *данных* - метод наименьших квадратов, широко применяемый и по сей день.

"Экспериментатор, чтобы быть достойным этого имени, должен быть одновременно и теоретиком, и практиком". (*Клод Бернар*; 1813-1878).

Рассмотрим подробнее современное *понимание эксперимента* и его *результатов*. Лабораторный или промышленный эксперимент - это строгая последовательность заранее обусловленных действий, ведущих к *определению* одной или *множества величин*, представляющих результаты эксперимента. *Независимо* от точности соблюдения условий проведения эксперимента результаты повторных экспериментов, в общем случае, будут различны. *Причинами* отсутствия *абсолютной воспроизводимости* следует считать ограниченную точность определений, *измерений*, *анализов* и т.п., а иногда и внутреннюю природу исследуемого *явления*. Следовательно, для каждой величины *возможные* результаты будут лежать в некоторой ограниченной области. Множество этих областей для всех величин, составляющих результат эксперимента, образует *выборочное* пространство этого эксперимента. Например, при поиске *функциональной связи* $y=f(x)$ говорят о *корреляционном поле* $y$-$x$, а конкретные численные значения $y$ называют *случайными величинами*.

## 2.2. Результаты наблюдений и экспериментов

Результаты *наблюдений* и *экспериментов* в науке, технике и технологии, и вообще, результаты измерений любых *физических величин* - *случайные величины*. Это обусловлено ограниченной точностью измерительных приборов, *ошибками* обусловленными несовершенством органов чувств человека, ошибками грубыми, систематическими (методическими) и случайными (см. *Ошибка, Ошибок теория*). Кто виноват и что делать? Опытные экспериментаторы достаточно успешно выявляют мешающие *детерминистические факторы* и учитывают их. В азартных играх результаты либо целые числа, либо взаимоисключающие исходы и из всего богатства мешающих факторов остаются случайные. Они тоже детерминистические по существу, но их *множество*, и, что немаловажно, они все соизмеримы по силе или интенсивности (только у шулеров всегда наготове несколько значимых (весомых, существенных) приёмов (факторов).

Простейший пример - игральная кость со смещённым центром тяжести. Смещенние центра тяжести - **весомый фактор** буквально. По этому поводу определения фактического распределения выпадающих очков см. комментарий И.Ньютона (1643-1727) на с.51. О проблемах проведения наблюдений и экспериментов и их анализа задумывались всегда и все учёные. В частности, см. рассуждения П. Лапласа (1749-1827) на с.300 и рассуждения Якоба Бернулли (1654-1705) на с.32. См. также с.26 и в статье "**Распределение** *вероятностей случайной величины*" соответствующие рассуждения на с.188.

**Случайная величина** - *величина*, значение которой *невозможно* предсказать исходя из условий эксперимента или наблюдений. Результаты *измерений физических* величин по существу случайные величины. Случайные величины могут изменяться *непрерывно* (*температура, давление, концентрация*, радиус *частиц дисперсной фазы*) или *дискретно* (*число* "очков" в азартной игре, число частиц, число дефектов, число отказов, аварийность). Например, если представляет интерес *количество* монет, всё ещё находящихся в обращении, как *функция* их возраста, то можно реализовать два подхода к решению этой *проблемы*. Если в качестве случайной величины использовать год чеканки монеты, т.е. $X$=..., 1999, 2000, 2001, 2002, 2003, ..., то *анализировать* придётся дискретные случайные величины, а если массу монеты, то непрерывные случайные величины. Между непрерывными и дискретными случайными величинами есть существенное отличие - равенство первых невозможно, вторых - возможно. Невозможность равенства непрерывных случайных величин обусловлена ограниченной точностью *измерения* физических величин и возможностью её повышения и/или ограниченной точностью *математической обработки данных*.

См. также *Случай, Случайное событие, Эмпирическое распределение*.

## 2.3. Вероятности событий

"Весьма вероятно наступление невероятного". (*Агафон*; V-IV в. до Р.Х.).

Каждый из нас имеет интуитивное представление о *достоверных* и *невозможных событиях*, а также о *вероятностях* осуществления возможных. Мы *абсолютно* уверены в том, что подброшенная монета не взлетит, а упадёт на землю, только не знаем, какой стороной. В ветреный день, не будучи уверенными в судьбе бумажных купюр, расплачиваясь за товар на ярмарке, мы передаём их из рук в руки. И в то же время уверены, что от тех же порывов ветра монеты не разлетятся. Каждый из нас, посмотрев на небо, решает, брать ли с собой зонт, - наш прогноз не всегда бывает удачным. Небольшая *ошибка* вождения автомобиля на дороге может очень дорого обойтись и в буквальном, и в переносном смысле... Для *оценки* вероятности события в повседневной жизни мы обычно пользуемся словами "невозможно", "возможно", "вполне возможно", "вероятно", "мало вероятно", "очень вероятно" и т.п. Оперируя вышеприведёнными *субъективными* оценками вероятности событий или успеха, мы не чувствуем при этом какого-либо дискомфорта. Достаточно часто наша субъективная оценка вероятности того или иного события не совпадает с мнением других людей, иногда даже противоречит им. Кроме этого, в жизни мы достаточно редко пытаемся оценить вероятность события или успеха при принятии решения в процентах. И ещё реже прикладываем к этому *теорию* вероятностей. По этим *причинам* (и не только...) в науке и технике принято выражать вероятность события числами от 0 до 1 или эквивалентным *числом* процентов от 0 до 100%, а для уточнения так называемых "проблематических" *суждений* служит *вероятность математическая*.

Прежде чем переходить к *математическому* обоснованию *вероятности*, необходимо отметить, что для исследователя в большинстве случаев практический интерес представляют крайности: *достоверность - невозможность (события)*, *причина - следствие* (*о связях*), динамика - статика (о *системе*), *детерминированность - стохастичность (процесса)*, *максимум - минимум (функции)*, *адекватность* - неадекватность (*модели*), принятие - отклонение (*гипотезы*), *значимость* - незначимость (*параметра*), интерполяция - экстраполяция и т.д. При ближайшем рассмотрении оказывается, что в социальных *отношениях* аналогично: верность - измена, *истина* - ложь, выдержка - срыв, постоянство - временность, естественность - искусственность (поведения), лидер - исполнитель и т.п. И вообще: выигрыш - проигрыш, законный - незаконный, девичество - замужество, состоятельность - несостоятельность, счастье - несчастье, подлинность - фальшивость, победа - поражение, преступление - наказание, реальный - вымышленный и т.д.*

В соответствии с этими (и другими) крайними *оценками вероятностей*: успех - 1 и неудача - 0 (провал) человек принимает решения. В более или менее важных ситуациях человеку свойственно принимать

---

*Примечание 16. Слова эти - оттиски с событий, **для которых** они. События первичны, и они значительно богаче, ибо имеют **степени своей событийности** в отличие от "Да" и "Нет", для которых, по определению, отсутствует градационность. Посмотрим, интереса ради, на степени состояния души человека, определяемые словами:

Апатия
Безучастие Равнодушие
Спокойствие Удовлетворение
Беспокойство Удивление
Возбуждение Любопытство
Недовольство Интерес
Огорчение Весёлость
Раздражение Радость
Уныние Ликование
Страдание Восторг
Отчаяние Восхищение
Ожесточение Наслаждение
Исступление Блаженство
Истерия Упоение
Бешенство Экстаз
Ярость Страсть
Аффект

Вне всякого сомнения приведённая здесь схема не бесспорна, но достаточно очевидно, что в русском языке градации состояния души человека характеризуются с достаточно высокой точностью. В принятой, далеко не полной, выборке интервал составляет 1/32=0,0313. Точность оценки психотипа человека крайне важна для создания хорошей семьи и воспитания здоровых детей.

решения при достаточной уверенности их выполнимости. В малозначимых реалиях жизни обычный человек может принимать решения с вероятностью успеха 0,4÷0,2 и даже менее. Дефицит *информации* о каком-либо *процессе*, незнание причинно-следственных *связей* или их *множество* порождает суеверие, веру в чудо, удачу, надежду на счастливый случай (например, суеверны спортсмены, особенно автогонщики). Чем выше образованность человека, чем глубже *понимание* причинно-следственных связей в природе и обществе, тем меньше в его мировоззрении надежды на счастливый случай, тем взвешеннее его решения. Принять важное решение с вероятностью успеха порядка нескольких десятых и менее может только человек по психотипу **игрок**. Поскольку азартные игры неразрывно связаны с развитием цивилизации, значит в человеческом обществе есть и нужны люди, способные принимать решения на грани риска.*

"Вероятность - это придуманная нами величина, оценивающая возможность придуманного нами события". (*Виктор Кротов*; р. 1946).

**Вероятность** (*лат.* probabilitas - правдоподобие, вероятность) - *числовая* характеристика *степени возможности* наступления какого-либо *определённого события* в тех или иных определённых, могущих повториться неограниченное число раз условиях. Вероятность отражает особый тип *связей* между *явлениями*, характерных для массовых *процессов*. Обычно численное значение вероятности находится с помощью определения вероятности: вероятность равна *отношению* числа исходов, $n_1$,

---

*Примечание 17. В соответствии с предельно упрощённым определением ума как способности человека к выявлению причинно-следственных связей в природе, обществе и мышлении, его наличие необходимо и для успешной игры, во всех смыслах этого слова. Не следует думать, что во всех азартных играх присутствует такое множество причинно-следственных связей, что случайность приобретает преобладающее значение. Известно немало азартных игр, в которых имеют немаловажное значение способности игроков запоминать, генерировать и прогнозировать развитие событий, а также способности игроков к анализу мимики, жестов, комментариев и т.д. и т.п. См. также рассуждения Якоба Бернулли (1654-1705) на с.32.

При ближайшем рассмотрении оказывается, что наличие ума необходимо для детских игр и житейских, в более солидном возрасте. Да что там люди, животные и птицы тоже играют! Кстати, о птичках - никто и никогда не видел играющих кур, но неоднократно наблюдали ворон, играющих с блестящими предметами и катающихся зимой с горки... А если вспомнить деревенских дворняг и породистых овчарок, то первые играют достаточно редко, а вторые без игр с хозяином не могут нормально жить.

См. также примечание 6 на с.11 и примечание 11 на с.47.

"благоприятствующих" данному событию, к общему числу *равновозможных* исходов, $n$. *Связь* вероятности $p_i$ с *частотой события* $h_i = n_i/n$ достаточно сложна и зависит от общего числа испытаний $n$. Чем больше число $n$, тем реже встречаются сколько-либо значительные отклонения частоты $n_i/n$ от вероятности $p_i$. В соответствии с этим, отчасти неточным, *частотным* определением вероятности, вероятность осуществления события $B$ будет *пределом*:

$$P(B) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_i}{n}. \tag{2.1}$$

Таким образом, каждому событию $B$ соответствует некоторое неотрицательное число - его вероятность:

$$0 \leqslant P(B) \leqslant 1, \tag{2.2}$$

причём для *невозможного* события $P(H)=0$, для *достоверного* $P(D)=1$. В соответствии с этими *аксиомами* падение подброшенной монеты на землю является достоверным событием, её "взлёт" - невозможное событие, а вероятности выпадения "герба" или "решки" - по 1/2 соответственно (предполагается, что идеальная монета не имеет *флуктуаций* плотности по объёму, имеет одинаковую толщину и радиус и не может встать на ребро). Другими словами, *результат* падения монеты (и не только монеты...) - *случайная величина*.

См. также статьи *Вероятность классическая* (*априорная*), *Вероятность математическая*, *Вероятность статистическая* (*апостериорная*).

## 2.4. Распределение вероятностей случайной величины

Для *дискретных случайных величин* характерно то, что они могут принимать те или иные значения только в фиксированных *интервалах* и их значения в соседних интервалах скачкообразно изменяются (рис. 2.1). *Распределение вероятностей* называется дискретным, если случайная величина $X$ может принимать только **конкретные** *возможные* значения:

$$x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n,$$

которым соответствуют *вероятности* $P(X=x_i)$:

$$p_1,\ p_2, \ldots,\ p_n, \quad \text{причём } p_i > 0;\ \Sigma p_i = 1.$$

*График* следует понимать так: вероятность того, что случайная величина $X$ примет значение $x_1$ равна $p_1$; вероятность того, что случайная величина $X$ примет значение $x_2$ равна $p_2$; вероятность того,

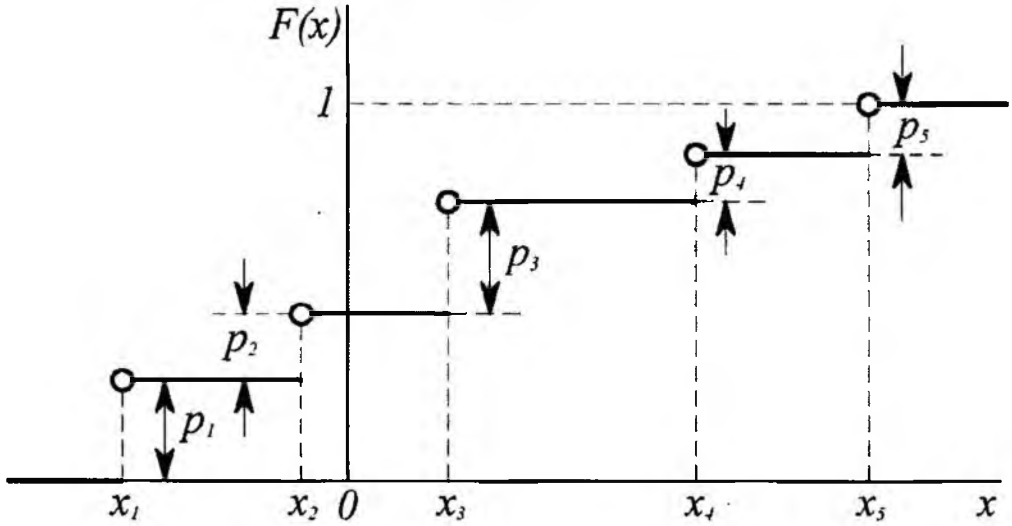



Рис. 2.1. Функция распределения дискретной случайной величины

что случайная величина $X$ примет значение $x_1$ или $x_2$ равна $p_1+p_2$ и т.д. Вероятность того, что случайная величина $X$ примет любое значение $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ или $x_5$ равна 1, это достоверное событие.

Наиболее простым примером дискретной *системы* является система целых чисел 1, 2, 3,..., ∞ (в отличие от системы действительных чисел, которая является *непрерывной*). Значения дискретных случайных величин *определяются* с *абсолютной* точностью. Другими словами, *результат события* однозначен. Например, исход бросания *идеальной* монеты - "герб" или "решка"; исход бросания идеальной игральной кости, *число* "очков", - целое число от единицы до шести, исход бросания двух игральных костей - целое число от двух до двенадцати. Дело в том, что древние изобретатели игр продумали содержание игр так, чтобы исходы игр трактовались участниками однозначно, а это возможно, при прочих равных условиях, только при выражении результатов целыми числами или исходами "выигрыш" - "проигрыш". Целыми числами будут также *количество* бракованных изделий в партии, числа отказов оборудования и др.

Для дискретных случайных величин принято пользоваться вероятностью события $X<x$, где $x$ - целое число, принадлежащее *интервалу* $(x_{min}, x_{max})$, а $X$ - случайная величина. Эта вероятность является *функцией* от $x$:

$$P(X<x)=F(x) \tag{2.3}$$

и называется **функцией распределения дискретной случайной величины** (рис. 2.1). Если случайная величина $X$ принимает *конечное* число дискретных значений (например, число очков на гранях игральной кости), то функция распределения вероятностей этой случайной величины представляет собой ступенчатую функцию.

В соответствии с таким определением вероятность выпадения нуля для *идеальной* игральной кости равна нулю, вероятность выпадения одного очка равна 1/6, одного или двух - 2/6 и т.д. Вероятность выпадения любого результата от 1 до 6 равна 1, это *достоверное* событие (рис. 2.2. См. также статью *Гистограмма*).

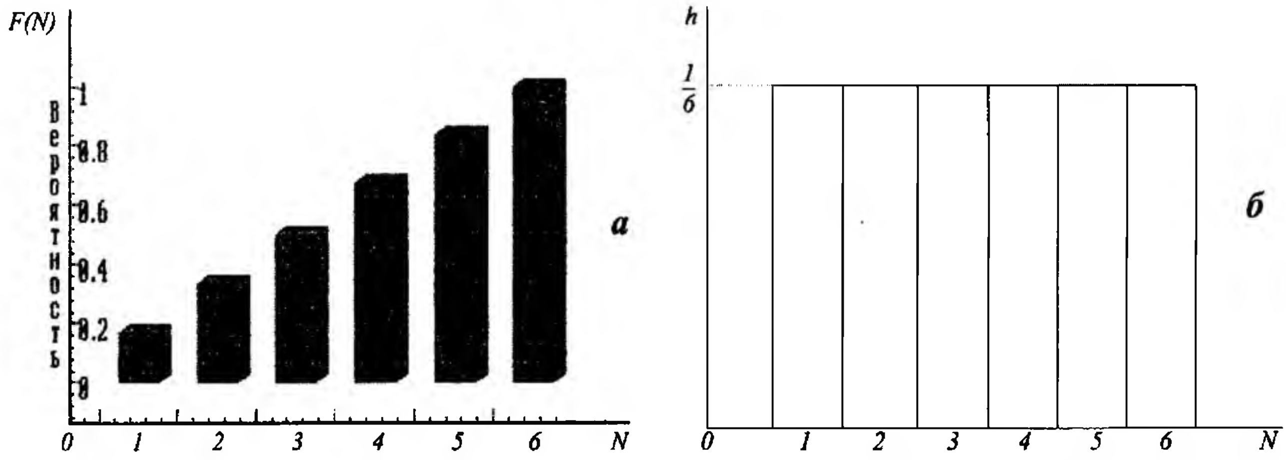



Рис. 2.2. Функция распределения (а) и плотность вероятностей (б) числа очков при бросании одной игральной кости (площадь всех шести столбиков на рис. 2.2,б равна 1)

Для непрерывных случайных величин принято пользоваться вероятностью события $X<x$, где $x$ - произвольное действительное число, принадлежащее интервалу $(-\infty, +\infty)$, а $X$ - случайная величина (рис. 2.3).

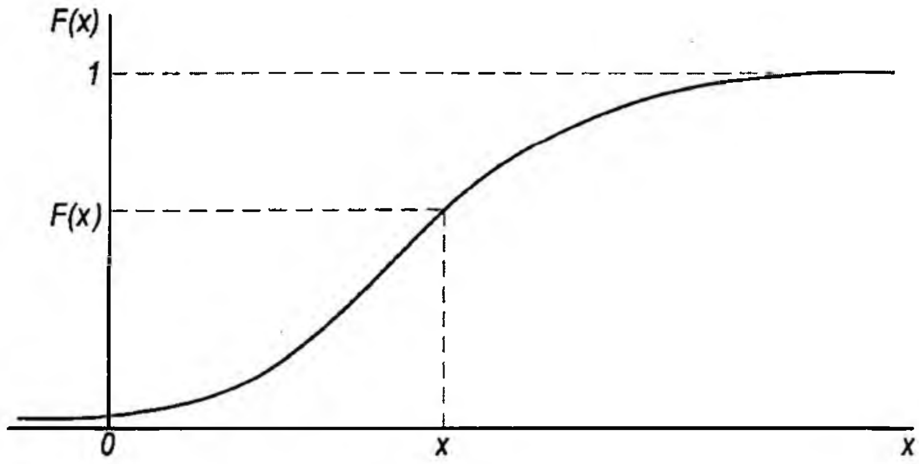



Рис. 2.3. Функция распределения непрерывной случайной величины
$\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0, \ \lim\limits_{x\to\infty} F(x)=1$

Эта вероятность является функцией от $x$:

$$P(X<x)=F(x), \tag{2.4}$$

и называется **функцией распределения непрерывной случайной величины** (сравните с (2.3)). На рис. 2.4 приведена функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины - положения стрелки часов в случайные *моменты* времени:

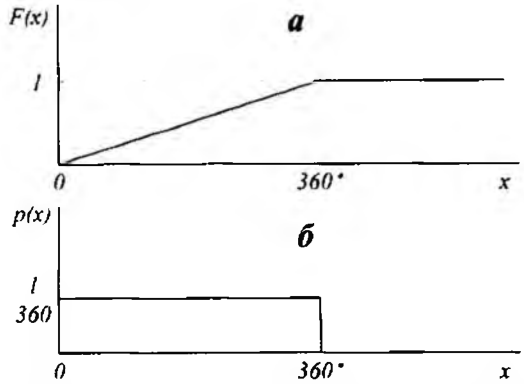



Рис. 2.4. Функция распределения (а) и плотность вероятностей (б) положения стрелки часов в случайные моменты времени (площадь прямоугольника на рис. 2.4,б равна 1)

Очевидно, что функция распределения вероятностей является **монотонной** и **неубывающей**.

Для произвольной функции $F(x)$ если $x_1 \leqslant x_2$, то $F(x_1) \leqslant F(x_2)$ (рис. 2.5). *Максимальное* значение $F(x)=1$, *минимальное* - $F(x)=0$.

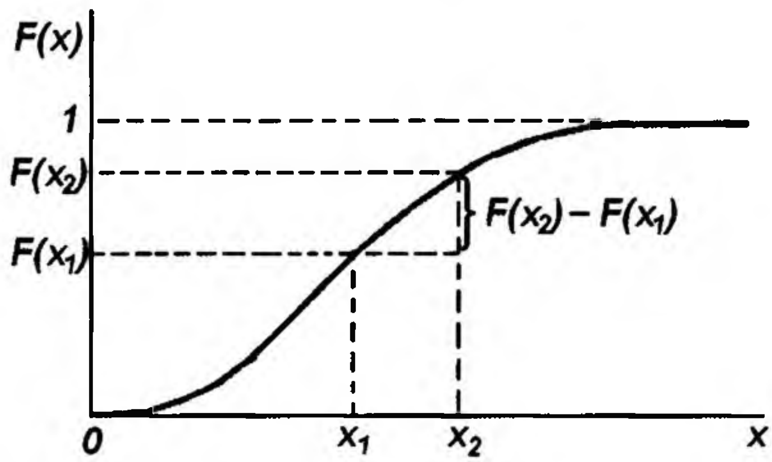



Рис. 2.5. Функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины

$$\lim_{x \to -\infty} F(x)=0, \quad \lim_{x \to \infty} F(x)=1$$

Ордината *кривой*, соответствующая точке $x_1$, представляет собой вероятность того, что случайная величина $X$ при испытании окажется меньше $x_1$. Ордината кривой, соответствующая точке $x_2$, представляет собой вероятность того, что случайная величина $X$ при испытании окажется меньше $x_2$. Разность двух ординат, соответствующая точкам $x_1$ и $x_2$, даёт вероятность того, что значения случайной величины будут лежать в *интервале* между $x_1$ и $x_2$:

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1), \tag{2.5}$$

где $P(x_1<X<x_2)$ - доля от единицы. Очевидно, что при предельных значениях *аргумента*:

$$F(-\infty)=0; \quad F(+\infty)=1. \qquad (2.6)$$

*Система* действительных чисел является *непрерывной* системой. Непрерывными случайными величинами являются, например, температура, давление, концентрация, размеры и масса частиц дисперсной фазы, величина пор породы, *коэффициент* проницаемости и др. В отличие от *дискретной* случайной величины каждый *результат измерения* непрерывной случайной величины $X$ уникален и неповторим, а вероятность получения конкретного точного значения равна нулю, $P(X=x_i)=0$. Это объясняется тем, что при повышении точности измерения одной и той же *физической* величины всегда будет некоторая разность между двумя любыми измерениями. С другой стороны, если точность собственно измерения физической величины постоянна, но *процесс* развивается во времени и/или в пространстве (например, химическая реакция, движение жидкости, изменение температуры тела и т.п.), то совокупное влияние *множества* случайных *факторов*, сопровождающих исследуемый процесс, в той или иной *степени* исказит результаты всех измерений и *зависимость* исследуемой физической величины от *независимой* не будет идеально гладкой, - *экспериментальная* зависимость будет представлять собой ломаную линию, другими словами, экспериментальные *данные* будут образовывать некоторую кривую, имеющую больший или меньший "разброс" значений. При значительном разбросе значений принято говорить, что кривая имеет "выпадающие точки". Повторение процесса в тех же условиях даст близкие результаты, но другие.

Для характеристики непрерывной *случайной величины* обычно употребляют *производную функции распределения* - **плотность распределения вероятностей** (*плотность вероятностей*) случайной величины $X$:

$$p(x) = F'(x) = \frac{dF}{dx}. \qquad (2.7)$$

Плотность вероятностей *случайной величины* является неотрицательной функцией (рис. 2.6).

Площадь, заштрихованная на *графике* плотности распределения случайной величины, равна *вероятности* того, что случайная величина $X$ примет значения в *интервале* $x_1$-$x_2$:

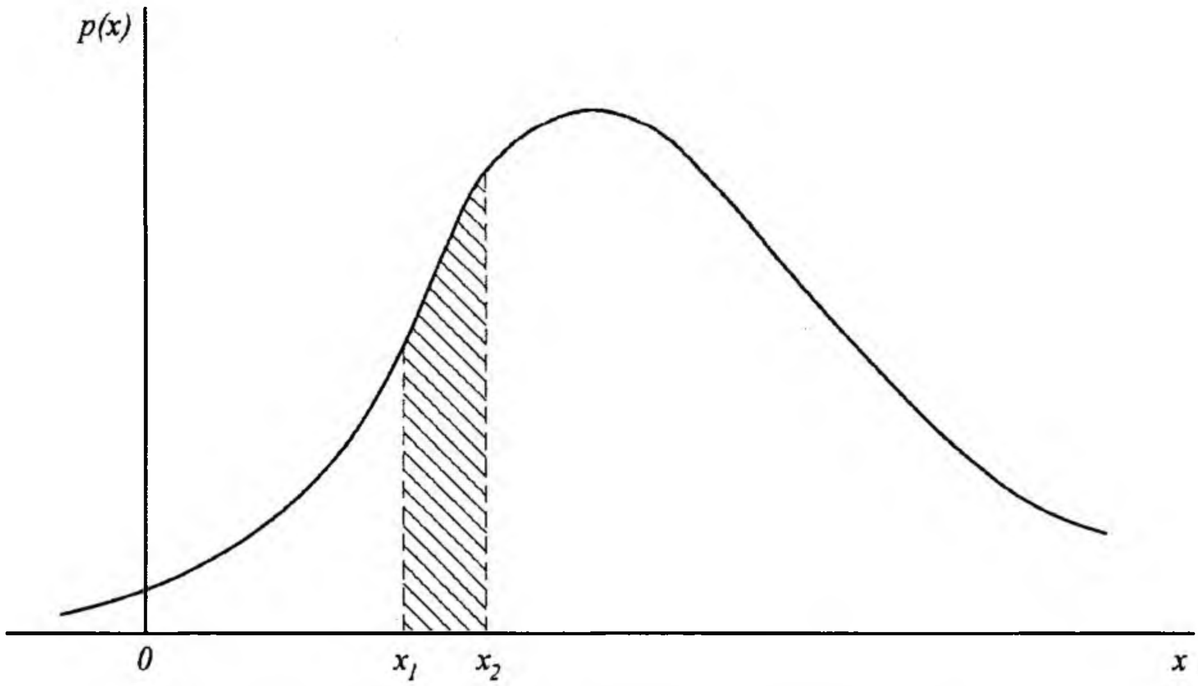



Рис. 2.6. Плотность вероятностей непрерывной случайной величины (общая площадь под кривой плотности вероятностей равна 1)

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx = F(x_2) - F(x_1). \qquad (2.8)$$

Естественно, что $P(x_1 < X < x_2)$ – доля от единицы.

Общая площадь под *кривой* плотности вероятностей случайной величины равна единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1. \qquad (2.9)$$

Это означает, что случайная величина, имеющая плотность распределения $p(x)$, примет то или иное значение в *интервале* $-\infty < X < +\infty$; это *достоверное событие*.

Рассмотрим для примера плотность распределения частиц цементного раствора по радиусам (рис. 2.7). Площадь каждого столбика соответствует массовой доле частиц цементного раствора с радиусом от $r_i$ до $r_{i+1}$.

Очевидно, что распределение частиц цементного раствора по радиусам в дистиллированной воде (а) не противоречит *логнормальному закону*.

Плотность вероятностей можно применить и для характеристики *дискретной* случайной величины. В этом случае её обычно изображают в виде *гистограммы*. Гистограмма или столбчатая диаграмма – одна из *форм* графического представления *эмпирического распределения*, при

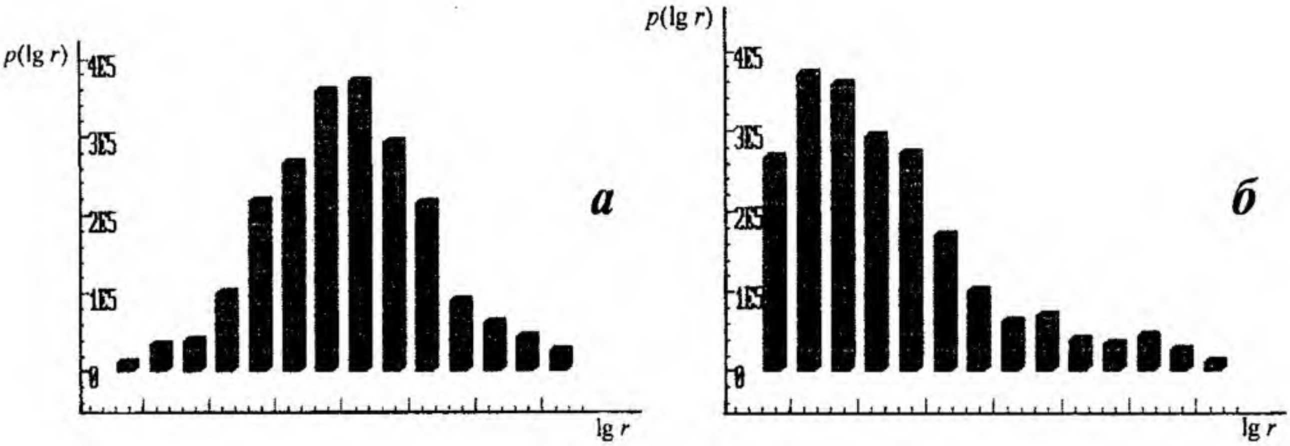



Рис. 2.7. Плотности распределения частиц цементного раствора по радиусам: а - в дистиллированной воде, б - с добавлением реагентов. На обоих рисунках радиус цементных частиц изменяется от 0,015 до 0,026 мм, (практически, по оси абсцисс отложены логарифмы радиусов)

котором на оси абсцисс откладывают значения *результатов наблюдений*, разделённые на $k$ (обычно) равных интервалов, а над каждым интервалом строятся столбики, высота которых $H_i$ *пропорциональна частотам* $h_i = n_i/n$ появления наблюдаемого признака, попавших в интервал $[x_{i-1}, x_i]$.

На рис. 2.8 представлены гистограммы *распределения вероятностей* выпадения "орлов" при различном задаваемом числе бросаний. Высота каждого столбика равна вероятности выпадения задаваемого числа "орлов" из $n$ бросаний.

Например, *вероятность* выпадения трёх орлов при пяти бросаниях равна 0,3125, при десяти бросаниях 0,1172, а вероятность того, что при тридцати бросаниях выпадет три герба и, соответственно, 27 "решек" меньше 0,0003, т.е. это практически *невозможное* событие; наиболее вероятно в последнем случае выпадение 15 гербов и 15 "решек" - вероятность такого результата P=0,1445. Если мы попытаемся сравнить плотности вероятностей результатов бросания игральной кости (рис. 2.2, б) и положения стрелки часов в произвольные моменты времени (рис. 2.4, б), то обнаружим их идентичность - каждое из них представляет собой *равновероятное* событие. Такие распределения называются **равномерными**. Вернёмся к игральной кости. Достаточно вместо одной игральной кости взять две, и результаты существенно изменятся (рис. 2.9).

Наиболее вероятным событием (P=0,1667) будет семь - такая сумма будет являться результатом шести *равновозможных* исходов броса-

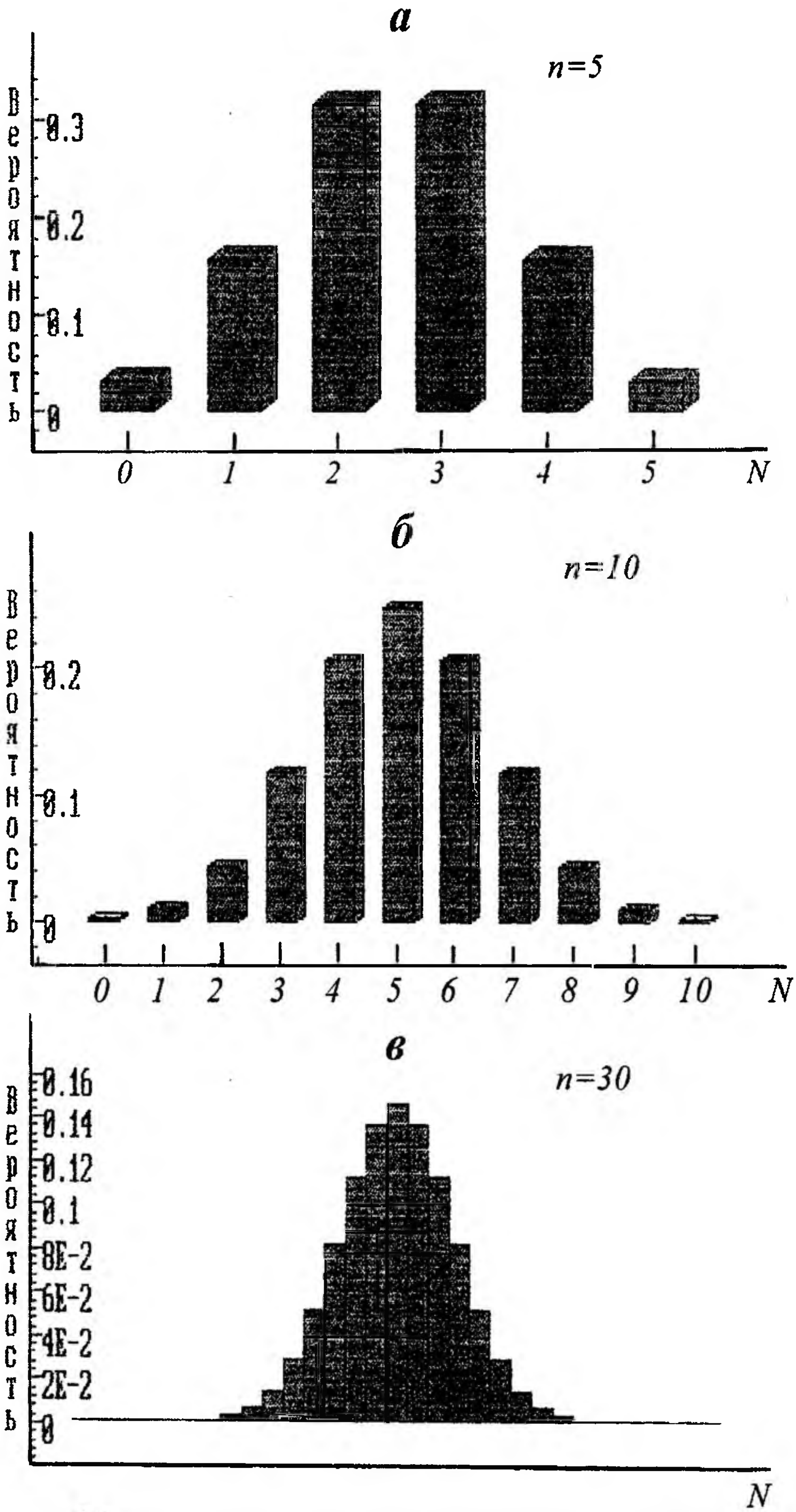



Рис. 2.8. Гистограмма распределения вероятностей выпадения "орлов" при различном задаваемом числе бросаний (а) $n$=5; (б) $n$=10; (в) $n$=30

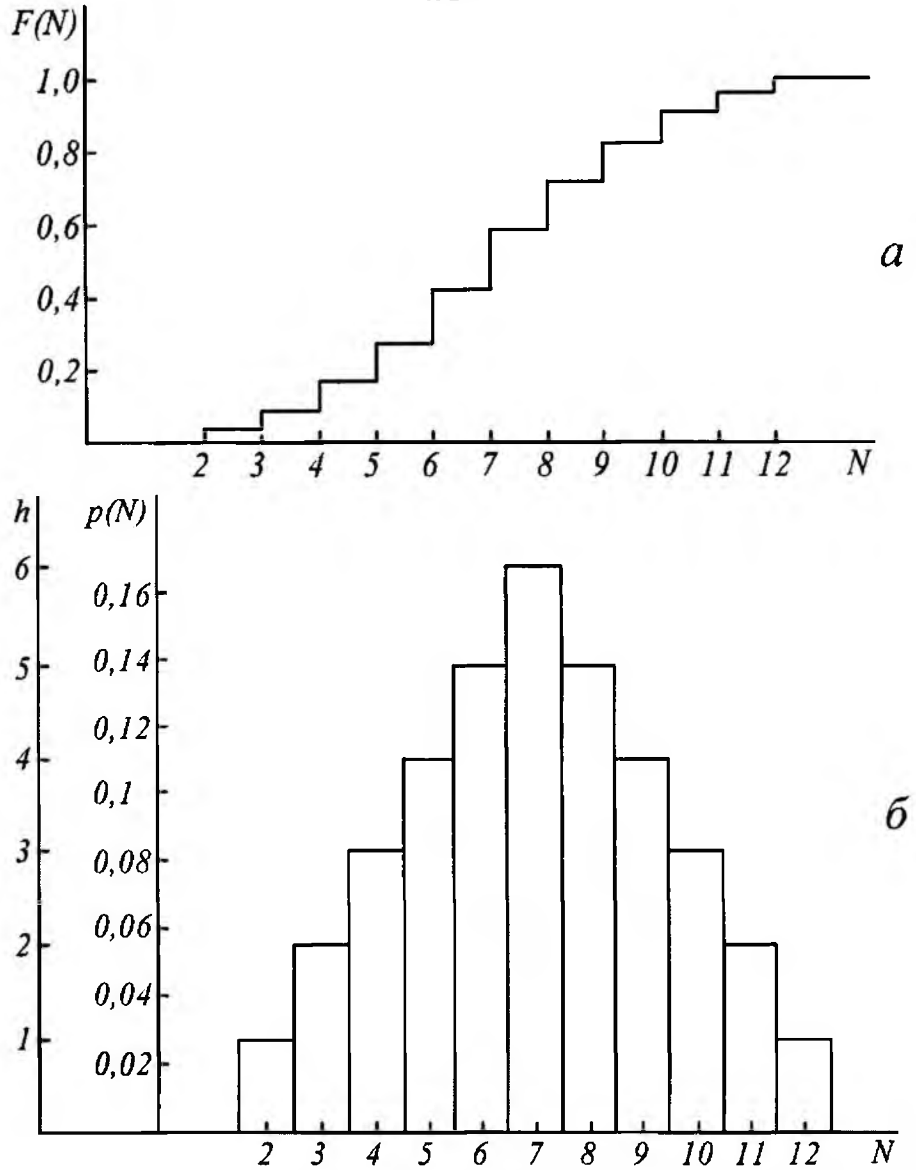



Рис. 2.9. Функция распределения (а) и плотность вероятностей (б) числа очков при бросании двух игральных костей

ний. Не лишне напомнить, что при бросании двух игральных костей возможны 36 исходов и, что самое интересное, все исходы *равновероятны*. Что же касается суммы очков на гранях, то для неё характерна *зависимость*, изображённая на рис. 2.9 (возможно, это и явилось *причиной* распространения игр с двумя костями - успех в большей *степени* зависит от сообразительности игрока и в меньшей от *случайности**).

Давайте интереса ради рассмотрим *гипотетическую* игру с тремя костями. При бросании трёх игральных костей возможны $6^3$=216 исхо-

*Примечание 18. Равновероятность результатов бросания одной игральной кости чувствуют даже дети, ибо им достаточно быстро надоедает игра, в которой задействована одна кость. Невозможность повлиять на исход игры подавляет работу мысли и, как следствие, приводит к угасанию интереса к игре. Человек любит играть, ему интересна случайность, но не обречённость, случайность не бессмысленная, а в некоторой степени управляемая, контролируемая, прогнозируемая, возбуждающая мысль...

дов, т.е. 216 сочетаний граней с очками от 1 до 6; $\nu$=216. Естественно, что, как в классической игре с двумя костями, *вероятности* всех двухсот шестнадцати исходов одинаковы. Распределение суммы очков (*минимум* 3, *максимум* 18) по частоте выпадания имеет вид, изображённый на рис. 2.10.

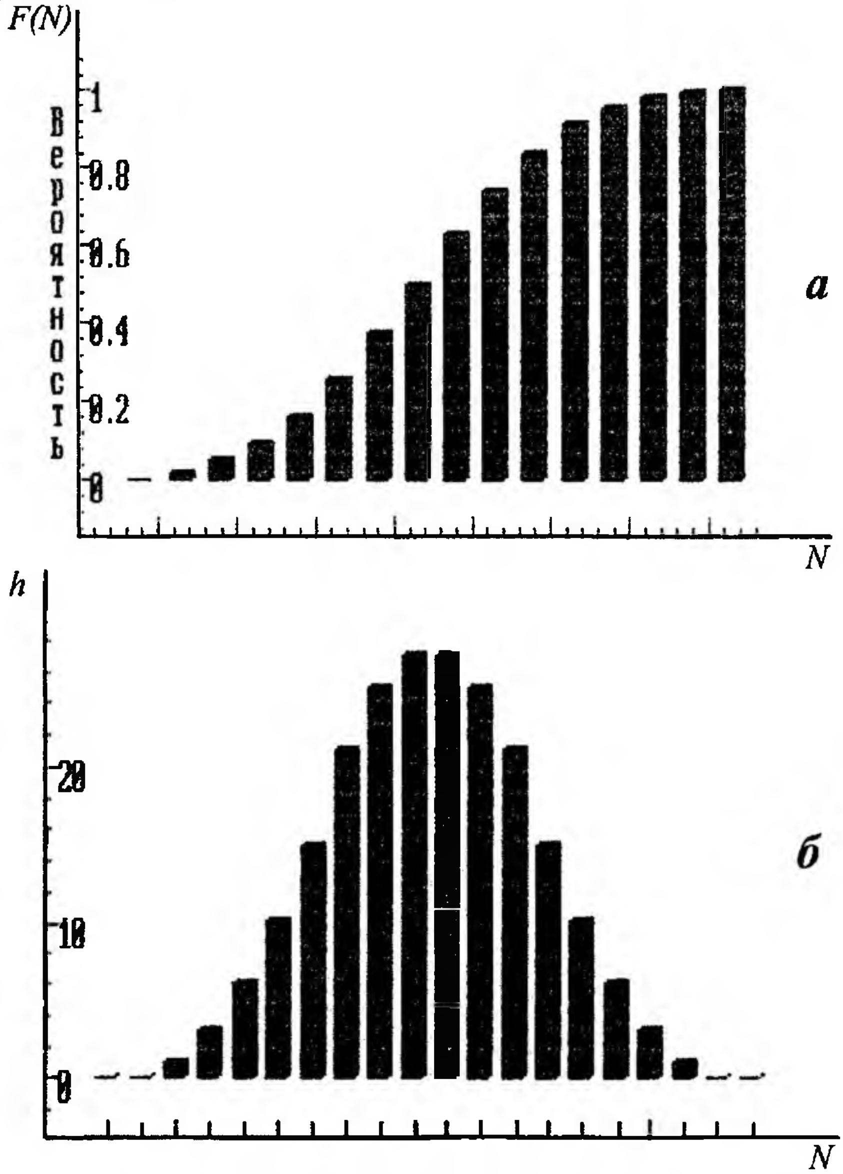



Рис. 2.10. Функция распределения (а) и плотность вероятностей (б) числа очков при бросании трёх игральных костей

Так, 3 очка может выпасть только в одном сочетании (P=0,00463), 4 очка в трёх (P=0,0139), 5 очков в шести сочетаниях (P=0,0278) и т.д. *Максимальна вероятность* выпадения 10 или 11 очков, - такая сумма выпадает в результате двадцати семи *равновозможных* исходов, соответствующая вероятность P=0,125, (рис. 2.10,б). Очевидно, что гистограмма распределения суммы очков (рис. 2.10,б) удивительно похожа на гистограмму распределения вероятностей орлов (рис. 2.8), а по форме обе похожи на колокол (следует заметить, что, несмотря на внешнюю похожесть, с точки зрения *теории* вероятностей, это разные распределения. Но и колокола бывают разные...).

Для полноты картины давайте рассмотрим ещё одну гипотетическую игру с четырьмя костями. При бросании четырёх игральных костей возможны $6^4=1296$ исходов, т.е. 1296 сочетаний граней с очками от 1 до 6. Естественно, что, как в классической игре с двумя костями, вероятности всех тысячи двухсот девяносто шести исходов одинаковы. Распределение суммы очков (минимум 4, максимум 24) по частоте выпадания имеет вид, изображённый на рис. 2.11.

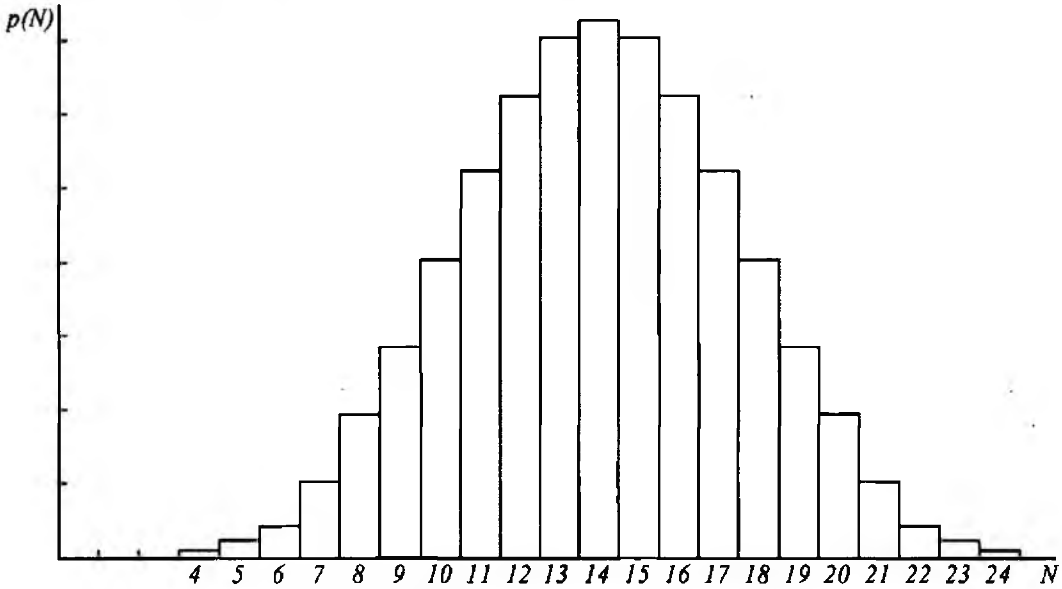



Рис. 2.11. Гистограмма (плотность вероятностей) распределения числа очков при бросании четырёх игральных костей

## 2.5. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины

"Если вопрос задан правильно, ответ будет неожиданным." (*Авессалом Подводный*; р. 1953).

**Математическое ожидание** - *мера центральной* тенденции в рассеянии *случайной величины*, одна из важнейших характеристик *распределения вероятностей* случайной величины. *Понятие* математического ожидания случайной величины используется для теоретических построений при исследовании распределений вероятностей случайных величин и для решения различных задач.

Для *дискретной* случайной величины $X$, принимающей последовательность значений $x_1$, $x_2, \ldots$, $x_1 \ldots$ с *вероятностями*, равными соответственно $p_1$, $p_2, \ldots$, $p_i, \ldots$ , математическое ожидание определяется *формулой*:

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i, \qquad (2.10)$$

В некоторых азартных играх математическое ожидание можно указать *абсолютно* точно (например, математическое ожидание результата бросания двух игральных костей - семь). Отличительной особенностью азартных игр является однозначно трактуемый результат: успех-неудача, целое *число* очков, характеристика карты и т.д.

Для *непрерывной* случайной величины математическое ожидание выражается формулой:

$$M_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx. \qquad (2.11)$$

Выражение (2.11) является *математическим* выражением *координаты* центра тяжести, т.е. $M_x$ можно представить себе как абсциссу центра тяжести массы, расположенной под *кривой*, являющейся плотностью вероятности $p(x)$. Это выражение аналогично формуле (1.116) для начального *момента* первого порядка. Для *физических величин*, определяемых в *результате наблюдений* и *экспериментов*, математическое ожидание определить невозможно, его можно только *оценить*.

В научных и прикладных исследованиях математическое ожидание характеризует наиболее вероятное значение физической величины, получаемой в результате экспериментального определения, но оно отличается от моды, которая характеризует расположение *максимума* кривой $p(x)$. Проблема любого наблюдения и эксперимента заключается в том, что значение какой-либо характеристики *явления* или *процесса* абсолютно точно определить невозможно. В результате многократных измерений физической величины получится *множество* значений, имеющих бо́льшее или меньшее рассеяние относительно *среднего значения*. По существу, все результаты экспериментов являются случайными величинами, имеющими то или иное распределение вероятностей. Принято считать, что распределение ошибок измерений не противоречит *закону нормального распределения*. Также принято считать, что среднее значение является оценкой неизвестного математического ожидания (*истинного* значения измеряемой величины). Необходимо также добавить, что средних значений *множество*.

В большинстве случаев математическое ожидание характеризует наиболее вероятное расположение значений случайной величины. Название "математическое ожидание" происходит от *понятия* "ожидаемого значения выигрыша" (математического ожидания выигрыша), впервые появившегося в *теории* азартных игр в трудах Б.Паскаля (*Pascal Blaise*; 1623-1662), П.Ферма (*Fermat Pierre*; 1601-1665) и Х.Гюйгенса (*Huygens Christian*; 1629-1695) в XVII в. Они ввели понятие математического ожидания случайного *события* и использовали его для решения ряда задач, в том числе весьма старинной задачи (ставшей с тех пор классической) о разделе ставки в неоконченной игре. Понятие "математическое ожидание" в 1795 г. ввёл П.Лаплас (*Laplace Pierre Simon*; 1749-1827). В полной мере это понятие было оценено и использовано в сер. XIX в. русским математиком П.Л.Чебышевым (1821-1894).

Исходы азартных игр по вполне понятным *причинам* выражаются целыми числами или двумя возможными взаимоисключающими исходами ("успехом" и "неудачей"), поэтому в ряде случаев математическое ожидание можно определить точно (например, подбрасывание монеты, бросание двух, трёх и более игральных костей (см. рис. 2.2,б, 2.8, 2.9,б, 2.10,б, 2.11), причём в этих случаях математическое ожидание, *мода* и *медиана совпадают*). Результаты наблюдений и экспериментов (за редким исключением) - числа действительные (вещественные), включающие в себя, помимо истинной физической компоненты, также *ошибки* случайные, систематические и грубые. По этим причинам в наблюдениях и экспериментальных исследованиях математическое ожидание - понятие достаточно абстрактное, и степень этой абстрактности связана как с *асимметрией* распределения самой физической случайной величины, так и с асимметрией распределения ошибок измерений.

Существует достаточно много приёмов оценки математического ожидания по результатам *выборки*; выбор того или иного способа определяется *физической сущностью* задачи и *концепцией*. В большинстве случаев важно знать *среднее значение* выборки, которое удовлетворяло бы некоторому *критерию*, соответствующему физической сущности задачи. Наибольшее значение имеют четыре вида среднего значения, - мода, медиана, *среднее арифметическое* (рис. 2.12) и начальный *момент* первого порядка.

*Максимуму* кривой плотности вероятностей соответствует мода, это наиболее вероятный результат. Мода в статистике - то, что в обычной жизни называется массовым, типичным. Например, цена, по которой данный товар чаще всего реализуется на рынке.

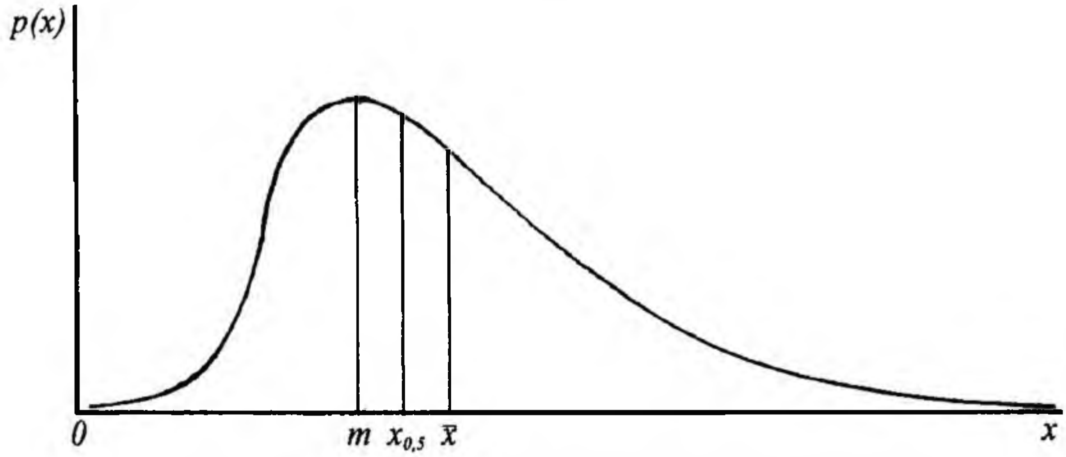



Рис. 2.12. Три различные оценки математического ожидания - мода, $m$, медиана, $x_{0.5}$, и среднее арифметическое, $x_{cp}$ (общая площадь под кривой плотности вероятностей равна 1)

Если распределение асимметрично, то иногда представляет интерес медиана, $x_{0.5}$ - то значение случайной величины, которое делит распределение на две равные части (рис. 2.12). Другими словами, вероятности событий по обе стороны медианы одинаковы. Мода и медиана имеют больше теоретическое, чем практическое значение - для экспериментальной выборки малого объёма моду и медиану вычислить непросто. Следующим средним значением является среднее арифметическое, его проще всех вычислить, и отчасти по этой причине оно нашло наиболее широкое применение. Кроме этого, в условиях *нормально* распределённых *ошибок* наблюдений арифметическое среднее имеет наименьшую *дисперсию*, точнее, арифметическое среднее является *состоятельной*, *несмещённой* и *эффективной* оценкой математического ожидания. В условиях асимметричных кривых распределения медиана расположена между модой и средним арифметическим (рис. 2.12).

Следует заметить, что кроме арифметического среднего в *науке*, технике и технологии применяют также: *арифметическое взвешенное среднее*, $x_{cp.w}$, *взвешенное степенное среднее*, $x_{w.\alpha}$, *гармоническое среднее*, $x_h$, *геометрическое среднее*, $x_g$, *квадратичное среднее*, $x_s$, *кубическое среднее*, $x_{cub}$, *арифметико-геометрическое среднее*, $x_{cp.g}$ и начальный момент первого порядка, $m_1$; при этом $x_h < x_g < x_{cp} < x_s < x_{cub}$ (рис. 2.13).

См. *Среднее, среднее значение*, а также *Концепция, Эмпирическое распределение*. См. также *Шум, ШУМЪ*.

**Дисперсия** (< *лат.* disperse - рассеянно, разбросанно, там и сям; dispersio - рассеяние, разбросанность) в *статистике математической* и *вероятностей теории* - *мера* рассеяния значений *случайной величины* *относительно центра*, одна из характеристик *распределения вероятностей случайной величины*, т.е. отклонения её от *среднего*

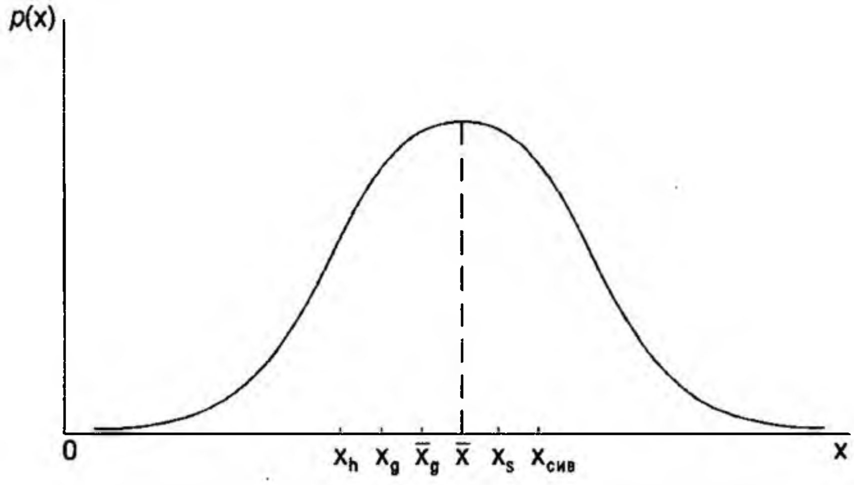



Рис. 2.13. Общий случай распределения оценок математического ожидания выборочного распределения: $x_h$ - гармоническое среднее, $x_g$ - геометрическое среднее, $x_{cp.g}$ - арифметико-геометрическое среднее, $x_{cp}$ - арифметическое среднее, $x_s$ - квадратичное среднее, $x_{cub}$ - кубическое среднее (площадь под кривой плотности вероятностей равна 1)

*значения*. В методе моментов дисперсия - *центральный момент* второго порядка.

В *теории* вероятностей *дисперсия* $DX$, случайной величины $X$ *определяется* как математическое ожидание $E(X-M_x)^2$ квадрата отклонения $X$ от её математического ожидания $M_x=EX$. Для случайной величины с *дискретным* распределением дисперсия определяется *формулой*:

$$DX = \sum_{i=1}^{\infty}(x_i-M_x)^2 p_i, \qquad (2.12)$$

где вероятность $p_i=P(X=x_i)$, при условии, что ряд сходится. Для случайной величины $X$ с *непрерывным* распределением, имеющим *плотность вероятностей* $p(x)$, - формулой:

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty}(x-M_x)^2 p(x)\,dx, \qquad (2.13)$$

если этот интеграл сходится. Если $DX=0$, то случайная величина $X$ принимает с вероятностью 1 единственное значение $M_x$. Дисперсия имеет важное значение в характеристике *качества* статистической *оценки* случайной величины. Наряду с дисперсией в качестве *меры* рассеяния (той же размерности, что и сама случайная величина) используется квадратный корень из дисперсии: $б_x=\sqrt{DX}$, называемый *стандартным* (*квадратичным*) *отклонением* $X$. На рис. 2.14 приведены графики плотности двух различных распределений. Очевидно, что математическое ожидание определяет центр распределения, $M_{x.1}<M_{x.2}$, а дисперсия (мера рассеяния) характеризует крутизну, *размах кривой* плотности, $б_1<б_2$.

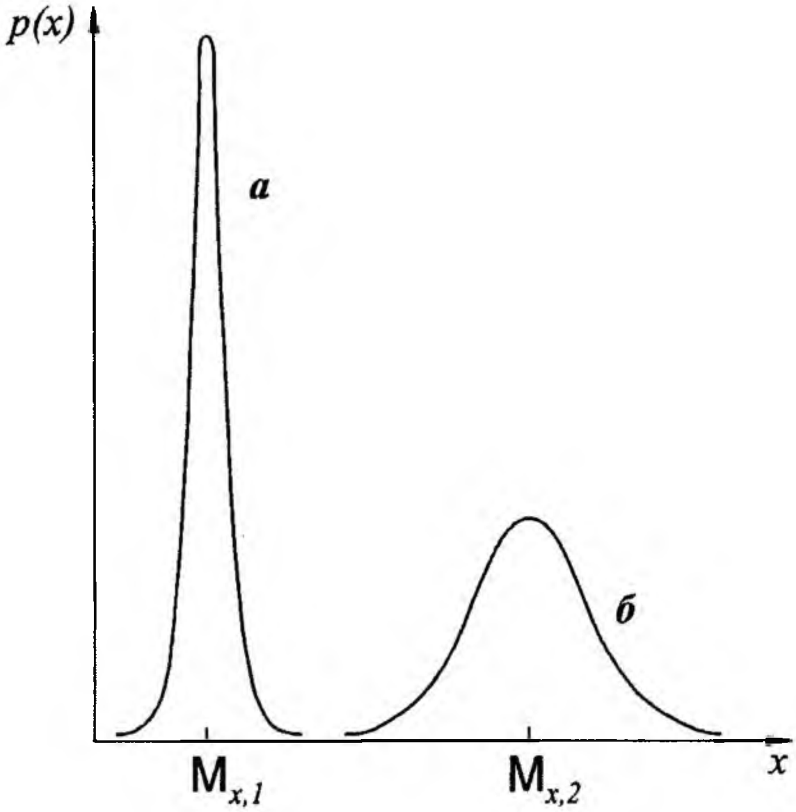



Рис. 2.14. Плотности распределений для различных значений математического ожидания и дисперсии: (а) - малая дисперсия, (б) - большая лисперсия (площадь под каждой кривой плотности вероятностей равна 1)

Поскольку в реальной жизни математическое ожидание - величина неизвестная, на практике *определяют* среднее значение *выборки* и выборочную (опытную) дисперсию:

$$s^2_{\text{оп}} = \frac{1}{n_{\text{оп}}-1} \sum_{i=1}^{n_{\text{оп}}} (x_i - \bar{x})^2; \qquad (2.14)$$

где

$$\bar{x} = \frac{1}{n_{\text{оп}}} \sum_{i=1}^{n_{\text{оп}}} x_i \qquad (2.15)$$

или другое среднее (см. 1.194, 1.196 - 1.199, 1.201, 1.202), $n_{\text{оп}}$ - *число опытов* в выборке, $\nu_{\text{оп}}=n_{\text{оп}}-1$ - *степеней свободы число* (1.242) выборочной дисперсии.

Следует различать дисперсию *эмпирического распределения* (дисперсию выборочного распределения) и *дисперсию воспроизводимости* (опытную дисперсию). Для определения дисперсии воспроизводимости осуществляют так называемые *параллельные опыты* и оценку математического ожидания как правило производят по формуле среднего арифметического. При этом предполагают (проверяют), что ошибки измерения физических величин подчиняются закону нормального распределения. В случае эмпирического распределения параллельные опыты имеют второстепенное значение и производятся для отладки методики конкретных *наблюдений, экспериментов*. Главная задача исследования эмпирического распределения - сделать *представительную выборку* из *совокупности*. Если эмпирическое распределение *асимметрично*, то возникает достаточно серьёзная проблема выбора центра распределения. Центром *распределения* могут быть *медиана*, *мода*, *начальный* момент первого порядка, *арифметическое среднее*, *арифметическое взвешенное среднее*, *взвешенное степенное среднее*, *гармоническое среднее*, *геометрическое среднее*, *среднее квадратичное*, *среднее кубическое*, *арифметико-геометрическое среднее* и др. параметры. Другими словами, дисперсия выборочного распределения характеризует *вариацию* признака относительно *среднего значения выборки* - параметра, определяемого *сущностью* задачи и *концепцией* исследователя.

Для оценки *результатов наблюдений* одной дисперсии недостаточно. Корень квадратный из выборочной дисперсии называется *квадратичным отклонением*, иногда *стандартным отклонением* или выборочным *стандартом*. Начинающие исследователи обычно с трудом развивают интуитивное восприятие численного значения дисперсии или квадратичного отклонения. Является ли дисперсия, равная, например, 777, большой или малой? Что значит стандартное отклонение $0,51 \cdot 10^{-4}$? С точки зрения ценности *информации* о поведении случайной величины то, чем больше дисперсия (т.е. больше разброс значений случайной величины *относительно* центра распределения), тем оценка $M_x$ хуже, информация о *сущности явления*, *процесса* разнесена на большем *интервале*. При сближении значений стандартного отклонения и среднего значения информативность уменьшается, а если в результате *обработки данных* получено $x_{cp}<s_x$, то либо *ошибки измерений* велики, либо в явлении, процессе отсутствует *физическая сущность*. Уместно также отметить, что одним из проявлений *больших чисел закона* является тот факт, что стандартное отклонение стремится к нулю с ростом $n$ ($n \to \infty$) и при фиксированном $n$ оно не превосходит $1/2\sqrt{n}$.

Для *интерпретации* как дисперсии, так и квадратичного отклонения главное не получить численные значения последних, а *правильно* сравнить дисперсию исследуемой выборки с какой-либо другой дисперсией, или квадратичное отклонение умножить на правильно выбранный *критерий Стьюдента*, чтобы получить *доверительный интервал* для неизвестного *математического ожидания*.

**Пример 1. Оценка математического ожидания и дисперсии**

Рассмотрим *процедуру оценки* математического ожидания и *дисперсии случайной величины* на примере *определения коэффициента* физической проницаемости цементного камня. Коэффициент проницаемости определён по *результатам* лабораторного исследования шести образцов цементного камня. В этом примере речь идёт только об определении коэффициента физической проницаемости цементного камня. При этом предполагается, что *ошибки измерений* подчиняются *закону нормального распределения*. Результаты расчётов приведены в таблице 2.

*Таблица 2.*

| $i$ | Коэффициент физической проницаемости, $k \cdot 10^{13}$ м$^2$ |
|---|---|
| 1 | 0,239 |
| 2 | 0,2472 |
| 3 | 0,2421 |
| 4 | 0,2525 |
| 5 | 0,2469 |
| 6 | 0,2508 |

По результатам шести определений определяем *среднее арифметическое* по формуле (1.55):

$$\bar{k} = \frac{k_1 + k_2 + \ldots + k_6}{6} = 0,2464 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2.$$

Примечание: формуле (1.55) в данном случае аналогичны формулы (1.72), (1.122), (1.212), (1.247), (1.269), (2.15).

Определяем дисперсию случайной величины по формулам (1.54), (1.137) или (1.56):

$$s^2_{\text{оп}} = \frac{1}{n_{\text{оп}} - 1} \sum_{i=1}^{n_{\text{оп}}} (k_i - \bar{k})^2 = 0,26092 \cdot 10^{-30}.$$

Примечание: формуле (1.54) в данном случае аналогичны формулы (1.73), (1.124), (1.248), (1.268), (1.319), (2.14).

На первый взгляд кажется, что дисперсия, равная $0,26092 \cdot 10^{-30}$, очень малая величина, почти ноль. Есть ли смысл считать дальше? Извлечём квадратный корень:

$$s_k = \pm\sqrt{s^2_{оп}} = \pm\sqrt{0,26092\cdot10^{-30}} = \pm0,5108\cdot10^{-15}.$$

Величина $s_k=\pm0,5108\cdot10^{-15}$ является *квадратичным отклонением* или *стандартным отклонением*. Вычислим *коэффициент вариации* по *формуле* (1.28), сравнивая квадратичное отклонение $s_k$ со средним значением коэффициента проницаемости:

$$V_x = \frac{s_k}{k_{ср}} = \frac{0,5108\cdot10^{-15}}{0,2464\cdot10^{-13}} = 0,0207.$$

Очевидно, что квадратичное отклонение вполне соизмеримо со средним значением коэффициента проницаемости. Коэффициент вариации $V_x=0,0207$ характеризует *относительную ошибку* эксперимента. Его обычно выражают в процентах - 2,07%. Это хорошая точность результатов.

Приблизительный *интервал*, в котором с той или иной *вероятностью* (но не выше 0,683) может находиться математическое ожидание коэффициента физической проницаемости исследованного образца цементного камня, выражается стандартными границами:

$$\bar{k}\pm s_k=(0,2464\cdot10^{-13}\pm0,5108\cdot10^{-15})\ м^2.$$

Следует заметить, что математическое ожидание может находиться и за пределами стандартных границ. Для того чтобы можно было указать надёжность, *достоверность* интервала, *необходимо* воспользоваться соотношениями (1.74), (1.249). Вначале нужно задаться вероятностью ошибки или, точнее, *доверительной вероятностью обозначения* интервала, в котором может находиться неизвестное значение коэффициента проницаемости образца цементного камня. В исследованиях прикладного характера доверительная вероятность принимается обычно $P=0,95$. Соответственно, *уровень значимости* $\alpha=1-P=0,05$. В случае нормально распределённой случайной величины это соответствует вероятности попадания случайной величины в интервал $M_x-2б\leqslant X\leqslant M_x+2б$ или, по аналогии с вероятностью 0,997, правилу двух сигма (вероятность попадания случайной величины в интервал $P(M_x-3б\leqslant X\leqslant M_x+3б)=0,997$ называется *правилом трёх сигма*).

Вычислим доверительное отклонение коэффициента проницаемости для *уровня значимости* $\alpha=0,05$. По таблице (Приложение 6) найдём значение двустороннего *критерия Стьюдента* для *степеней свободы числа*

$\nu$=6-1=5. Табличный критерий Стьюдента $t^{0,05/2}$=2,57. Вычислим по формуле (1.69) доверительное отклонение:

$$s_x^\alpha = \frac{s_x}{\sqrt{n}} \cdot t_\nu^\alpha = \frac{0,5108 \cdot 10^{-15}}{\sqrt{6}} \cdot 2,57 = 0,536 \cdot 10^{-15}.$$

где 2,57 - двусторонний критерий Стьюдента для уровня значимости $\alpha$=0,05 и числа степеней свободы $\nu$=6-1=5.

Теперь результаты расчётов более *определённы*, с доверительной вероятностью $P$=0,95 математическое ожидание коэффициента физической проницаемости исследованного образца цементного камня находится в интервале:

$$0,2464 \cdot 10^{-13} - 0,536 \cdot 10^{-15} \leqslant M_k \leqslant 0,2464 \cdot 10^{-13} + 0,536 \cdot 10^{-15}.$$

Практически, чаще используется запись в виде:

$$\bar{k} = (0,2464 \cdot 10^{-13} \pm 0,536 \cdot 10^{-15})\ м^2.$$

Округляя, получим:

$$\bar{k} = (0,246 \pm 0,005) \cdot 10^{-13}\ м^2.$$

Теперь можно обсуждать вопрос о "выпадающих точках", т.е. о значениях $k$, находящихся за пределами доверительных границ и с вероятностью $P$=0,95 являющихся результатами грубых ошибок экспериментатора. Такими точками являются значения $0,239 \cdot 10^{-13}$ и $0,2525 \cdot 10^{-13}$. Удалим их и произведём расчёт с оставшимися четырьмя значениями:

$$\bar{k} = \frac{k_2 + k_3 + k_5 + k_6}{4} = 0,24675 \cdot 10^{-13}\ м^2.$$

Дисперсия случайной величины:

$$s^2_{оп} = \frac{1}{n_{оп} - 1} \sum_{i=1}^{n_{оп}} (k_i - \bar{k})^2 = 0,1275 \cdot 10^{-30}.$$

Квадратичное отклонение:

$$s_k = \pm \sqrt{s^2_{оп}} = \pm\sqrt{0,1275 \cdot 10^{-30}} = \pm 0,357 \cdot 10^{-15}.$$

Доверительное отклонение:

$$s_x^\alpha = \frac{s_x}{\sqrt{n}} \cdot t_\nu^\alpha = \frac{0,357 \cdot 10^{-15}}{\sqrt{4}} \cdot 3,18 = 0,5676 \cdot 10^{-15}.$$

где 3,18 - двусторонний критерий Стьюдента для уровня значимости $\alpha$=0,05 и числа степеней свободы $\nu$=4-1=3.

С доверительной вероятностью *P*=0,95 математическое ожидание коэффициента физической проницаемости исследованного образца цементного камня находится в *интервале*:

$$0{,}2468\cdot10^{-13}-0{,}5676\cdot10^{-15} \leqslant M_k \leqslant 0{,}2468\cdot10^{-13}+0{,}5676\cdot10^{-15}.$$

Или

$$\bar{\bar{k}}=(0{,}2468\cdot10^{-13}\pm0{,}5676\cdot10^{-15})\ м^2.$$

Очевидно, что *процедуру* отсева можно повторить, но обычно этого не делают.

## 2.6. Обобщение распределений

Давайте ещё раз посмотрим на *гистограммы* такого простого *события*, как бросание монеты (рис. 2.2,б, 2.8.). С увеличением числа задаваемых испытаний *плотность вероятности* исходов приобретает колоколообразную *форму*. *Случайность* ли это? Вне всякого сомнения не имеет смысла искать какую-либо *причинно-следственную связь* между техникой подбрасывания монеты - высотой, скоростью закручивания, температурой, влажностью воздуха и его дуновениями во время полёта и падением монеты той или другой стороной. Мало смысла и в посках связи способа бросания игральных костей и *результата* - для одной кости есть шесть *равновероятных* исходов падения какой-либо стороной, падение двух костей создаёт тридцать шесть *равновозможных* сочетаний, а три кости при падении создают двести шестнадцать равновозможных сочетаний. Несколько иначе обстоят дела с результатами бросаний - *числом* очков. Числа очков при бросании одной кости - события *равновероятные* (рис. 2.2,б), двух костей - *симметричное распределение* с *максимумом* при 7 очках (рис. 2.9,б), а гистограммы результатов бросания трёх игральных костей (рис. 2.10,б) и четырёх (рис. 2.11) весьма похожи на плотность вероятности распределения числа "орлов" при бросании монеты (рис. 2.8). Азартные игры известны не одно столетие, а в XVII в. в результате анализа азартных игр Б.Паскаль (*Pascal Blaise*; 1623-1662) и Х.Гюйгенс (*Huygens Christian*; 1629-1695) заложили основу *математической теории* вероятности. Математики, занимавшиеся теорией вероятности, при анализе азартных игр, стрельбы по мишеням и т.п. рассуждали приблизительно одинаково - если максимально точно зафиксировать *начальное* положение и скорость кости, монеты, пули (в дальнейшем - *объекта*), *физические* характеристики воздуха и объекта, то по законам классической механики и аэродинамики можно рассчитать движение идеального объекта и достоверно предсказать исход *опыта*. В этой связи уместно процитировать П. Лапласа: "Ум, которому были бы известны для какого-нибудь данного момента все силы, одушевляющие природу, и относительное положение всех её составных частей, если вдобавок он оказался достаточно обширным, чтобы подчинить эти данные анализу, обнял бы в одной формуле движения величайших тел вселенной наравне с движениями легчайших атомов ... и будущее, как и прошедшее, предстало бы перед его взором" (*P.S.Laplace*; 1749-1827).

Но практически начальные условия не могут никогда быть зафиксированы с *абсолютной* точностью, и, например, даже очень малые изменения начальной скорости объекта приводят к другому результату. Также обстоят дела с граничными условиями - движением воздуха во время полёта объекта. Таким образом, в отношении результата движения в пространстве игральной кости (монеты, пули, шарика рулетки) вывод такой - во время движения тела в пространстве на него действует *множество* сил (*факторов*), каждая из которых *несоизмеримо* меньше силы начального толчка (в противном случае возникает вопрос о жульничестве) и, с другой стороны, максимальная из множества сил по величине мала по сравнению со всей суммой. Другими словами, результаты бросания монеты, кости и т.п. важны как таковые (для игроков), но они не содержат в себе никакой полезной *информации* о причинно-следственных связях *процесса* испытания.

См. также *Равновозможность*.

С играми и стрельбой по мишени, в первом приближении, мы разобрались. Посмотрим, как в человеческой *популяции*. На рис. 2.15 приведена *гистограмма* распределения взрослых мужчин по росту, характер распределения почти не отличается от *симметричной* колоколообразной формы [32,33].

Гистограмма распределения взрослых мужчин по весу (рис. 2.16) слегка *асимметрична*, но это можно объяснить склонностью части мужчин к перееданию (рост *определяется* генетическими факторами, поэтому так идеальна гистограмма на рис. 2.15; вес человека также определяется генетическими факторами, но и, в значительной части, рационом питания и физическими нагрузками).

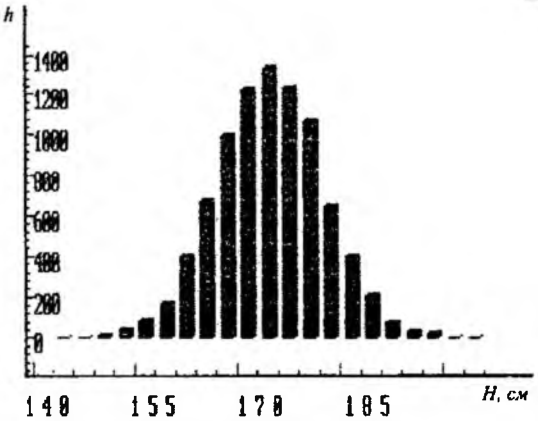



Рис. 2.15. Гистограмма распределения взрослых мужчин по росту

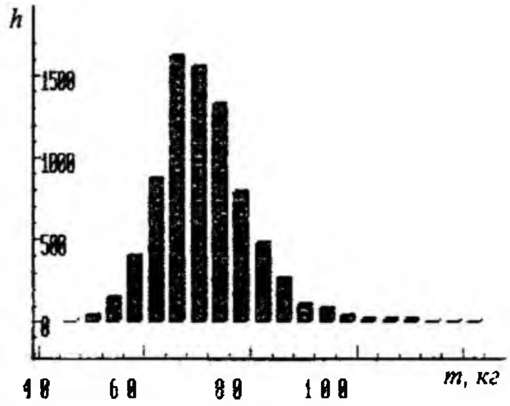



Рис. 2.16. Гистограмма распределения взрослых мужчин по весу

Но, в общем, распределения взрослых мужчин по росту и, отчасти, по весу также не отличаются от колоколообразной формы, т.е. не несут в себе какой-либо существенной информации о влиянии на них процессов, протекающих в человеческой *популяции*. А как обстоят дела с распределениями в неживой природе? Обработаем интереса ради размеры пляжной гальки Черноморского побережья. Результаты статистического анализа размеров сорока шести галек показали, что их распределение практически не отличается от нормального ($n$=46; опытный критерий $X^2=1,315 < X^2_{0.05}=7,81$), рис. 2.17. Сплошной линией показано соответствующее нормальное распределение с параметрами эмпирического. Невозможно представить процесс, сопоставимый по длительности и великому многообразию причин окатываемости в технике и технологии.

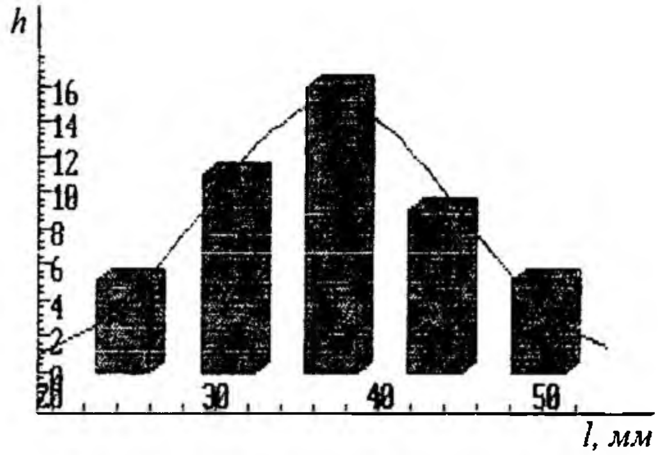



Рис. 2.17. Гистограмма распределения величин размеров пляжной гальки

Мы убедились в том, что в *результатах* подбрасывания монеты и игральных костей налицо несколько общих *моментов*. Во-первых, результат имеет весьма далёкую и опосредованную множественную связь с условиями испытаний, т.е. причинно-следственная связь между условиями испытаний и результатами слабо выражена или практически отсутствует. Во-вторых, *случайная величина, плотность вероятностей* которой приближается к *форме* колокола, содержит в себе *минимум* информации о причинно-следственных связях процесса. И в-третьих, *кривая* плотности вероятностей симметрична относительно *центра* распределения.

А как в технологических процессах? На рис. 2.18 изображена *гистограмма распределения* механической скорости бурения ($n$=97, опытный критерий $X^2_{оп}$=5,92<$X^2_{0,05}$=11,07), а на рис. 2.19 гистограмма распределения величин проходки на алмазную коронку ($n$=79, опытный критерий $X^2_{оп}$=5,155<$X^2_{0,05}$=11,07) [16, 19]. Внешне они похожи. Сплошными линиями показаны соответствующие нормальные распределения с параметрами эмпирических.

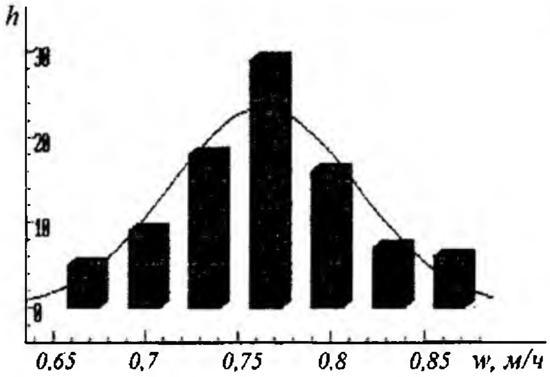


Рис. 2.18. Гистограмма распределения механической скорости бурения

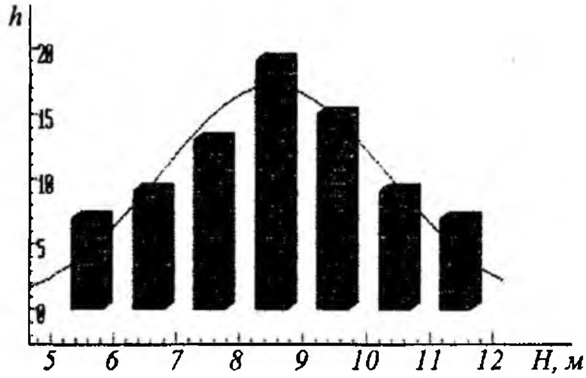


Рис. 2.19. Гистограмма распределения величин проходки на алмазную коронку

Попробуем *обработать результаты* анализа кернов "пустых" разведочных скважин на проницаемость (рис. 2.20) и пористость (рис. 2.21). Формы гистограмм тоже напоминают колокол. Сплошными линиями показаны соответствующие нормальные распределения с параметрами эмпирических. Хи-квадрат критерии равны, соответственно, $X^2_{оп}$=12,26 и $X^2_{оп}$=8,86. Результаты проверки *основной гипотезы* для случайных выборок образцов горных пород на проницаемость и пористость, соответственно, таковы: ($n$=171; $X^2_{оп}$=12,26<$X^2_{0,05}$=12,59) и ($n$=164; $X^2_{оп}$=8,86<$X^2_{0,05}$=12,59).

На рис. 2.7,а изображены результаты седиментационного анализа суспензии цемента в дистиллированной воде. Кривая плотности распределения цементных частиц по *логарифмам* радиусов тоже напоминает колокол. Если бы не подписи, все эти рисунки можно было бы перепутать. Значит, и здесь наблюдается та же картина, что и в азартных (бессмысленных, по существу) играх - *множество факторов*, влияющих на течение процесса, но каждый из факторов по величине мал по срав-

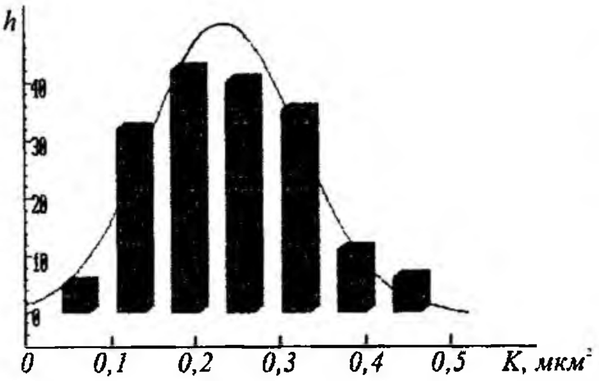



Рис. 2.20. Гистограмма распределения проницаемости образцов горных пород (керны "пустых" разведочных скважин)

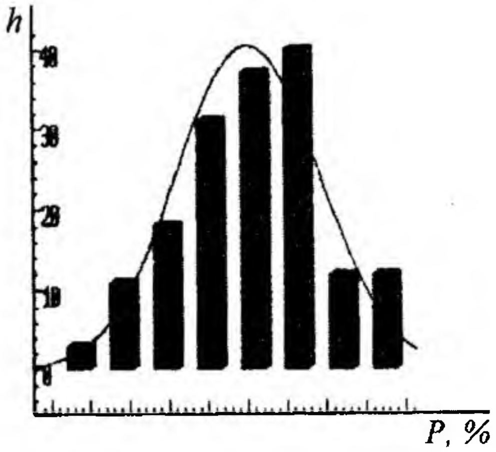



Рис. 2.21. Гистограмма распределения пористости образцов горных пород (керны "пустых" разведочных скважин)

нению с суммой. Другими словами, множество мелких *причин* приводят к соответствующему множеству *следствий*, и в *конечном* итоге интегральная *связь* между причинами и следствиями становится слабо выраженной или теряется вовсе. Процесс становится безличным, в нём теряется *информация* о причинно-следственных связях, - процесс развивается **случайным образом**, причём эта случайность в *пределе* становится *нормой*.

Но стоит одному или нескольким факторам выделиться из "серой массы", приобрести величину, достаточную для оказания существенного влияния на развитие процесса, и картина меняется. Например, в случае гидратации цемента достаточно добавить в воду затворения некоторые реагенты, и распределение частиц по радиусам изменяется. На рис. 2.7,б приведена плотность распределения частиц цементного раствора с добавлением реагентов, разобщающих частицы цементного раствора в процессе гидратации. В такой *системе* механизм агрегации частиц цементного раствора изменяется, и распределение частиц по радиусам приобретает *асимметричную* форму - *максимум количества* частиц сдвинут в сторону более мелких частиц (рис. 2.7,б). Такой цементный раствор является седиментационно устойчивым, он *необходим* для цементирования наклонно направленных и горизонтальных скважин. А сколько информации о влиянии тех или иных реагентов на процесс гидратации можно извлечь из результатов таких *экспериментов*?! Исследование проницаемости и пористости образцов кернов Уваровского нефтяного месторождения показывает на существенное отличие формы *гистограмм* от колоколообразной формы (рис. 2.22 и 2.23). Результаты проверки основной гипотезы для образцов кернов продуктивных скважин на проницаемость и пористость, соответственно, таковы: ($n$=181;

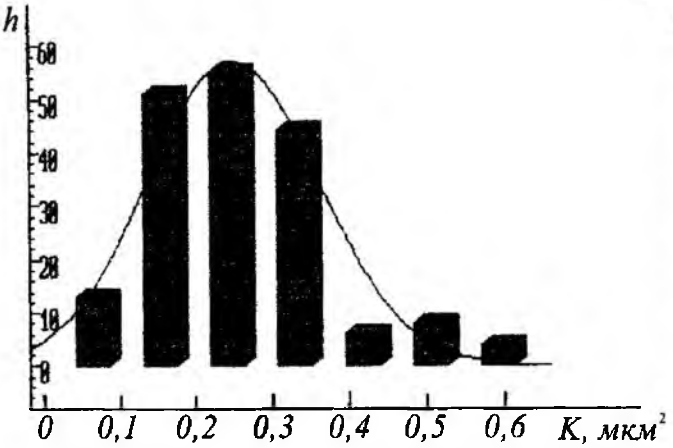



Рис. 2.22. Гистограмма распределения величин абсолютной проницаемости (мкм$^2$) образцов горных пород нефтяного пласта Уваровского месторождения (пласты CIa, CII, CIV)

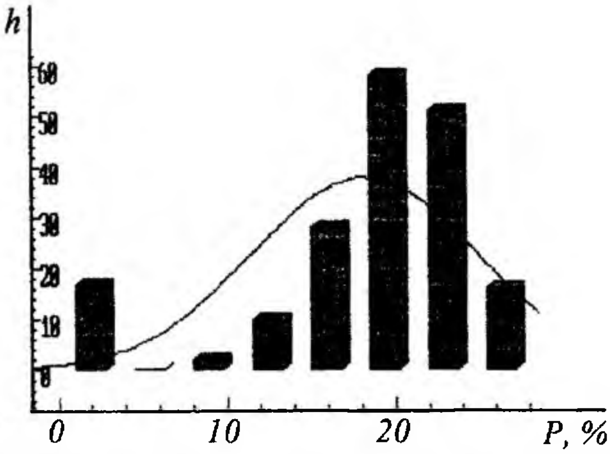



Рис. 2.23. Гистограмма распределения величин пористости (%) образцов горных пород нефтяного пласта Уваровского месторождения (пласты CIa, CII, CIV)

$X^2_{оп}=30.9<X^2_{0,05}=11,07$) и ($n=182$; $X^2_{оп}=203,7<X^2_{0,05}=12,59$). Получается, что асимметрия плотностей распределения пористости и проницаемости является сопутствующим признаком присутствия нефти или газа.

Бывают случаи, когда на результат *события* оказывает существенное влияние не выделение одного или нескольких факторов из "серой массы", а методика испытания. Известно немало утверждений, основанных на незнании *сущности* процесса, например: "бутерброд всегда падает маслом вниз". Группа сотрудников университета города Колумбус (США), воодушевившись на экспериментальную проверку этого широко распространённого утверждения, доказала, что *вероятность* такого огорчающего события 80% [22]. Но исход падения бутерброда маслом вниз в восьмидесяти процентах случаев обусловлен не законом Мерфи ("Всё, что может плохо закончиться, закончится плохо!"), а высотой стола (73 см). Падая с такой высоты, бутерброд просто не успевает сделать полный оборот. Когда же бутерброды стали ронять с трёхметровой высоты, то ровно в половине случаев они оказывались на полу маслом вверх. Вспомним подбрасывание монеты. Играющие неукоснительно соблюдают два условия - достаточно энергичное закручивание монеты и высоту подбрасывания, превышающую диаметр монеты раз в пятьдесят. Если хотя бы одно условие не выполнилось, то результат оспоривается.

## 2.7. Стандартизация распределений

Диапазон *распределения физических величин*, о которых выше шла речь, достаточно широк. Механическая скорость бурения изменяется от 0,65 до 0,88 м/ч (рис. 2.18), проходка на алмазную коронку от 5,1 до 11,9 м (рис. 2.19), пористость образцов из непродуктивных пластов от 10 до 28%, (рис. 2.21), абсолютная проницаемость "пустой" породы от 0,025 до 0,49 мкм$^2$ (рис. 2.20), а размер пляжной гальки от 10 до 50 мм, (рис. 2.17). Естественно, что на *количественном* уровне сравнивать их достаточно неудобно. Хорошо бы привести все эти физические величины к сопоставимым числам. Одним из приёмов является приведение физических величин к *безразмерному* виду. В науке есть несколько приёмов приведения физических величин к безразмерному виду.

Общим случаем преобразования физических величин к безразмерному виду является деление исходной *переменной* величины на аналогичную постоянную. В *зависимости* от того, какая физическая величина принимается за постоянную, различают *нормирование* переменных, кодирование переменных и приведение к параметрическому виду. При нормировании переменных за постоянную величину принимается *интервал* $y_{max}-y_{min}$, при кодировании переменных, в задачах планирования *эксперимента*, половина этого интервала, а в последнем случае - исходя из конкретных обстоятельств. В нашем случае рассматриваются распределения *случайных величин*, главными параметрами которых являются *среднее значение*, *дисперсия* и *квадратичное отклонение* (которое в этом случае удобнее называть *стандартным отклонением*), поэтому предпринимаемая нами *процедура* в общем случае будет называться приведением к параметрическому виду, а в частном - *стандартизацией*. Рассмотрим её подробнее.

Поскольку мы пока рассматриваем *симметричные* распределения, прежде чем производить приведение переменных к *параметрическому* виду, целесообразно получить распределения с *центром* в нуле, т.е. произвести центрирование распределений. Центрирование случайной величины производится путём вычитания из неё среднего значения *выборки* (1.282), (1.283):

$$\text{æ} = x - M_x, \qquad (2.16)$$

$$\text{æ}_1 = x_1 - \bar{x}, \qquad (2.17)$$

где $M_x$ и $\bar{x}$ - *математическое ожидание* и его *оценка* соответственно. Получаемое в *результате* распределение называется центрированным.

Следующий вопрос, который возникает перед нами, - а какую физическую величину принять за постоянную при делении центрированной? Поскольку в данном случае вряд ли есть смысл искать какую-либо общую постоянную величину, можно попробовать следующий *параметр*, характеризующий *выборку*, - *выборочное* стандартное отклонение, $s_x$. Вот на стандартное отклонение $s_x$ мы и будем делить центрированную величину каждого распределения:

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s_x}, \qquad (2.18)$$

по аналогии с *процедурой стандартизации нормального распределения* (см. формулы (1.121), (1.193), (1.225), (1.299), (2.20)):

$$z = \frac{x - M_x}{б_x}. \qquad (2.19)$$

где $M_x$ - *математическое ожидание*, а $\bar{x}$ - его оценка, $б_x$ - стандартное отклонение, а $s_x$ - его оценка, точнее, квадратичное отклонение или выборочный стандарт. См. также (1.223), (1.224), (2.22) и (2.23).

Описанная процедура называется стандартизацией случайной величины, в результате получается распределение с центром в нуле. Результаты стандартизации приведены в таблице 3, а на рис. 2.24 изображены все стандартизованные распределения.

*Таблица 3.*

Результаты стандартизации распределения случайных величин характеризующих механическую скорость бурения, проходку на алмазную коронку, пористость и проницаемость

| | Физическая величина | Физические значения случайных величин<br>Стандартизованные значения случайных величин | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ∞← −2,0 −1,2 −0,4 0,4 1,2 2,0 →∞ | | | | | | |
| 01 | Механическая скорость бурения, м/ч | 3 | 6 | 23 | 29 | 19 | 6 | 4 |
| | | 0,033 | 0,067 | 0,254 | 0,322 | 0,211 | 0,067 | 0,045 |
| 02 | Проходка на алмазную коронку, м | 0 | 7 | 21 | 24 | 18 | 9 | 0 |
| | | 0 | 0,089 | 0,266 | 0,304 | 0,228 | 0,114 | 0 |
| 03 | Пористость пластов "пустых" разведочных скважин | 4 | 16 | 33 | 50 | 45 | 14 | 2 |
| | | 0,024 | 0,097 | 0,201 | 0,305 | 0,274 | 0,085 | 0,012 |
| 04 | Проницаемость пластов "пустых" разведочных скважин | 2 | 18 | 42 | 52 | 36 | 15 | 6 |
| | | 0,012 | 0,105 | 0,246 | 0,304 | 0,211 | 0,088 | 0,035 |

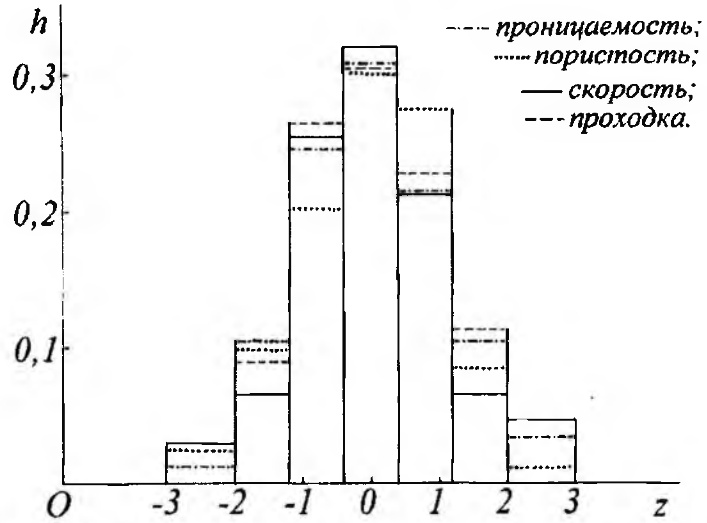



Рис. 2.24. Распределения стандартизованных случайных величин характеризующих механическую скорость бурения, проходку на алмазную коронку, пористость и проницаемость (общая площадь столбиков каждой выборки равна 1)

Поскольку все распределения достаточно похожи, значит общим в них как раз и является *множество* причинно-следственных *связей*, каждая из которых незначительна по сравнению с общей суммой. Поскольку распределения таких разных физических величин имеют весьма близкие характеристики, есть смысл описать их одним *уравнением*. Таким уравнением является закон **нормального распределения**.

## 2.8. Нормальное распределение

**Нормальное распределение**, распределение Гаусса - *предельный закон распределения событий* и *явлений*, являющихся *результатом* действия *множества детерминированных факторов* (физических *причин*, *случайно* сочетающихся), каждый из которых по интенсивности не выделяется на фоне других. **Хаос** и *динамичность* в *причинно-следственных связях* и их результат *математически* выражаются *экспоненциальной функцией*:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi б_x^2}} e^{-(x-M_x)^2/2б_x^2}, \qquad (2.20)$$

где $p(x)$ - *плотность вероятностей случайной величины* $X$, $M_x$ - *математическое ожидание* случайной величины $X$, $б^2{}_x$ - *генеральная дисперсия*. Математическое ожидание и дисперсия полностью *определяют* расположение и *форму кривой* $y=f(x;\ M_x,\ б_x)$, (Рис. 2.25).

Нормальное распределение было найдено в 1733 г. А.Муавром и независимо в 1770-1771 гг. Даниилом Бернулли как предельная *форма*

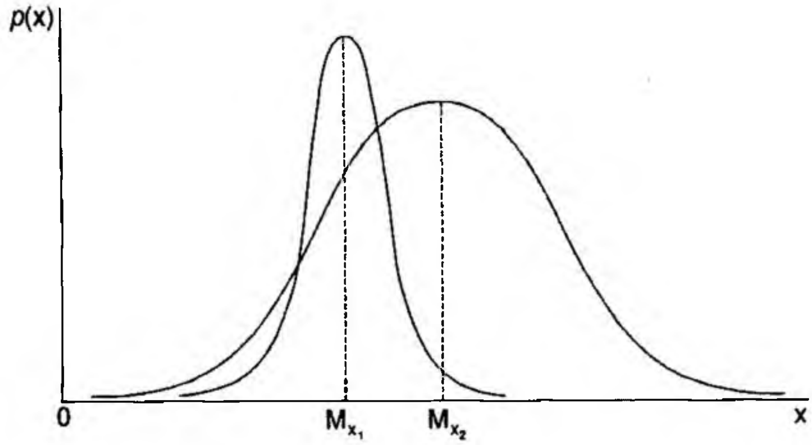



Рис. 2.25. Графики плотности нормального распределения для различных значений математического ожидания и дисперсии (площадь под каждой кривой плотности вероятностей равна 1)

*биномиального распределения* (*анализ частоты* рождений девочек и мальчиков). Позднее, в 1809 году, было формализовано К.Гауссом (закон распределения *ошибок наблюдений*), в 1812 году П.Лапласом (доказал "теорему Муавра-Лапласа" заново) и наконец в 1859 г. Дж.Максвеллом (закон распределения молекул *идеального* газа по скоростям). *Понятие* "нормальное распределение" предложил К.Пирсон приблизительно в 1894 г.

*График* плотности *нормального распределения* называется нормальной кривой или кривой Гаусса (*Gauss Carl Friedrich*; 1777-1855), (рис.1.1,з, 1.20,б, 1.34,2, 1.43, 1.52,2, 2.25). Кривая нормального распределения $y=f(x;\ M_x,\ б_x)$ *симметрична* относительно ординаты, проходящей через точку $x=M_x$, и имеет в этой точке единственный *максимум*, равный $1/\sqrt{2\pi б^2{}_x}$. Квадратный корень из дисперсии называется *стандартным отклонением* или *стандартом*. *Обозначается* греческой буквой $б_x$. *Вероятное отклонение* для нормального распределения равно $2/3б_x \approx 0,6745б_x$. Симметричное распределение вероятностей случайной величины будет подчиняться закону нормального распределения, если в *интервале* $M_x-б_x<X<M_x+б_x$ будет находиться 0,683 значений случайной величины, в интервале $M_x-2б_x<X<M_x+2б_x$ - 0,954 значений, а в интервале $M_x-3б_x<X<M_x+3б_x$) - 0,997 значений. Перегибы кривой наблюдаются при значениях $x=M_x-б_x$ и $x=M_x+б_x$. Площадь, заключённая под кривой нормального распределения, равна единице. Это означает *достоверность* (более того, *неизбежность*) принятия случайной величиной какого-либо значения в интервале от $-\infty$ до $+\infty$. Симметричность кривой плотности вероятностей означает, что причинно-следственные связи действующие при формировании признака (в системе) уравновешивают друг друга.

Закон нормального распределения вероятностей занимает центральное место в математической статистике и теории вероятностей, проявления этого закона достаточно часто встречаются в *природе*. По сравнению со всеми другими распределениями случайных величин он наиболее глубоко разработан теоретически, и все эмпирические распределения вначале принято сравнивать с ним.

Достаточно часто закон нормального распределения характеризует **естественный** фон (*шум*) той же природы, что и *среда*, в которой происходит событие, явление или развивается *процесс*. Иногда, как в случаях *Максвелла распределения*, излучений отдалённых звёзд, это одно и то же. В тех случаях, когда на фоне шума выделяется значимый фактор ("полезный сигнал"), принимающий существенное участие (влияние) в формировании случайной величины, можно говорить о значимом или незначимом отличии распределения случайной величины во времени и/или пространстве от закона нормального распределения.

*Множество* событий, происходящих в природе, происходят случайно в результате одновременного влияния на развитие события большого *числа независимых детерминированных причин* (*факторов*), из которых *максимальная* по *величине* мала по сравнению со всей суммой. В *пределе*, случайность начинает преобладать там и тогда, где и когда детерминизма (причинно-следственных связей) становится достаточно для превращения в хаос*, из которого рождается нормальное распределение событий в пространстве и/или во времени. Другими словами, *количество* переходит в новое *качество*.

При этом множество причинно-следственных связей компенсируют друг друга, распределение событий в пространстве и/или во времени становится *симметричным*, а *информативность* событий рассеивается. Обычно необратимо (например, *невозможно* указать *действительные* причины, влияющие на показатель окатанности галек разного размера или распределение пляжной гальки по величине осей [39]), иногда обратимо (при *математической обработке* результатов геофизических исследований скважин с помощью *метода* сглаживания можно извлечь полезный сигнал на фоне *шума* [23, 25, 67]). Аналогично, развивающиеся цепи причинно-следственных связей *детерминированных* по своей физической сущности явлений приводят к детерминированно-стохастическому про-

---

*Примечание 19. Интересно заметить, что **газ** (< *нем., голл.* Gas или *франц.* gas) является искусственным новообразованием брюссельского химика И.Б. ван Гельмонта (1577-1644) на основании слова Chaos - "хаос", найденного им у Парацельса. - *М.Фасмер*; (1886-1962).

цессу существования белковых и небелковых тел. Множество причин влияющих прямо или косвенно на рост человека (рис. 2.15), на размеры пляжной гальки (рис. 2.17), на механическую скорость бурения (рис. 2.18), на проходку (рис. 2.19), на проницаемость и пористость горных пород (рис. 2.20, рис. 2.21) приводят к нормальному распределению (рис. 2.24, рис. 2.25). Одним из практических следствий закона нормального распределения является *правило трёх сигма.*

Некоторый интерес может представлять совместное распределение двух независимых нормально распределённых случайных величин (рис. 2.26).

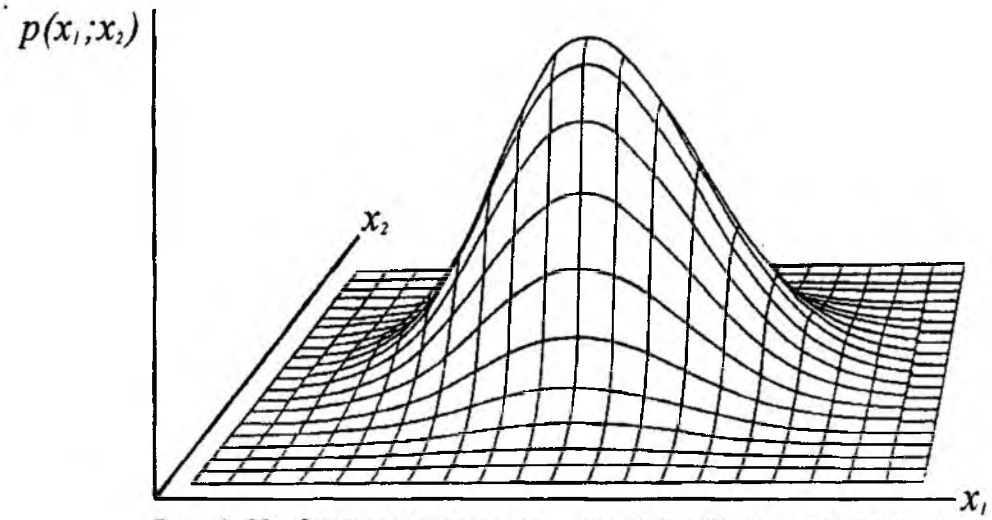



Рис. 2.26. Совместная плотность вероятностей двух независимых нормально распределённых случайных величин

Классическими примерами *распределения событий,* подчиняющихся закону нормального распределения как точного, являются *закон* распределения *ошибок наблюдений* и закон распределения молекул идеального газа по скоростям. Биномиальное распределение в пределе также сводится к нормальному распределению. Много ли смысла в этих распределениях с точки зрения *физического* содержания? Много ли *информации о причинно-следственных связях* в процессе подбрасывания монеты, наблюдения её взлёта и падения? Конечно, играющие, оспоривая *результат,* могут обсуждать детали отдельного испытания, но как только испытаний становится **много,** в действие вступает *больших чисел закон* и *кривая* распределение вероятностей результатов становится похожей на колокол (рис. 2.8). Приблизительно то же самое происходит при рассмотрении игр с двумя костями и *гипотетических* игр с тремя и более костями (рис. 2.10, б, рис. 2.11).

Достаточно часто нормальное распределение является предельным законом для суммы большого числа *детерминированных* воздействий, каждое из которых подчинено своему закону распределения. По сравнению со всеми другими распределениями нормальное распределение содержит меньше *информации* о *явлении*, чем любое другое распределение с тем же *средним значением* и *дисперсией*. Другими словами, замена исследуемого распределения эквивалентным нормальным не может привести к переоценке точности *наблюдений*.

Примеры геологических характеристик, подчиняющихся закону нормального распределения: топография, плотность морского песка, показатель сферичности для *заданного* размера частиц, показатель окатанности галек разного размера, уровень воды в скважине в течение времени, плотность гидросети, удельный вес образцов из гранитного массива, плотность заполнения зёрен в песчанике, размеры беспозвоночных ископаемых организмов, угол наклона морского пляжа, угол склона речной долины, угол падения косой слоистости песчаника, пористость песчаника, содержание минералов в породах, содержание влаги в осадочных породах, содержание некоторых химических элементов [39].

См. также статьи *Нормальное распределение, Причинность*.

## 2.9. Стандартизованное нормальное распределение

Аналогично той *процедуре*, которую мы применили при обобщении разных *распределений*, можно произвести *стандартизацию* нормального распределения. В *результате* мы получим выражение, которое можно интегрировать в общем виде и табулировать (см. Приложение 3). Стандартизованное нормальное распределение - нормальное распределение с нулевым *математическим ожиданием* и единичной *дисперсией*, *плотность вероятности* которого выражается *формулой*:

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, \qquad (2.21)$$

где $z$ - *стандартизованная случайная величина*, *определяемая* для *совокупности* гипотетическим выражением:

$$z = \frac{x - M_x}{б_x}, \qquad (2.22)$$

где $M_x$ - *математическое ожидание*, $б_x$ - *стандартное отклонение* или *стандарт* (значения $p(z)$ (ординаты) см. приложение 1). Для *выборки*:

$$z_1 = \frac{x_1 - m_x}{s_x}, \qquad (2.23)$$

где $m_x$ - *оценка математического ожидания*, а $s_x$ - *квадратичное отклонение* или выборочный стандарт. См. также (1.223) и (1.224). В частном случае:

$$z_1 = \frac{x_1 - \bar{x}}{s_x},$$

где $\bar{x}$ - *арифметическое среднее*.

Можно доказать, что точками перегиба *кривой* плотности вероятности служат точки $x=\pm 1$ (в общем случае нормального распределения точки $x=M_x \pm \sigma_x$). *Функция распределения вероятностей* определяется выражением:

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz. \qquad (2.24)$$

Плотность вероятностей $p(z)$ и функция распределения вероятностей $F(z)$ стандартизованного нормального распределения приведены на рис. 2.27. Максимум плотности $p(z)$ соответствует $1/\sqrt{2\pi} = 0,3987$.

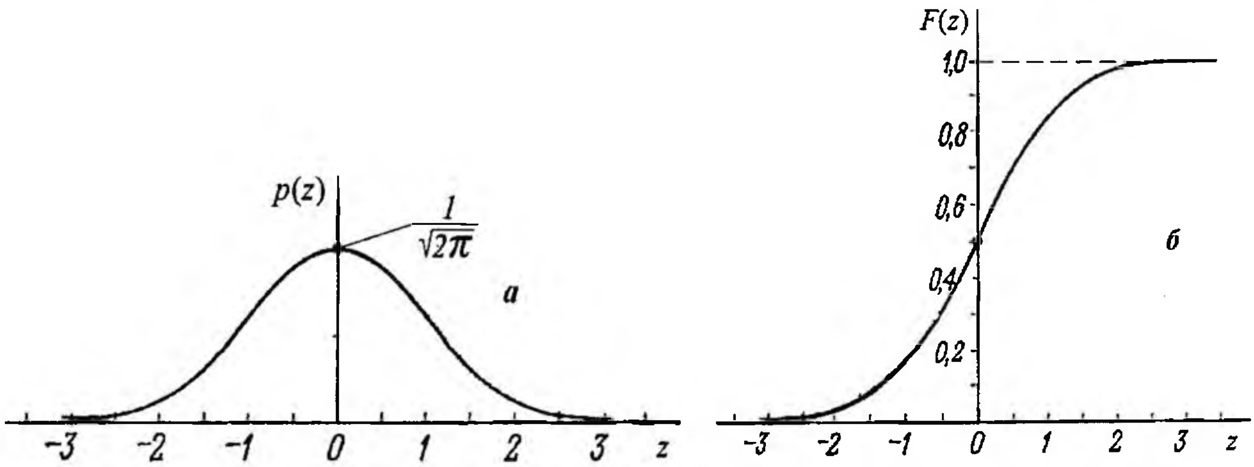



Рис. 2.27. Плотность вероятностей $p(z)$ (а) и функция распределения вероятностей $F(z)$ (б) стандартизованного нормального распределения (площадь под кривой плотности вероятностей равна 1)

Выражение (2.24) ещё называют *кумулятивной функцией распределения* стандартного нормального распределения; в отличие от нормального (2.20) интеграл (2.24) табличный. Функция распределения $F(z)$ определяет *вероятность* того, что случайная величина $Z$ примет значение меньшее, чем $z$:

$$F(z)=P(Z<z). \qquad (2.25)$$

Вероятность *наблюдения* случайной величины $Z$ в *интервале* $2z$ с *центром* в нуле (в математическом ожидании стандартизованной случайной величины $z$) равна:

$$P(-z<Z<z)=P(Z<z)-P(Z<-z)=2P(Z<z)-1=2\Phi(|z|)-1. \qquad (2.26)$$

Очевидно, что вероятность наблюдения случайной величины $Z$ за пределами интервала $(-z\div z)$ будет равна сумме двух площадей под кривой по её краям, т.е.

$$P(Z>|z|)=P(Z<-z)+P(Z>z)=2\Phi(-|z|)=2\{1-\Phi(|z|)\}. \qquad (2.27)$$

Это следует из факта *симметричности* кривой $p(z)$.

С функцией стандартизованного нормального распределения (2.24) связан *Лапласа интеграл* (1.84):

$$L(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-z^2} dz \qquad (2.28)$$

формулой $L(z)=2\Phi(\sqrt{2}z)-1$. (2.29)

По аналогии с нормальным распределением можно выделить интервалы кратные стандартному отклонению (в данном случае $\sigma_x=1$) в пределах которых заключены площади 0,683, 0,954 и 0,997 (рис. 2.28).

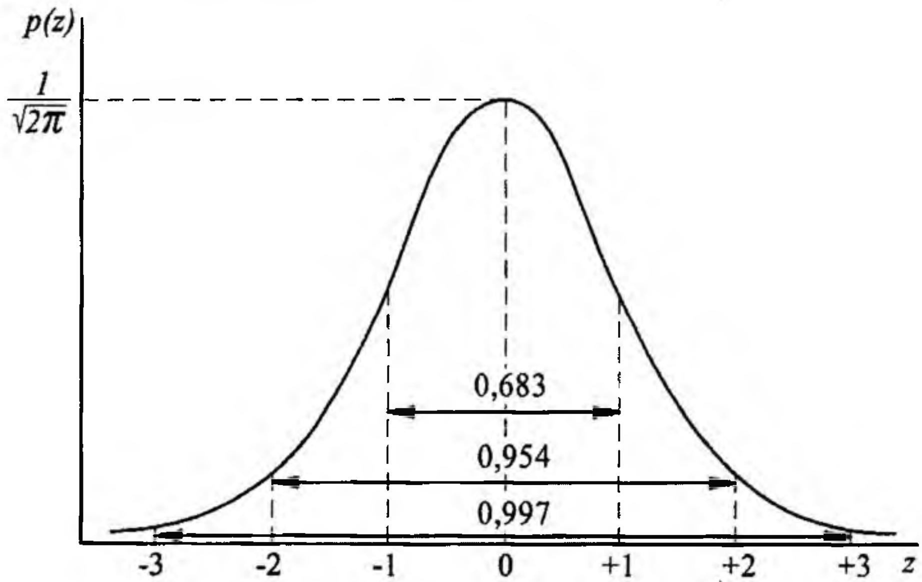



Рис. 2.28. Площади под кривой плотности вероятностей стандартизованного нормального распределения, заключённые в пределах интервалов, кратных стандартному отклонению (общая площадь под кривой плотности вероятностей равна 1)

При проверке статистических гипотез практический интерес представляют критические значения *стандартизованной случайной величины* $z^\alpha$, которые определяют для принимаемого уровня значимости $\alpha$, руководствуясь правилом (1.183):

$$P\left(z > z^{\alpha}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z^{\alpha}}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = \alpha,$$

где $\alpha$ - площадь под кривой *стандартизованной плотности вероятностей* $p(x)$, характеризующая вероятность ошибочно отвергнуть верную нулевую гипотезу (рис. 2.29. См. также *уравнение* (1.89) и соответствующий раздел). Табулированные значения $z$ при различных уровнях значимости $\alpha$ приведены в Приложении 4.

См. также *Лапласа функция*.

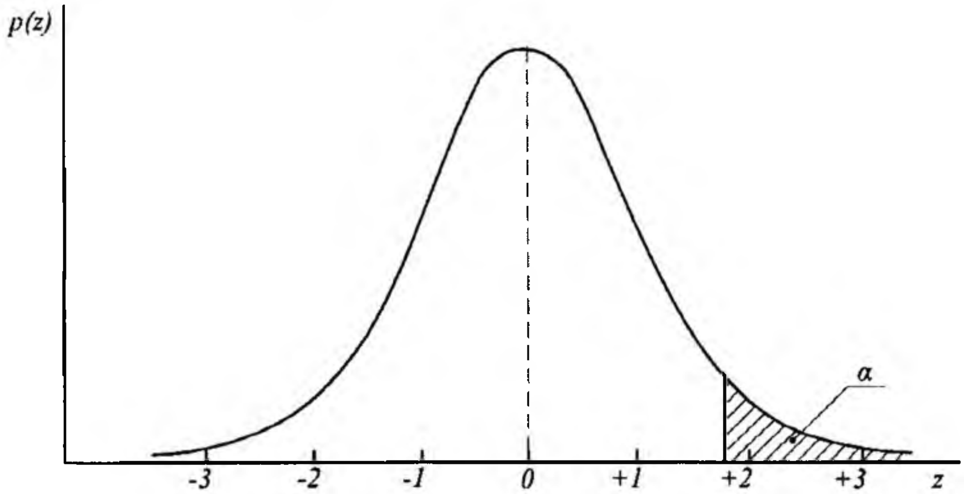



Рис. 2.29. Плотность вероятностей стандартизованного нормального распределения. Заштрихована критическая область отклонения нулевой гипотезы, составляющая $\alpha$ площади под кривой (общая площадь под кривой плотности вероятностей равна 1)

**Пример 2. Стандартизация выборочного распределения**

*Результаты* определения физической проницаемости образцов кернов продуктивных и непродуктивных пластов нефтяных месторождений представлены в виде следующего массива *данных*, $K \cdot 10^6$, представляющего собой, по существу, *случайную выборку*:

0,175; 0,175; 0,15; 0,27; 0,44; 0,182; 0,183; 0,21; 0,25;
0,225; 0,358; 0,32; 0,265; 0,28; 0,125; 0,148; 0,145; 0,31;
0,15; 0,168; 0,37; 0,32; 0,21; 0,303; 0,1; 0,25; 0,17;
0,19; 0,19; 0,125; 0,19; 0,088; 0,315; 0,21; 0,48; 0,025;
0,265; 0,295; 0,23; 0,265; 0,232; 0,232; 0,232; 0,291; 0,232;
0,232; 0,232; 0,232.

В этом примере рассматривается задача *формализации* закона эмпирического распределения. При этом предполагается, что методика эксперимента по определению физической проницаемости образцов кернов отработана и достигнута необходимая точность. Керны отбирались из различных скважин и различных пластов. Образцы кернов для измерения проницаемости отбирались геологом согласно задачам исследования, его концепции, опыту и интуиции. Известно, что мерой центральной тенденции в распределении случайной величины в пространстве и/или во времени является математическое ожидание. Математическое ожидание совокупности - некоторая абстрактная величина, которую можно было бы определить, осуществив бесконечно большое число измерений. В реальной жизни мы всегда имеем выборку той или иной размерности и вместо неизвестного математического ожидания вынуждены вычислять оценку. Для одного и того же математического ожидания существует множество оценок, называемых средним значением выборки. Среднее значение выборки - параметр, определяемый сущностью задачи и концепцией исследователя.

В нашем случае сама совокупность полностью не определена. Это может быть предполагаемое месторождение нефти размером от долей кубического километра до нескольких, а, в пределе, весь земной шар. Математическое ожидание становится вдвойне неопределённым параметром. Наша конкретная выборка кернов является ничтожно малой долей предполагаемого месторождения нефти. Добавление или изъятие образцов кернов изменит как математическое ожидание, так и его оценку (поскольку и самого закона распределения ещё нет!). Поэтому использование в процедуре стандартизации арифметического среднего - дань традиции и факту его оптимальности в случае нормально распределённых ошибок измерений.

Сортировка *элементов* случайной выборки по *величине* позволяет получить так называемый *вариационный ряд*:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,025; | 0,088; | 0,1; | 0,125; | 0,125; | 0,145; | 0,148; | 0,15; | 0,15; |
| 0,168; | 0,17; | 0,175; | 0,175; | 0,182; | 0,183; | 0,19; | 0,19; | 0,19; |
| 0,21; | 0,21; | 0,21; | 0,225; | 0,23; | 0,232; | 0,232; | 0,232; | 0,232; |
| 0,232; | 0,232; | 0,232; | 0,25; | 0,25; | 0,265; | 0,265; | 0,265; | 0,27; |
| 0,28; | 0,291; | 0,295; | 0,303; | 0,31; | 0,315; | 0,32; | 0,32; | 0,358; |
| 0,37; | 0,44; | 0,48. | | | | | | |

В общем случае, *стандартизацию* выборочного *распределения* можно произвести и без сортировки, но поскольку *конечными* целями *статистической обработки* данных являются построение *эмпирической функции* распределения ($F(x)-x$) или *гистограммы* распределения ($p(x)-x$), определение закона распределения *случайной величины* и характеристик распределения, то построение вариационного ряда *необходимо*.

После сортировки элементов выборки по величине можно указать *размах выборки*, он равен $K_{max}-K_{min}=(0,48-0,025)\cdot10^{-6}=0,455\cdot10^{-6}$ м$^2$.

Вычисленные по *формуле* (1.55) среднее значение *коэффициента* проницаемости и по формуле (1.54) *дисперсия* случайной величины равны $K=0,23\cdot10^{-6}$ м$^2$ и $s^2{}_K=0,007366\cdot10^{-12}$ соответственно. *Квадратичное* (*стандартное*) *отклонение* равно $0,08583\cdot10^{-6}$. Вычитая из каждого элемента массива оценку математического ожидания, $m_x$:

$$\varkappa_i = x_i - m_x;$$

в нашем случае среднее арифметическое:

$$\varkappa_i = x_i - \bar{x},$$

получим значения *центрированной* случайной величины:

-0,2049, -0,1419, -0,1299, -0,1049, -0,1049, -0,0849, -0,0819, -0,0799, -0,0799, -0,0619, -0,0599, -0,0549, -0,0549, -0,0479, -0,0469, -0,0399, -0,0399, -0,0399, -0,0199, -0,0199, -0,0199, -0,004896, 0,0001042, 0,002104, 0,002104, 0,002104, 0,002104, 0,002104, 0,002104, 0,002104, 0,0201, 0,0201, 0,0351, 0,0351, 0,0351, 0,0401, 0,0501, 0,0611, 0,0651, 0,0731, 0,0801, 0,0851, 0,0901, 0,0901, 0,1281, 0,1401, 0,2101, 0,2501.

Результаты стандартизации *распределения* пористости пласта по формуле (2.23) представлены ниже.

-2,387; -1,653; -1,513; -1,222; -1,222; -0,9892; -0,9542; -0,9309; -0,9309; -0,7212; -0,6979; -0,6396; -0,6396; -0,5581; -0,5464; -0,4648; -0,4648; -0,4648; -0,2318; -0,2318; -0,2318; -0,05704; 0,001214; 0,02452; 0,02452; 0,02452; 0,02452; 0,02452; 0,02452; 0,02452; 0,2342; 0,2342; 0,4090; 0,4090; 0,4090; 0,4673; 0,5338; 0,7120; 0,7586; 0,8518; 0,9333; 0,9916; 1,050; 1,050; 1,493; 1,632; 2,448; 2,914.

Продублируем результаты расчётов, представив их в таблице 4.

Для построения гистограммы эмпирического распределения массив значений случайной величины (*размах выборки*) необходимо разделить на $k$ *интервалов* и подсчитать *количество* значений, попавших в каждый $j$-тый интервал. Количество интервалов определяем по формулам (1.52), (1.275):

$$k=1+3,322\lg(48)=6,58\approx7,$$

где 48 - *число наблюдений* в выборке.

*Таблица 4.*

Стандартизация выборочного распределения

| $i$ | Коэффициент физической проницаемости, $K \cdot 10^6$ м$^2$ | Вариационный ряд | Центрированная случайная величина | Стандартизованная случайная величина |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,175 | 0,025 | -0,2049 | -2,387 |
| 2 | 0,175 | 0,088 | -0,1419 | -1,653 |
| 3 | 0,15 | 0,1 | -0,1299 | -1,513 |
| 4 | 0,27 | 0,125 | -0,1049 | -1,222 |
| 5 | 0,44 | 0,125 | -0,1049 | -1,222 |
| 6 | 0,182 | 0,145 | -0,0849 | -0,9892 |
| 7 | 0,183 | 0,148 | -0,0819 | -0,9542 |
| 8 | 0,21 | 0,15 | -0,0799 | -0,9309 |
| 9 | 0,25 | 0,15 | -0,0799 | -0,9309 |
| 10 | 0,225 | 0,168 | -0,0619 | -0,7212 |
| 11 | 0,358 | 0,17 | -0,0599 | -0,6979 |
| 12 | 0,32 | 0,175 | -0,0549 | -0,6396 |
| 13 | 0,265 | 0,175 | -0,0549 | -0,6396 |
| 14 | 0,28 | 0,182 | -0,0479 | -0,5581 |
| 15 | 0,125 | 0,183 | -0,0469 | -0,5464 |
| 16 | 0,148 | 0,19 | -0,0399 | -0,4648 |
| 17 | 0,145 | 0,19 | -0,0399 | -0,4648 |
| 18 | 0,31 | 0,19 | -0,0399 | -0,4648 |
| 19 | 0,15 | 0,21 | -0,0199 | -0,2318 |
| 20 | 0,168 | 0,21 | -0,0199 | -0,2318 |
| 21 | 0,37 | 0,21 | -0,0199 | -0,2318 |
| 22 | 0,32 | 0,225 | -0,004896 | -0,05704 |
| 23 | 0,21 | 0,23 | 0,0001042 | 0,001214 |
| 24 | 0,303 | 0,232 | 0,002104 | 0,02452 |
| 25 | 0,1 | 0,232 | 0,002104 | 0,02452 |
| 26 | 0,25 | 0,232 | 0,002104 | 0,02452 |
| 27 | 0,17 | 0,232 | 0,002104 | 0,02452 |
| 28 | 0,19 | 0,232 | 0,002104 | 0,02452 |
| 29 | 0,19 | 0,232 | 0,002104 | 0,02452 |
| 30 | 0,125 | 0,232 | 0,002104 | 0,02452 |
| 31 | 0,19 | 0,25 | 0,0201 | 0,2342 |
| 32 | 0,088 | 0,25 | 0,0201 | 0,2342 |
| 33 | 0,315 | 0,265 | 0,0351 | 0,4090 |
| 34 | 0,21 | 0,265 | 0,0351 | 0,4090 |
| 35 | 0,48 | 0,265 | 0,0351 | 0,4090 |
| 36 | 0,025 | 0,27 | 0,0401 | 0,4673 |
| 37 | 0,265 | 0,28 | 0,0501 | 0,5338 |
| 38 | 0,295 | 0,291 | 0,0611 | 0,7120 |
| 39 | 0,23 | 0,295 | 0,0651 | 0,7586 |
| 40 | 0,265 | 0,303 | 0,0731 | 0,8518 |
| 41 | 0,232 | 0,31 | 0,0801 | 0,9333 |
| 42 | 0,232 | 0,315 | 0,0851 | 0,9916 |
| 43 | 0,232 | 0,32 | 0,0901 | 1,050 |
| 44 | 0,291 | 0,32 | 0,0901 | 1,050 |
| 45 | 0,232 | 0,358 | 0,1281 | 1,493 |
| 46 | 0,232 | 0,37 | 0,1401 | 1,632 |
| 47 | 0,232 | 0,44 | 0,2101 | 2,448 |
| 48 | 0,232 | 0,48 | 0,2501 | 2,914 |

Величина интервала в физических единицах:

$$\Delta_ф=(0,48-0,025)\cdot 10^{-6}/7=0,65\cdot 10^{-7}\ м^2.$$

Величина интервала безразмерная:

$$\Delta=2,914-(-2,387)/7=0,7573.$$

Границы интервалов выборки определяются путём $k$ последовательных прибавлений величины интервала $\Delta$ к предыдущему значению границы (начиная с первого значения) по формуле:

$$\gamma_j=z_1+j\Delta,$$

где $z_1$ - минимальное значение стандартизованной случайной величины, $j$ - номер интервала, $1\leqslant j\leqslant k$. Границы интервалов выборки в физических единицах определяются аналогично путём $k$ последовательных прибавлений величины интервала $\Delta_ф$ к предыдущему значению границы (начиная с первого значения вариационного ряда) по аналогичной формуле:

$$\gamma_{фj}=x_1+j\Delta_ф,$$

где $x_1$ - первый член вариационного ряда, $j$ - номер интервала, $1\leqslant j\leqslant k$. Результаты занесём в таблицу 5.

Зафиксируем в таблице 4 значками "<" *результаты* разбиения размаха выборки на 7 интервалов и подсчитаем количество величин проницаемости, попавших в каждый интервал. Результаты подсчёта и вычисления *частот* приведены в таблице 5. Вычислим значения плотности распределения в физических единицах по формуле $p_j=h_j/\Delta_ф$, а в стандартизованных единицах по формуле $p_j=h_j/\Delta$. Результаты занесём в таблицу 5. Результаты вычисления частот $h_j$ приведены в таблице 6 (см. Пример 3. "Проверка основной гипотезы").

Следует иметь в виду, что любое отклонение наблюдаемой частоты, $n_j/n$, от теоретической вероятности $p_j$ увеличивает $X^2$, поэтому если обнаруживается интервал в котором количество элементов меньше двух, то его следует объединить в соседним или уменьшить $k$.

Гистограмму эмпирического распределения можно построить как для исходного массива данных, так и для стандартизованного распределения. Графическое представление плотности распределения коэффициентов проницаемости образцов породы из различных пластов в физических единицах приведено на рис. 2.30.

## 2.10. Проверка гипотезы о законе эмпирического распределения

*Определение* закона *эмпирического распределения* является едва ли не главной задачей *статистического анализа данных выборки*, ха-

*Таблица* 5.

**Результаты расчёта эмпирических плотностей распределения коэффициентов проницаемости образцов породы из различных пластов**

| $j$ | Физические границы интервалов, $K\cdot10^6$ м$^2$ | Стандартизованные границы интервалов | $n_j$ | Плотность распределения в физ. единицах, $p_j=h_j/\Delta_\Phi$ | Плотность распределения безразмерная, $p_j=h_j/\Delta$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0,025 | -2,387 | | | |
| 1 | | | 2 | $0,6415\cdot10^6$ | 0,05506 |
| | 0,09 | -1,6297 | | | |
| 2 | | | 7 | $2,243\cdot10^6$ | 0,1925 |
| | 0,155 | -0,8724 | | | |
| 3 | | | 12 | $3,846\cdot10^6$ | 0,3312 |
| | 0,22 | -0,1151 | | | |
| 4 | | | 16 | $5,128\cdot10^6$ | 0,4401 |
| | 0,285 | 0,6421 | | | |
| 5 | | | 7 | $2,243\cdot10^6$ | 0,1925 |
| | 0,35 | 1,3994 | | | |
| 6 | | | 2 | $0,6415\cdot10^6$ | 0,05506 |
| | 0,415 | 2,1567 | | | |
| 7 | | | 2 | $0,6415\cdot10^6$ | 0,05506 |
| | 0,48 | 2,914 | | | |

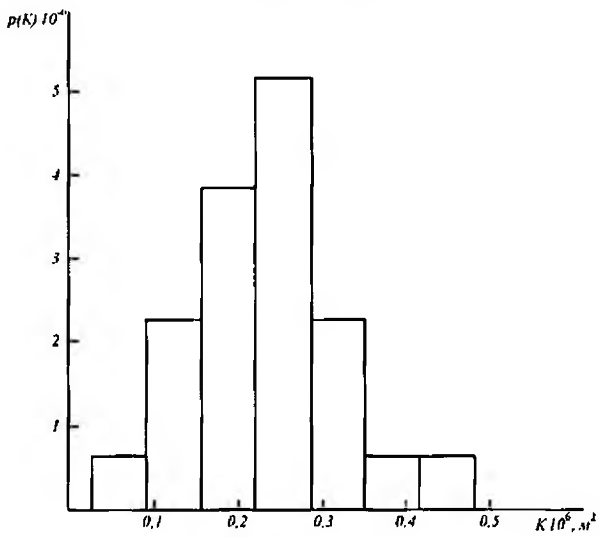



Рис. 2.30. Плотность распределения коэффициентов проницаемости образцов породы из различных пластов в физических единицах (общая площадь всех столбиков равна 1)

рактеризующих **один признак** *совокупности*. Эмпирическое распределение формируют <u>внутренние причины явления</u> (*физические причины*), а не *больших чисел закон*, поэтому определение закона исследуемого распределения *необходимо* при выявлении механизма *процесса* или явления. На практике, определить закон исследуемого эмпирического распределения в виде уравнения очень даже непросто. Во многих случаях ограничиваются проверками гипотез о какой-либо степени соответствия исследуемого эмпирического распределения известным статистическим законам или вычислением *параметров* (*моментов*) исследуемого распределения.

Если *гистограмма* выборочного распределения близка к нормальной *кривой*, то вначале проверяется *основная гипотеза* - гипотеза о нормальности изучаемого распределения. Если по *результатам* проверки основной гипотезы окажется, что исследуемое распределение не отличается от нормального, то не следует искать большого смысла, существенных *причинно-следственных связей* в распределении признака или в *функционировании* исследуемой *системы*.

Если исследуемое распределение асимметрично или по результатам проверки основной гипотезы окажется, что оно отличается от нормального, то следует попробовать выявить существенные причинно-следственные связей в распределении признака или в функционировании исследуемой системы, определить моменты распределения, которые и формализуют эмпирическое распределение. При необходимости можно проверить гипотезы о соответствии исследуемого распределения другим распределениям, описанным в литературе.

В соответствии с общими *принципами проверки статистических гипотез нулевой гипотезой* является гипотеза об отсутствии различия между *частотами* наблюдаемого признака в *интервалах выборки* и теоретическими *вероятностями*. *Критерием*, характеризующим *величину* (*степень*) различия, является *хи-квадрат критерий*, вычисляемый по *формуле* (1.276). *Критическое* значение $\theta^{\alpha}$ хи-квадрат критерия вычисляется *независимым* путём с помощью формул *хи-квадрат распределения*.

Проверка основной гипотезы о соответствии эмпирического распределения нормальному закону осуществляется путём сравнения *опытного* и табличного значений *хи-квадрат критериев*. Опытный хи-квадрат критерий вычисляется по формуле (1.276):

$$X^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(n_j - np_j)^2}{np_j}, \qquad (2.30)$$

где $k$ - *число интервалов*, на которое делится диапазон изменения случайной величины, $n$ - объём *выборки* ($n \geqslant 50 \div 150$), $n_j$ - число *элементов* выборки, попавшее в $j$-тый интервал, $p_j$ - теоретическая *вероятность* попадания случайной величины в $j$-тый интервал. Результат проверки основной гипотезы достаточно сильно зависит от числа интервалов и числа элементов в каждом интервале. Оптимальное число интервалов можно определить по формуле (1.52), (1.275), при этом следует иметь в виду, что интервалы без элементов недопустимы, строго говоря, $n_j \geqslant 2$ (желательно $n_j \geqslant 5 \div 10$). Если обнаруживаются интервалы с $n_j < 2$, то такие интервалы объединяются с соседними; иногда лучше уменьшить $k$. При вычислении теоретических вероятностей $p_j$ границы крайних интервалов необходимо раздвинуть до *бесконечности*, т.е. меньшую границу до $-\infty$, а большую до $+\infty$. Число степеней свободы $\nu$ как обычно равно числу независимых источников *информации*, с помощью которых вычисляется $X^2$:

$$\nu = k - l - 1, \tag{2.31}$$

где $l=2$ - потеря свободы при *стандартизации* случайной величины (при стандартизации вычисляются *среднее значение случайной величины*, $x_{ср}$, и *дисперсия*, $s^2$). Единица вычитается по той простой причине, что независимо вычисляются частоты только в первых $k-1$ интервалах, а частота в $k$-том интервале может быть легко вычислена:

$$n_k = n - \sum_{j=1}^{k-1} n_j, \tag{2.32}$$

поскольку $\Sigma n_j = n$ (в данном случае сумма вероятностей равна единице, $\Sigma p_j = 1$). Таким образом, $\nu = k - l - 1 = k - 3$.

Очевидно, что любое отклонение наблюдаемой частоты, $n_j/n$, от теоретической вероятности $p_j$ увеличивает $X^2$; это значит, что использовать следует односторонний (справа) критерий. Гипотеза о нормальном законе распределения принимается с *уровнем значимости* $\alpha = 1 - P$, если опытный хи-квадрат критерий меньше табличного.

Сравнение исследуемого распределения с другими также может быть полезным. Например, анализ распределения тонких прослоев песчаников в пределах достаточно толстого нефтеносного пласта по ста девяносто пяти скважинам показал, что это распределение описывается законом Пуассона [23]. Дементьев Л.Ф. и Шурубор Ю.В. делают вывод, что *вероятной причиной* реализации закона Пуассона оказался специфический механизм формирования нефтяного пласта. В общем, накопление осадков происходило *непрерывно*, причём осадки, давшие впоследствии прослои песчаников, накапливались в *локальных* областях на фоне более обширных площадей, осадки которых впоследствии преобразовались в непроницаемые породы. Локальные области время от времени смещались, это привело к тому, что прослои песчаников оказались прерывистыми, линзообразными, беспорядочно разбросанными по всему разрезу пласта. Дементьев Л.Ф. и Шурубор Ю.В. предполагают, что в большинстве случаев прослои песчаников, сквозь которые прошла та или иная скважина, выклиниваются в её окрестностях, не доходя до других скважин. Если соседние скважины проходят сквозь прослои песчаников, то эти прослои локализуются совсем в других частях разреза пласта (почти в половине скважин прослоев песчаников нет!). В такой *структуре* распределения прослоев песчаников по разрезу нефтеносного пласта нет смысла проводить межскважинную *корреляцию* песчаниковых прослоев, строить карты распространения различных прослоев песчаников по площади месторождения; вряд ли при разработке такого пласта в нём будет послойная упорядоченность фильтрации флюидов и т.д.

Если бы распределение песчаниковых прослоев в нефтеносном пласте описывалось *биномиальным* законом, то вывод был бы другим. Как в случае с подбрасыванием монеты ("орёл" или "решка"), осадконакопление должно было идти путём чередования продолжительных периодов усиленного отложения песчаного материала с периодами отсутствия песка. В *результате* сформировался бы пласт, для которого можно осуществить межскважинную корреляцию песчаниковых прослоев и построить карты их площадного распространения. При разработке такого пласта фильтрация флюидов будет характеризоваться послойной упорядоченностью [23].

При изучении *гистограммы* эмпирического распределения важно обращать внимание на *асимметрию*, на островершинность или плосковершинность распределения, на неоднородности гистограммы. *Значимое* отличие распределения от нормального указывает на наличие *фактора*, выделяющегося из **серой массы** *множества* несущественных. *Степень* минерализации породы может убывать по *экспоненциальному* закону в *зависимости* от расстояния до источника минерализации. Такая же экспоненциальная зависимость существует между размерами переносимых частиц осадка и скоростью потока. Распределение многих геологических характеристик оказывается ближе не к нормальному закону, а к логнормальному [33, 38, 39]. *Процесс* измельчения, истирания породы приводит к логнормальному распределению частиц по радиусу [38].

**Пример 3. Проверка основной гипотезы**

В примере 2 нами была рассмотрена *процедура стандартизации выборочного распределения*. Продолжим этот пример с целью проверки **ос-**

**новной гипотезы**, т.е. *гипотезы* о том, что значения *коэффициентов* проницаемости *случайной выборки* образцов породы из различных пластов не противоречат закону *нормального распределения.*

Для вычисления *опытного* значения *хи-квадрат критерия* по *формуле* (1.276) необходимо подсчитать *количество* значений, попавших в каждый $j$-тый интервал. В таблице 4 значками "<" зафиксированы *результаты* разбиения *размаха выборки* на 7 интервалов (см. пример 2). Результаты подсчёта стандартизованных величин проницаемости, попавших в каждый интервал, и результаты вычисления *частот* приведены в таблице 7. Соответствующая гистограмма распределения приведена на рис. 2.31.

Определение теоретических вероятностей, $p_j$, попадания случайной величины в $j$-тый интервал производится по формулам:

$$
\begin{aligned}
&p_1=\Phi(z_1+\Delta)-\Phi(-\infty);\\
&p_2=\Phi(z_1+2\Delta)-\Phi(z_1+\Delta);\\
&p_3=\Phi(z_1+3\Delta)-\Phi(z_1+2\Delta);\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&p_j=\Phi(z_1+j\Delta)-\Phi(z_1+(j-1)\Delta);\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&p_k=\Phi(+\infty)-\Phi(z_1+(k-1)\Delta),
\end{aligned}
$$

Результаты расчётов оформляются в виде таблицы.

*Таблица 6.*

Результаты расчёта выборочных частот и теоретических вероятностей значений случайной величины для интервалов выборки

| $j$ | Границы интервалов выборки | Число элементов в интервале | Эмпирическая (выборочная) частота $h_j=n_j/n$ | Реальные границы интервалов | Теоретическая вероятность $p_j$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $z_1$ | | | $-\infty$ | |
| 1 | | $n_1$ | $n_1/n$ | | $p_1$ |
| | $z_1+\Delta$ | | | $z_1+\Delta$ | |
| 2 | | $n_2$ | $n_2/n$ | | $p_2$ |
| | $z_1+2\Delta$ | | | $z_1+2\Delta$ | |
| 3 | | $n_3$ | $n_3/n$ | | $p_3$ |
| | $z_1+3\Delta$ | | | $z_1+3\Delta$ | |
| ... | ........... | ........ | .......... | ....... | .......... |
| $j$ | | $n_j$ | $n_j/n$ | | $p_j$ |
| | $z_1+j\Delta$ | | | $z_1+j\Delta$ | |
| ... | ........... | ........ | .......... | ....... | .......... |
| $k-1$ | | $n_{k-1}$ | $n_{k-1}/n$ | | $p_{k-1}$ |
| | $z_1+(k-1)\Delta$ | | | $z_1+(k-1)\Delta$ | |
| $k$ | | $n_k$ | $n_k/n$ | | $p_k$ |
| | $z_1+k\Delta$ | | | $+\infty$ | |
| | Сумма | $n$ | $\Sigma n_j=n$ | | $\Sigma p_j=1$ |

где $\Phi(z)$ – *функция Лапласа.* Необходимо учесть, что крайний левый интервал простирается до $-\infty$, а крайний правый – до $+\infty$. *Функция* $\Phi$ нечётная, т.е. $\Phi(-x)=-\Phi(x)$. Значения функции Лапласа приведены в Приложении 2.

$$p_1=\Phi(-1,6297)-\Phi(-\infty)=-0,4484+0,5=0,0516.$$

$$p_2=\Phi(-0,8724)-\Phi(-1,6297)=-0,3078+0,4484=0,1406.$$

$$p_3=\Phi(-0,1151)-\Phi(-0,8724)=-0,0458+0,3078=0,262.$$

$$p_4=\Phi(0,6421)-\Phi(-0,1151)=0,2389+0,0458=0,2847.$$

$$p_5=\Phi(1,3994)-\Phi(0,6421)=0,4192-0,2389=0,1803.$$

$$p_6=\Phi(2,1567)-\Phi(1,3994)=0,4846-0,4192=0,0654.$$

$$p_7=\Phi(+\infty)-\Phi(2,1567)=0,5-0,4846=0,0154.$$

Теоретические вероятности $p_j$ заносим в таблицу 7.

*Таблица 7.*

Результаты расчёта выборочных и теоретических вероятностей значений коэффициентов проницаемости образцов породы из различных пластов для интервалов выборки

| $j$ | Границы интервалов выборки | Число элементов в интервале | Выборочная вероятность (частота), $n_j/n$ | Реальные границы интервалов | Теорет. вероятность $p_j$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | -2,387 | | | $-\infty$ | |
| 1 | | 2 | 0,0417 | | 0,0516 |
| | -1,6297 | | | -1,6297 | |
| 2 | | 7 | 0,1458 | | 0,1406 |
| | -0,8724 | | | -0,8724 | |
| 3 | | 12 | 0,25 | | 0,262 |
| | -0,1151 | | | -0,1151 | |
| 4 | | 16 | 0,3333 | | 0,2847 |
| | 0,6421 | | | 0,6421 | |
| 5 | | 7 | 0,1458 | | 0,1803 |
| | 1,3994 | | | 1,3994 | |
| 6 | | 2 | 0,0417 | | 0,0654 |
| | 2,1567 | | | 2,1567 | |
| 7 | | 2 | 0,0417 | | 0,0154 |
| | 2,914 | | | $+\infty$ | |
| | Сумма | 48 | 1,0 | | 1,0 |

Опытное значение хи-квадрат критерия вычисляется по формуле (1.276):

$$X^2=\sum_{j=1}^{7}\frac{(n_j-np_j)^2}{np_j}=\frac{(2-48\cdot 0,0516)^2}{48\cdot 0,0516}+\frac{(7-48\cdot 0,1406)^2}{48\cdot 0,1406}+$$

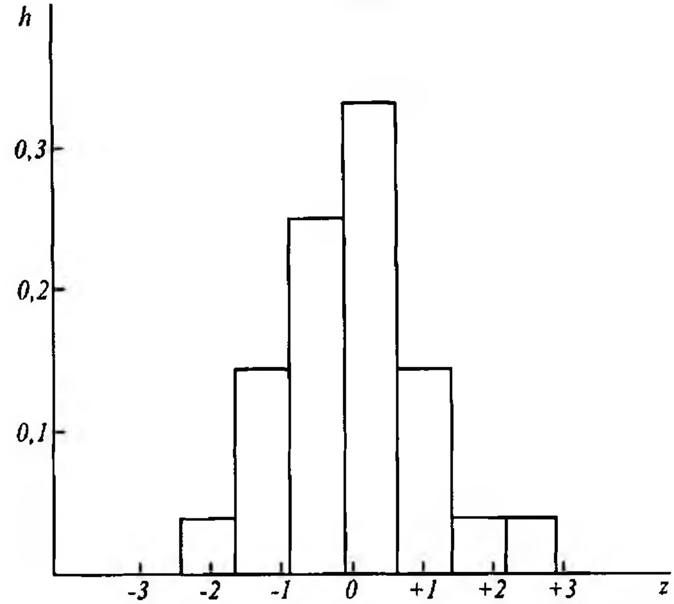



Рис. 2.31. Гистограмма стандартизованного распределения физической проницаемости образцов кернов продуктивных и непродуктивных пластов нефтяных месторождений в случайной выборке

$$+\frac{(12-48\cdot 0,262)^2}{48\cdot 0,262}+\frac{(16-48\cdot 0,2847)^2}{48\cdot 0,2847}+\frac{(7-48\cdot 0,1803)^2}{48\cdot 0,1803}+$$

$$+\frac{(2-48\cdot 0,0654)^2}{48\cdot 0,0654}+\frac{(2-48\cdot 0,0154)^2}{48\cdot 0,0154}=3,4064$$

Табличное значение хи-квадрат критерия для *уровня значимости* $\alpha$=0,05 и *степеней свободы числа* $\nu$=7-2-1=4 равно 9,5:

$$\left(X^2\right)_4^{0.05}=9,5>\left(X^2\right)_4^{\text{оп}}=3,4.$$

Значение опытного $X^2$-критерия меньше табличного, т.е. он попадает в область нулевой гипотезы и с *доверительной вероятностью* $P$=0,95 можно утверждать, что значения коэффициентов проницаемости случайной выборки образцов породы из различных пластов не противоречат закону нормального распределения.

## 3. МЕТОД МОМЕНТОВ

В *статистике математической моментов метод* - это один из общих методов нахождения *статистических оценок* для неизвестных *параметров распределений* по *результатам наблюдений*. Метод моментов был использован для этих целей в 1894 г. К.Пирсоном (*Pearson Karl*;

1857-1936), при решении задачи аппроксимации *эмпирического* распределения с помощью *системы Пирсона распределений*. Практически метод моментов связан с весьма простыми вычислениями *числовых* характеристик, называемых моментами распределения. Моменты распределения - это числа, получаемые в результате *обработки данных*. Эти числа характеризуют *среднее значение* распределения, *дисперсию* (т.е. широту), *асимметрию* (смещение распределения *относительно* среднего значения в ту или иную сторону) и "крутость" распределения (островершинность или плосковершинность).

Дело в том, что сравнивать различные распределения по их *гистограммам* или *плотностям вероятностей* достаточно неудобно. Точнее, сравнивать-то их можно, но *процедура* эта требует повышенного внимания и аналитической памяти. Кроме этого, не всегда можно выявить визуально отдельные тонкости, нюансы эмпирического распределения. Моменты распределения позволяют сравнивать исследуемые распределения на *количественном* уровне, производить анализ влияния тех или иных *факторов* на распределение исследуемого признака и *моделировать* последнее.

### 3.1. Основные характеристики распределений

Одной из основных характеристик *распределений случайной величины* является *оценка математического ожидания* ($M_x$) - *среднее значение* ($m_x$), причём средних значений (т.е. оценок) много, появляется проблема выбора. Если распределение *асимметрично*, то на первом этапе представляют интерес *среднее арифметическое*, *мода* и *медиана*.

Среднее арифметическое является частным случаем метода наименьших квадратов, его проще всех вычислить, и отчасти по этой *причине* оно нашло наиболее широкое применение. Кроме этого, в условиях *нормально* распределённых *ошибок наблюдений* арифметическое среднее является *состоятельной*, *несмещённой* и *эффективной* оценкой математического ожидания. *Максимуму* кривой плотности вероятностей соответствует мода, это наиболее вероятный результат. Мода в статистике - то, что в обычной жизни называется массовым, типичным. То значение случайной величины, которое делит распределение на две равные части называется *медианой*; вероятности событий по обе стороны медианы одинаковы. Мода и медиана имеют больше теоретическое, чем практическое значение - для экспериментальной *выборки* малого объёма моду и медиану вычислить непросто.

В случае *симметричного* распределения значения среднего арифметического, медианы и моды совпадают. Если распределение *асимметрично*, то значения среднего, медианы и моды различны; кроме этого возникает проблема выбора наилучшего среднего значения из *множества возможных* (также возникает проблема выбора *критерия* **оптимальности** среднего значения).

Следующей важной характеристикой распределения является *дисперсия*, она характеризует разброс, рассеяние случайной величины относительно центра распределения. Большой практический интерес представляет квадратный корень из дисперсии - *стандартное отклонение* (*стандарт*).

Очевидно, что для сравнения различных распределений среднего значения, моды, медианы и стандарта недостаточно. Кроме этого, для *непрерывной* случайной величины далеко не всегда можно вычислить среднее арифметическое. Проблема в значительной степени решается с помощью *моментов распределения*: начальных моментов $m_1$, $m_2$, $m_3$, $m_4$ и центральных - $\mu_2$, $\mu_3$, $\mu_4$, а также *коэффициентов асимметрии* $A_x$ и *эксцесса* $E_x$. Моменты распределения полностью характеризуют эмпирическое распределение и ими можно пользоваться для сопоставления распределений без сравнения соответствующих $p(r)$- и $F(r)$-кривых.

Задача, состоящая в определении распределения вероятностей последовательностью его моментов, носит название **проблемы моментов**. Эта задача впервые рассматривалась в 1874 г. П.Л.Чебышевым (1821-1894) в связи с исследованиями по предельным теоремам *теории* вероятностей. Например, *результаты* ситовых и седиментационных анализов твердых дисперсных фаз обычно представлены в виде таблиц и соответствующих $p(r)$- и $F(r)$-*кривых*. При таком представлении *данных* сравнивать фракционные составы разных дисперсных фаз можно только на *качественном* уровне. Для сравнения различных твердых дисперсных фаз (пылей, суспензий, глинистых минералов, цементного клинкера и др.) на *количественном* уровне удобно выразить характерные особенности фракционного состава при помощи *числовых* характеристик - **моментов случайной величины**.

### 3.2. Классификация моментов

Моменты систематизируются по трем признакам:

по порядку момента $\beta$;

по *началу* отсчета *случайной величины*;

по виду случайной величины.

Порядок момента $\beta$ может быть любой целой величиной. Практическое применение имеют моменты нулевого, первого, второго, третьего и четвертого порядков, т.е. $\beta$=0, 1, 2, 3, 4.

По началу отсчета случайной величины моменты могут быть начальными и *центральными.*

По виду - для *дискретных* и *непрерывных* величин.

Для дискретной случайной величины начальный момент $\beta$-того порядка *определяется формулой:*

$$m_\beta=\sum_{i=1}^{n} x_i^\beta p_i, \quad \text{где } p_i=P(X=x_i); \tag{3.1}$$

для непрерывной случайной величины:

$$m_\beta=\int_{-\infty}^{+\infty} x^\beta p(x)\,dx. \tag{3.2}$$

Начальный момент нулевого порядка, или нулевой начальный момент:

$$m_0=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx=1, \tag{3.3}$$

сравните с выражением (2.9). Он характеризует площадь под *кривой распределения* (рис.1.1, 1.20,б, 1.34, 1.52)*. С другой стороны, это означает, что какое-то значение случайная величина примет, это *достоверное событие*.

Начальный момент первого порядка или первый начальный момент является *оценкой математического ожидания* или *средним значением* случайной величины $X$. *Оценка* математического ожидания, $m_x$, для дискретной случайной величины определяется формулой:

$$m_x= m_1=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i, \tag{3.4}$$

для непрерывной случайной величины:

$$m_x= m_1=\int_{-\infty}^{+\infty} x p(x)\,dx. \tag{3.5}$$

Аналогично вычисляются начальные моменты высших порядков:

---

*По поводу равенства площади под кривой плотности вероятностей $p(x)$ и площади столбиков в гистограмме единице см. также рис. 1.3, 1.7, 1.8, 1.11,а, 1.12, 1.21, 1.22, 1.23, 1.24, 1.26, 1.28, 1.32, 1.33, 1.35, 1.36, 1.37, 1.38, 1.39, 1.40, 1.41, 1.42,а, 1.43, 1.44, 1.45,а, 1.48, 1.50, 1.51, 2.6, 2.12, 2.13, 2.14, 2.24, 2.25, 2.27,а, 2.28, 2.29, 2.30.

для *дискретной* случайной величины:

$$m_2=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i, \qquad m_3=\sum_{i=1}^{n} x_i^3 p_i, \qquad m_4=\sum_{i=1}^{n} x_i^4 p_i; \tag{3.6}$$

для *непрерывной* случайной величины:

$$m_2=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\,dx, \qquad m_3=\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 p(x)\,dx, \qquad m_4=\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 p(x)\,dx. \tag{3.7}$$

Имеется прямая аналогия моментов в *вероятностей теории* с моментами, играющими важную роль в механике: формулой (3.7) для $m_2$ определяется момент распределения масс, момент первого порядка (оценка математического ожидания $M_x$, (3.4), (3.5)) аналогичен статическому моменту, а центральный момент второго порядка (см. ниже (3.10), (3.11)) аналогичен моменту инерции.

Поскольку математическое ожидание $M_x$ определяет центр группирования случайной величины, в точку $m_x$ переносят начало координат. Случайные величины, отсчитываемые от центра группирования $m_x$ называются центрированными, а моменты центрированной случайной величины - центральными.

Центральный момент $\beta$-того порядка для дискретной случайной величины определяется формулой:

$$\mu_\beta=\sum_{i=1}^{n} (x_i-m_x)^\beta p_i, \tag{3.8}$$

для *непрерывной* случайной величины:

$$\mu_\beta=\int_{-\infty}^{+\infty} (x-m_1)^\beta p(x)\,dx. \tag{3.9}$$

Очевидно, что нулевой центральный момент $\mu_0=1$ и выражает площадь под *кривой* распределения.

Первый центральный момент $\mu_1=0$, - математическое ожидание центрированной величины равно нулю.

Второй центральный момент характеризует рассеяние случайной величины *относительно* среднего значения и называется *дисперсией, обозначаемой* $s^2{}_x$. Для дискретной случайной величины:

$$\mu_2= s_x^2=\sum_{i=1}^{n} (x_i-m_1)^2 p_i, \tag{3.10}$$

для непрерывной случайной величины:

$$\mu_2 = S_x^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-m_1)^2 p(x)\,dx. \qquad (3.11)$$

Центральный момент второго порядка (дисперсия) аналогичен моменту инерции в механике.

Поскольку достаточно широко распространено в природе и теоретически наиболее разработано нормальное распределение, с ним принято сравнивать *экспериментально* полученные распределения. Для сравнения экспериментального распределения и более полного его описания применяют моменты высших порядков.

Третий центральный момент характеризует "**скошенность**" или *асимметрию* распределения:

$$\mu_3 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-m_1)^3 p(x)\,dx. \qquad (3.12)$$

*Безразмерный коэффициент асимметрии* вычисляется по формуле:

$$A_x = \frac{\mu_3}{S_x^3}. \qquad (3.13)$$

Для нормального распределения $A_x=0$ (рис.1.1).

Четвертый центральный момент характеризует "**крутость" распределения**, т.е. **островершинность** или **плосковершинность** *распределения*:

$$\mu_4 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-m_1)^4 p(x)\,dx. \qquad (3.14)$$

Безразмерный коэффициент, описывающий эти *свойства*, называется *эксцессом*:

$$E_x = \frac{\mu_4}{S_x^4} - 3. \qquad (3.15)$$

В *уравнении* (3.15) *число* 3 вычитается потому, что для распределения Гаусса отношение $\mu_4/б^4{}_x=3$. Следовательно, для нормального распределения эксцесс $E_x=0$ (рис. 1.41).

Моменты эмпирического распределения могут быть использованы как параметры, позволяющие сравнивать разные распределения друг с другом, отслеживать влияние каких-либо факторов на характеристики распределений. Моменты могут быть использованы для сравнения эмпирических распределений с теоретическими и для установления закона изучаемого *явления*.

## 3.3. Приложение метода моментов к анализу распределения частиц дисперсной фазы по радиусам

В качестве примера вычисления *выборочных моментов распределения случайной величины* рассмотрим распределение частиц цементного раствора по радиусам. Эта задача имеет важное значение при решении вопроса о составе воды затворения для приготовлении седиментационно-устойчивых цементных растворов для заливки наклонно-направленных и горизонтальных скважин. Дело в том, что при цементировании вертикальных скважин седиментация частиц цементного раствора не сказывается на прочности и герметичности цементного камня. Иное дело - цементирование наклонно-направленных и горизонтальных скважин. Расстояния 10 - 15 - 20 мм между стенкой скважины и обсадной колонной вполне преодолимы для частиц цементного раствора за время ОЗЦ. Это приводит к незамкнутости пор в верхней части ствола скважины, фильтрации коррозионно-активного флюида сквозь цементную оболочку и коррозии как цементного камня, так и металла обсадной колонны. Проблема предотвращения агрегации частиц цементного клинкера в процессе гидратации и последующей седиментации была успешно решена в 1990-1992 гг. Живаевой В.В.

### 3.3.1. *Дифференциальный анализ кривой седиментации*

Фракционный состав частиц суспензии (цементной, в частности) можно рассчитать, если исследовать скорость накопления осадка на чашечке, погружённой в суспензию. Вес чашечки *определяется* при этом с помощью торзионных весов [38]. В *результате* лабораторного исследования получается кривая седиментации цементной суспензии $M=f(\tau)$ (рис. 3.1). Время $\tau_0$ - время осаждения самых крупных фракций суспензии и всех остальных. Как правило, этот участок кривой седиментации является прямой линией и в анализе не участвует. Дифференциальный анализ начинается с времени $\tau_0$ и заканчивается после полного осаждения всех частиц.

Дифференциальный анализ седиментационной кривой позволяет определить фракционный состав частиц суспензии [38, 63, 64]. В общем случае, в *количестве* вещества $M$, осевшего на чашечку к моменту времени $\tau$, можно выделить две составляющие (рис. 3.1):

$$M = m + \tau \cdot \frac{dM}{d\tau}, \qquad (3.16)$$

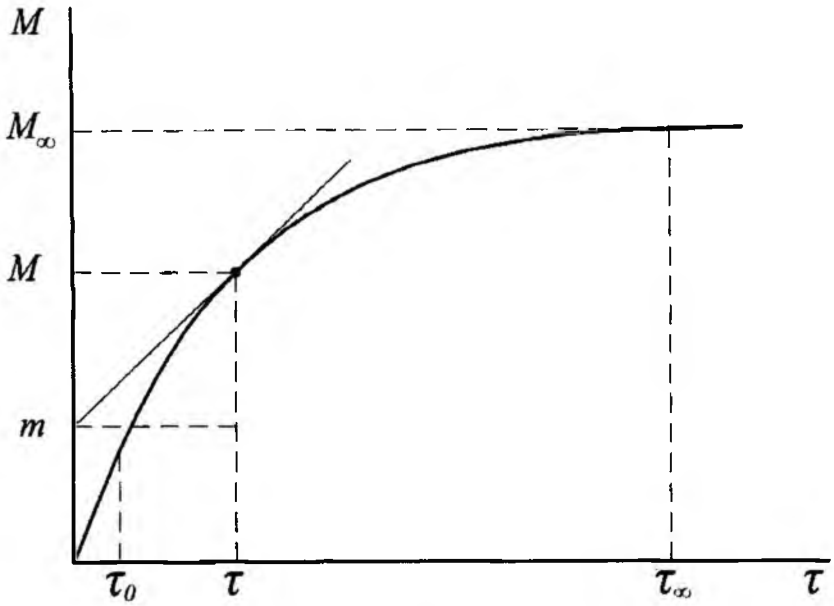



Рис. 3.1. Кривая седиментации полидисперсной суспензии $M=f(\tau)$

где $m$ - количество частиц фракции, полностью выпавшее в осадок и состоящее из частиц, радиус которых больше $r$, $\tau\cdot(dM/d\tau)$ - вес частиц всех остальных фракций с радиусом, меньшим $r$. Рассматривая

Рассмотрим точки 1 и 2 (рис. 3.2). Величины $M_1$ и $M_2$ соответствуют количествам частиц, осевшим на чашечку за время $\tau_1$ и $\tau_2$ соответственно. Величина $m_1$ соответствует количеству фракции с радиусом $r>r_1$, полностью осевшей за время $\tau_1$. Величина $m_2$ соответствует количеству фракции с радиусом $r>r_2$, полностью осевшей за время $\tau_2$. Аналогично $m_3$ соответствует количеству фракции с радиусом $r>r_3$, полностью осевшей за время $\tau_3$ и т.д.

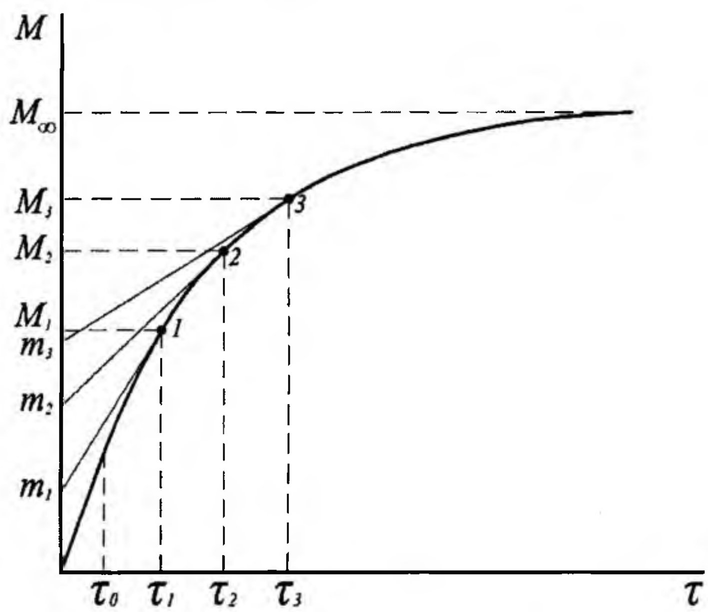



Рис. 3.2. Дифференциальный анализ кривой седиментации

Очевидно, что за время от $\tau_1$ до $\tau_2$ осаждаются частицы с радиусом от $r_1$ до $r_2$, за время от $\tau_2$ до $\tau_3$ осаждаются частицы с радиусом от $r_2$ до $r_3$ и т.д. Количество частиц с радиусом от $r_1$ до $r_2$ равно $m_2-m_1$.

В общем виде доля частиц с радиусами от $r_i$ до $r_{i+1}$ равна:

$$\Delta M_i = \frac{m_{i+1}-m_i}{M_{кон}-m_0}, \tag{3.17}$$

где

$$m_i = M_i - \tau_i \cdot \left(\frac{dM}{d\tau}\right)_i, \tag{3.18}$$

$$m_{i+1} = M_{i+1} - \tau_i \cdot \left(\frac{dM}{d\tau}\right)_{i+1}, \tag{3.19}$$

$m_0$ - масса частиц фракции, с радиусом $r>r_0$, полностью осевшей за время $\tau_0$.

Очевидно, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta M_i = 1$.

### 3.3.2. *Статистический анализ процесса седиментации*

По аналогии с *уравнениями* (2.4) и (2.5) можно утверждать, что *вероятность* того, что случайно выбранная частица твердой фазы будет иметь радиус $R$ на *интервале* от $r_{min}$ до $r_j$, запишется следующим образом:

$$P(r_{min} \leqslant R \leqslant r_j) = \int\limits_{r_{min}}^{r_j} p(r)dr = F(r_j)-F(r_{min}), \tag{3.20}$$

где $r_{min}>0$, $r_j \leqslant r_{max}$.

Можно утверждать также, что радиус частицы дисперсной фазы является случайной величиной, и можно говорить о распределении частиц твердой фазы по радиусам от $r_{min}$ до $r_{max}$. Также очевидно, что $P(r_{min} \leqslant R \leqslant r_{max})=1$.

Принимая во внимание уравнения (2.5), (3.17), (3.20) и развивая аналогии между *функцией* распределения случайной величины и распределением частиц дисперсной фазы по радиусам, можно записать:

$$F(r_j) = \sum_{i=n}^{j} \Delta m_i, \quad (1 \leqslant j \leqslant n). \tag{3.21}$$

Функцию $F(r)$ называют *функцией распределения* частиц дисперсной фазы по радиусам (иногда - интегральной функцией, *кумулятивной* функцией). Она определяет долю частиц дисперсной фазы с радиусом меньшим $r$.

По аналогии с *плотностью распределения* случайной величины $X$:

$$p(x)=F'(x), \tag{3.22}$$

можно говорить о плотности распределения частиц дисперсной фазы по радиусам:

$$p(r)=F'(r)=\frac{dM}{dr}. \tag{3.23}$$

Функцию $p(r)$ называют *плотностью распределения* частиц дисперсной фазы по радиусам (дифференциальной функцией, *плотностью вероятностей*). По аналогии с (2.8) и (2.9) можно записать:

$$P(r_1 \leq R \leq r_2) = \int_{r_1}^{r_2} p(r)dr = F(r_2)-F(r_1). \tag{3.24}$$

Дифференциальная функция распределения частиц дисперсной фазы по радиусам характеризует *относительное* содержание в твердой фазе отдельных фракций по размерам частиц.

Очевидно, что:

$$\int_{r_{min}}^{r_{max}} p(r)dr=1, \tag{3.25}$$

так как случайный выбор частицы дисперсной фазы с радиусом в интервале $r_{min} \leq R \leq r_{max}$ есть *достоверное событие*.

3.3.3. *Расчёт фракционного состава суспензии*

Общая масса осадка *определяется* по *формуле*:

$$M_0=\sum_{i=1}^{n} m_i, \tag{3.26}$$

где $m_i$ - *количество* осадка $i$-той фракции, мг. Соответственно, массовая доля частиц $i$-той фракции будет равна:

$$\Delta m_i=\frac{m_i}{M_0}, \tag{3.27}$$

Очевидно, что $\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i=1$.

Поскольку *кривая* седиментации реально представляет собой ломаную линию, в формуле *плотности вероятности распределения* частиц дисперсной фазы по радиусам (3.24) дифференциалы следует заменить на *конечные* отрезки:

$$p(r_i) = \frac{dM}{dr_i} \approx \frac{\Delta m_i}{\Delta r_i} = \frac{\Delta m_i}{r_{i-1}-r_i}, \qquad (3.28)$$

где $\Delta m_i$ – массовая доля частиц с радиусом от $r_{i-1}$ до $r_i$.

Интервал $r_n-r_1$ делится на $k$ частей. В общем случае деление производится на равные части:

$$\Delta=\frac{r_1-r_n}{k}; \qquad r_i=r_1-(i-1)\cdot\Delta. \qquad (3.29)$$

В случае седиментационно устойчивых цементных растворов (особенно в тех случаях, когда значительная часть цементных частиц вообще не осаждается в течение анализа) деление производится по закону убывающей геометрической прогрессии:

$$r_i=r_1 q^{i-1}, \qquad \text{где} \qquad q=\exp\left(\frac{1}{k}\ln\frac{r_n}{r_1}\right). \qquad (3.30)$$

Целесообразность такого деления обусловлена особенностью численных процедур при обработке данных на компьютере по специально разработанной автором программе [63, 64]. При анализе седиментационно устойчивых суспензий программа работает стабильнее в области самых мелких частиц и моменты распределения вычисляются точнее при делении интервала $r_n-r_1$ по закону убывающей геометрической прогрессии.

Максимальный радиус частиц фиксируется величиной $r_0$:

$$r_{max}=r_0=r_1/q, \qquad \text{или } r_{max}=r_0=r_1+\Delta. \qquad (3.31)$$

При неполном осаждении (случай седиментационно устойчивой суспензии) минимальный радиус частиц вычисляется путём экстраполяции:

$$r_{min}=r_1 q^{k+2}, \qquad \text{или } r_{min}=r_1-(k+1)\cdot\Delta. \qquad (3.32)$$

*Функцию распределения* частиц дисперсной фазы по радиусам можно будет вычислять по формуле:

$$F(r_j) = \int_{r_{min}}^{r_j} p(r)dr = \sum_{i=n}^{j} \Delta m_i, \qquad (3.33)$$

где $r_j$ – радиус частиц, $r_{min} \leq r_j \leq r_{max}$.

### 3.3.4. *Расчёт моментов распределения частиц суспензии по радиусам*

*Начальный* момент β-того порядка (3.2) вычисляется по формуле:

$$m_\beta=\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{r}_i\right)^\beta \Delta m_i, \tag{3.34}$$

а *центральные* моменты (3.9) по формулам:

$$\mu_\beta=\sum_{i=1}^{n}(r_i-m_1)^\beta \Delta m_i, \tag{3.35}$$

$$\mu_2=m_2-m_1^2, \tag{3.36}$$

$$\mu_3=m_3-3m_2m_1+2m_1^3, \tag{3.37}$$

$$\mu_4=m_4-4m_1m_3+6m_1^2m_2-3m_1^4. \tag{3.38}$$

*Коэффициенты асимметрии* $A_г$ и *эксцесса* $E_г$ вычисляются, соответственно, по формулам (3.13) и (3.15).

*Анализ связей* моментов распределения частиц цементного раствора с видом и количеством реагентов позволяет найти требуемый состав жидкости затворения и сделать обобщения о влиянии реагентов на седиментационную устойчивость цементных растворов.

**Пример 4. Расчёт моментов распределения частиц цементного раствора по радиусам**

Результаты дифференциально-интегрального анализа кривой седиментации цементного раствора с хорошей седиментационной устойчивостью приведены в таблице 8. Записи означают, что, например, масса частиц в осадке с радиусом от $0,3897\cdot10^{-4}$ до $0,3445\cdot10^{-4}$ м равна 0,2221 мг, масса частиц с радиусом от $0,3445\cdot10^{-4}$ до $0,3046\cdot10^{-4}$ м равна 0,1949 мг и т.д. Количество твёрдой фазы, оставшейся во взвешенном состоянии, рассчитано по материальному балансу и составляет 32 мг. Ориентировочный радиус седиментационно устойчивых частиц рассчитан путём экстраполяции по формуле (3.32) и составляет величину $0,7866\cdot10^{-5}$ м. Ориентировочный радиус частиц, осевших за первые 25 с, также определён путём экстраполяции по формуле (3.31) и составляет величину $0,3897\cdot10^{-4}$ м. Таким образом, количество твёрдой фазы с радиусом частиц менее $0,8896\cdot10^{-5}$ м равно 32 мг, а с радиусом больше $0,3445\cdot10^{-4}$ м, соответственно, 0,2221 мг.

*Таблица 8.*

Фракционный состав частиц цементного раствора и результаты расчёта плотности вероятности $\rho(r)$ и функции распределения $F(r)$ частиц цементного раствора по радиусам

| $n$ | $r_i$, м | $m_i$, мг | $\Delta m_i = m_i/M_0$ | $p(r)$ | $\bar{r}_i = (r_{i-1}+r_i)/2$ | $F(r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | $0.3897 \cdot 10^{-4}$ | – | – | – | – | 1.0000 |
| 01 | $0.3445 \cdot 10^{-4}$ | 0.2221 | 0.003173 | 703.2 | $0.3671 \cdot 10^{-4}$ | 0.9968 |
| 02 | $0.3046 \cdot 10^{-4}$ | 0.1949 | 0.002784 | 697.8 | $0.3246 \cdot 10^{-4}$ | 0.9940 |
| 03 | $0.2693 \cdot 10^{-4}$ | 0.4222 | 0.006031 | 1709.3 | $0.2870 \cdot 10^{-4}$ | 0.9880 |
| 04 | $0.2381 \cdot 10^{-4}$ | 0.9148 | 0.01307 | 4189.4 | $0.2538 \cdot 10^{-4}$ | 0.9749 |
| 05 | $0.2106 \cdot 10^{-4}$ | 1.9214 | 0.02745 | 9951.4 | $0.2244 \cdot 10^{-4}$ | 0.9475 |
| 06 | $0.1862 \cdot 10^{-4}$ | 3.5177 | 0.05025 | 20605 | $0.1984 \cdot 10^{-4}$ | 0.8972 |
| 07 | $0.1646 \cdot 10^{-4}$ | 5.5087 | 0.07870 | 36495 | $0.1754 \cdot 10^{-4}$ | 0.8185 |
| 08 | $0.1456 \cdot 10^{-4}$ | 5.7430 | 0.08204 | 43031 | $0.1551 \cdot 10^{-4}$ | 0.7365 |
| 09 | $0.1287 \cdot 10^{-4}$ | 4.0665 | 0.05810 | 34460 | $0.1371 \cdot 10^{-4}$ | 0.6784 |
| 10 | $0.1138 \cdot 10^{-4}$ | 3.0713 | 0.04388 | 29437 | $0.1212 \cdot 10^{-4}$ | 0.6345 |
| 11 | $0.1006 \cdot 10^{-4}$ | 2.6957 | 0.03851 | 29220 | $0.1072 \cdot 10^{-4}$ | 0.5960 |
| 12 | $0.8896 \cdot 10^{-5}$ | 9.7217 | 0.1389 | 119185 | $0.9478 \cdot 10^{-5}$ | 0.4571 |
| 13 | $0.7866 \cdot 10^{-5}$ | 32.0 | 0.4571 | 443697 | $0.8381 \cdot 10^{-5}$ | – |
| Σ | | 70.0 | 1.0000 | | | |

1. Определяем общую массу осадка по *формуле* (3.26):

$$M_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i = 70 \text{ мг},$$

где $m_i$ – количество осадка $i$-той фракции, мг.

2. Массовую долю частиц $i$-той фракции вычисляем по формуле (3.27), например:

$$\Delta m_1 = \frac{m_1}{M_0} = \frac{0,2221}{70} = 0,003173;$$

и т.д. Результаты заносим в таблицу 6.

3. *Плотность распределения* частиц дисперсной фазы по радиусам вычисляем по формуле (3.28), например:

$$p(r_1) = \frac{\Delta m_1}{r_0 - r_1} = \frac{0.003173}{(0,3897-0,3445) \cdot 10^{-4}} = 703,2;$$

и т.д. Результаты заносим в таблицу 6.

4. Определяем *средние* радиусы цементных частиц для каждой фракции:

$$\bar{r}_1 = \frac{r_0 + r_1}{2} = 0,3671 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

и т.д. Результаты заносим в таблицу 6.

5. Строим *гистограмму* распределения частиц цементного раствора $p(r_i)=f(r_{i-1}\div r_i)$, рис. 3.3, или *график* $p(r_i)=f(r_{cp,i})$.

**Примечание: рис.3.3 специально выполнен с помощью чертёжных принадлежностей. Несмотря на архаизм рисунок методически совершененнее, чем его компьютерный аналог. См. *Гистограмма*.**

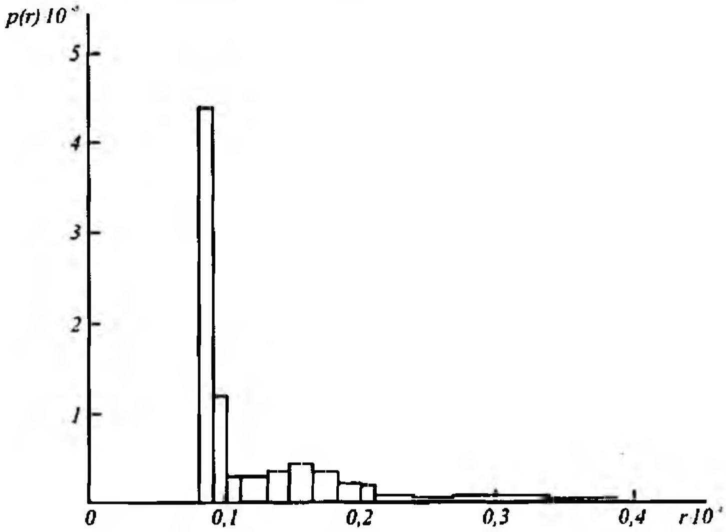



Рис. 3.3. Гистограмма распределения частиц цементного раствора по радиусам (общая площадь всех столбиков равна 1)

6. Определяем значения *функции распределения* частиц цементного раствора по радиусам по формуле (3.33). Так, массовая доля частиц с радиусом меньше $0,8896\cdot10^{-5}$ равна:

$$F(r)=\sum_{i=13}^{13}\Delta m_i=0,4571.$$

Массовая доля частиц с радиусом меньше $0,1006\cdot10^{-4}$ м равна:

$$F(r)=\sum_{i=13}^{12}\Delta m_i=0,4571+0,1389=0,596.$$

Массовая доля частиц с радиусом меньше $0,1138\cdot10^{-4}$ м равна:

$$F(r)=\sum_{i=13}^{11}\Delta m_i=0,4571+0,1389+0,03851=0,6345;$$

и т.д. Массовая доля частиц с радиусом меньше $0,3897\cdot10^{-4}$ м равна 1. Результаты расчёта заносим в таблицу 6 и строим график функции распределения частиц цементного раствора по радиусам (рис. 3.4).

**Примечание: рис.3.4 специально выполнен с помощью чертёжных принадлежностей. Несмотря на архаизм рисунок методически совершененнее, чем его компьютерный аналог. См. *Гистограмма*.**

7. Определяем *начальные* моменты распределения β-того порядка (3.5, 3.7) по формуле (3.34):

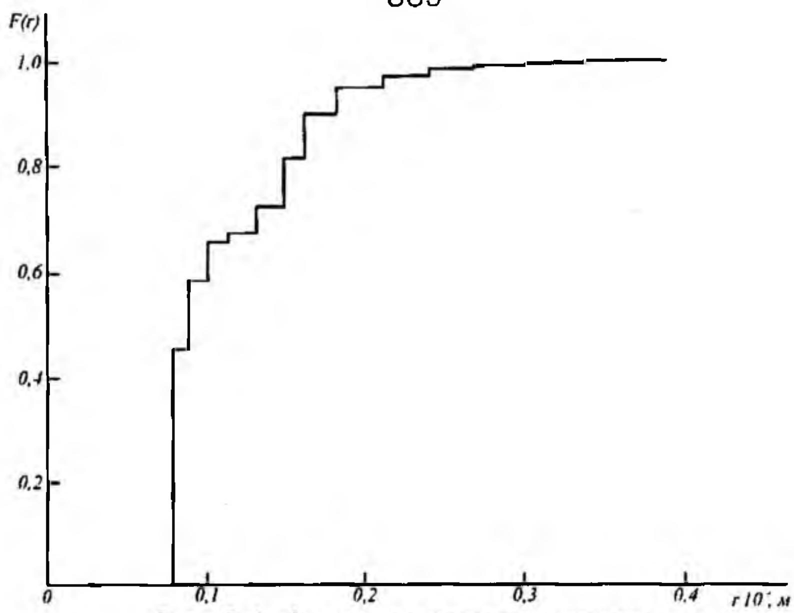



Рис. 3.4. Функция распределения частиц цементного раствора по радиусам

$$m_1=\sum_{i=1}^{n}\bar{r}_1\Delta m_1=0,003173\cdot 0,3671\cdot 10^{-4}+0,002784\cdot 0,3246\cdot 10^{-4}+\ldots+$$

$$+0,4571\cdot 0,8381\cdot 10^{-5}=0,1186\cdot 10^{-4}\ \text{м};$$

$$m_2=\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{r}_1\right)^2\Delta m_1=0,003173\cdot(0,3671\cdot 10^{-4})^2+0,002784\cdot(0,3246\cdot 10^{-4})^2+\ldots+$$

$$+0,4571\cdot(0,8381\cdot 10^{-5})^2=0,1645\cdot 10^{-9}\ \text{м};$$

$$m_3=\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{r}_1\right)^3\Delta m_1=0,003173\cdot(0,3671\cdot 10^{-4})^3+0,002784\cdot(0,3246\cdot 10^{-4})^3+\ldots+$$

$$+0,4571\cdot(0,8381\cdot 10^{-5})^3=0,2704\cdot 10^{-14}\ \text{м};$$

$$m_4=\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{r}_1\right)^4\Delta m_1=0,003173\cdot(0,3671\cdot 10^{-4})^4+0,002784\cdot(0,3246\cdot 10^{-4})^4+\ldots+$$

$$+0,4571\cdot(0,8381\cdot 10^{-5})^4=0,5218\cdot 10^{-19}\ \text{м}.$$

8. Вычисляем *центральные* моменты (3.9) по формуле (3.35) или по формулам (3.36), (3.37), (3.38):

$$\mu_2=m_2-m_1^2=0,1645\cdot 10^{-9}-(0,1186\cdot 10^{-4})^2=0,2371\cdot 10^{-10};$$

$$\mu_3=m_3-3m_1m_2+2m_1^3=0,2704\cdot 10^{-14}-3\cdot 0,1186\cdot 10^{-4}\cdot 0,1645\cdot 10^{-9}+$$

$$+2\cdot(0,1186\cdot 10^{-4})^3=0,1892\cdot 10^{-15};$$

$$\mu_4=m_4-4m_1m_3+6m_1^2m_2-3m_1^4=0,5218\cdot10^{-19}-$$

$$-4\cdot0,1186\cdot10^{-4}\cdot0,2704\cdot10^{-14}+6\cdot(0,1186\cdot10^{-4})^2\cdot0,1645\cdot10^{-9}-$$

$$-3\cdot(0,1186\cdot10^{-4})^2=0,3343\cdot10^{-20}.$$

9. Вычисляем *коэффициент асимметрии* по формуле (3.13):

$$A_x=\frac{\mu_3}{s_x^3}=\frac{0,1892\cdot10^{-15}}{(0,2371\cdot10^{-10})^{3/2}}=1,639.$$

10. Вычисляем *эксцесс* по формуле (3.15):

$$E_x=\frac{\mu_4}{s_x^4}-3=\frac{0,3343\cdot10^{-20}}{(0,2371\cdot10^{-10})^2}-3=2,946.$$

Результаты расчётов показывают, что данный цементный раствор является седиментационно устойчивым - значительная часть (32 мг из 70 мг) осталась во взвешенном состоянии. Коэффициент асимметрии $A_x$=1,639 указывает на смещение центра распределения в сторону мелких частиц, а эксцесс $E_x$=2,946 на явно выраженную островершинность распределения.

## 4. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ

Корреляционный анализ - *статистический метод*, позволяющий выявить силу или тесноту *линейной связи* между двумя и более *случайными величинами*. *Корреляционный анализ* занимает промежуточное положение между собственно статистическими методами анализа и методами математического моделирования. В отличие от тех статистических методов, предметом которых являются *выборки*, характеризующие один *признак совокупности*, предметом корреляционного анализа являются *выборки*, характеризующие два и более признака. Это могут быть пары случайных величин: $Y$ и $X$, группы случайных величин трёхмерного пространства ($X$, $Y$, $Z$), четырёхмерного пространства-времени ($X$, $Y$, $Z$, $\tau$) или концептуального многофакторного пространства ($Y$, $X_1$, $X_2$, ..., $X_k$).

### 4.1. Корреляция

*Корреляция* - *вероятностная* или *статистическая зависимость* между двумя и более *случайными величинами*. В отличие от *функциональной* зависимости корреляция возникает тогда, когда зависимость одного признака (случайной величины $Y$) от другого (от другой случайной величины $X$) осложняется случайными *факторами* или когда среди условий,

$$\mu_4=m_4-4m_1m_3+6m_1^2m_2-3m_1^4=0,5218\cdot10^{-19}-$$

$$-4\cdot0,1186\cdot10^{-4}\cdot0,2704\cdot10^{-14}+6\cdot(0,1186\cdot10^{-4})^2\cdot0,1645\cdot10^{-9}-$$

$$-3\cdot(0,1186\cdot10^{-4})^2=0,3343\cdot10^{-20}.$$

9. Вычисляем *коэффициент асимметрии* по формуле (3.13):

$$A_x=\frac{\mu_3}{s_x^3}=\frac{0,1892\cdot10^{-15}}{(0,2371\cdot10^{-10})^{3/2}}=1,639.$$

10. Вычисляем *эксцесс* по формуле (3.15):

$$E_x=\frac{\mu_4}{s_x^4}-3=\frac{0,3343\cdot10^{-20}}{(0,2371\cdot10^{-10})^2}-3=2,946.$$

Результаты расчётов показывают, что данный цементный раствор является седиментационно устойчивым - значительная часть (32 мг из 70 мг) осталась во взвешенном состоянии. Коэффициент асимметрии $A_x$=1,639 указывает на смещение центра распределения в сторону мелких частиц, а эксцесс $E_x$=2,946 на явно выраженную островершинность распределения.

## 4. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ

Корреляционный анализ - *статистический метод*, позволяющий выявить силу или тесноту *линейной связи* между двумя и более *случайными величинами*. *Корреляционный анализ* занимает промежуточное положение между собственно статистическими методами анализа и методами математического моделирования. В отличие от тех статистических методов, предметом которых являются *выборки*, характеризующие один *признак совокупности*, предметом корреляционного анализа являются *выборки*, характеризующие два и более признака. Это могут быть пары случайных величин: $Y$ и $X$, группы случайных величин трёхмерного пространства ($X$, $Y$, $Z$), четырёхмерного пространства-времени ($X$, $Y$, $Z$, $\tau$) или концептуального многофакторного пространства ($Y$, $X_1$, $X_2$, ..., $X_k$).

### 4.1. Корреляция

*Корреляция* - *вероятностная* или *статистическая зависимость* между двумя и более *случайными величинами*. В отличие от *функциональной* зависимости корреляция возникает тогда, когда зависимость одного признака (случайной величины $Y$) от другого (от другой случайной величины $X$) осложняется случайными *факторами* или когда среди условий, от которых зависят две случайные величины, например $Y$ и $Z$, имеются общие для них обоих условия $X_1$, $X_2, \ldots, X_k$. Для визуального анализа силы связи между случайными величинами $x$ и $y$ в декартовой системе координат $y$-$x$ строятся *графики*, называемые *корреляционным полем* (см. рис.1.9 и рис.1.10.).

Например, есть ли связь между средней температурой больных того или иного отделения больницы и средним баллом дипломов лечащих врачей? Какова вероятность выйти живым из этой больницы, из другой, из третьей? Есть ли корреляция между атмосферным давлением (вспышками на Солнце, флуктуациями магнитного поля земли) и артериальным давлением человека (молодого, пожившего)? Есть ли корреляция между принимаемыми лекарствами, их дозами в развитии болезни? Прекратим медицинскую тему (в медицине метод корреляционного анализа применяется очень широко).

Какова сила связи между *количеством* ДТП на дорогах и объёмом производимого алкоголя в этом государстве, в соседнем, дружественном или не очень? А с *качеством* того же алкоголя? Есть ли корреляция между уровнем рождаемости и уровнем жизни? Различаются ли эти корреляции в развитых и слаборазвитых странах? Есть ли связь между количеством и качеством катастроф на дорогах и погодой? А как насчёт выявления тайных сговоров фирм, компаний о реализации продукции? И, наконец, есть ли связь (точнее, различие) в отработках долот двух заводов? Влияет ли литология разреза на сцепление цементного камня с обсадной колонной? Довольно, эти и подобные вопросы бесконечны. Важно другое - констатация наличия связи поможет принять верное решение.

Бывают ситуации, когда интерес представляет только наличие или отсутствие какой-либо связи между группами случайных величин и, если связь есть, то степень тесноты этой связи. Бывают случаи, когда уровень знаний о процессах, происходящих в природе, недостаточен. И, что немаловажно, не ставится вопрос о *причинах* и *следствиях* или о направленности связи. Дело в том, что статистическая зависимость, как бы ни была она сильна, никогда не может установить причинной связи: предположения о причинах и следствиях следует искать вне *статистики*, в частности, в сфере *физической сущности явления*.

Если наличие связи с той или иной степенью достоверности доказано, то, пользуясь методами математического моделирования, можно эту связь *формализовать*, опять же учитывая физическую сущность явления. Под формализацией причинно-следственной связи (*зависимости*) подразумевается подбор подходящего уравнения и вычисление его *параметров*. Например, $y=bx$, $y=b_0+b_1x$, $y=b_0+b_1x_1+b_2x_2+...+b_kx_k$ и т.п.

См. статью *Данных обработка математическая.*

### 4.2. Коэффициент корреляции

Количественной характеристикой силы или тесноты *линейной связи* между *случайными величинами* является *коэффициент корреляции*. Например, характеристикой связи случайных величин $Y$ и $X$ является безразмерный коэффициент корреляции, $\rho_{xy}$:

$$\rho_{xy} = \frac{\mathbf{E}[(X-M_x)(Y-M_y)]}{б_x б_y},$$

где $б_x$ и $б_y$ - *генеральные квадратичные отклонения* случайных величин $X$ и $Y$; $\mathbf{E}$ - *математическое ожидание*. В общем случае, когда величины $X$ и $Y$ связаны произвольной *вероятностной* зависимостью, коэффициент корреляции может иметь значение в пределах $-1<\rho_{xy}<+1$. При $\rho_{xy}>0$ существует положительная корреляционная связь между величинами $Y$ и $X$, при $\rho_{xy}<0$ - отрицательная. Для *независимых* случайных величин $\rho_{xy}=0$.

*Генеральный* коэффициент корреляции, $\rho_{xy}$, является некоторой *абстрактной* величиной, - как и *математическое ожидание* случайной *физической* величины, его невозможно определить в *результате эксперимента*. Реальный, *выборочный* коэффициент корреляции, $r_{xy}$, определяется по результатам эксперимента, только при этом используются выборочные *средние* $x_{ср}$ и $y_{ср}$ и выборочные *дисперсии* $s^2_x$ и $s^2_y$:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{(n-1)s_x s_y}.$$

*Степеней свободы число* $\nu$ для найденного таким путём коэффициента корреляции $r_{xy}$ равно $\nu=n-2$, поскольку вычисление $x_{ср}$ и $y_{ср}$ соответствует наложению на выборку двух связей.

Коэффициент корреляции одинаково отмечает и слишком большую долю случайности (большие *ошибки наблюдений*), и значительную *криволинейность* этой связи. Выборочный коэффициент корреляции в той или иной степени $-1<r_{xy}<1$ всегда. Между величинами $Y$ и $X$ может быть достаточно определённая нелинейная функциональная зависимость, а коэффициент корреляции будет меньше единицы. И наоборот, между величинами $X$ и $Y$ может явно отсутствовать какая-либо зависимость, а выборочный коэффициент корреляции будет отличаться от нуля. В частности, значение $r_{xy}=0$ можно получить, если массивы $y$ и $x$ - целые числа и в декартовой системе координат представляют собой квадрат, прямоугольник или прямую линию, параллельную какой-либо оси.

### 4.3. Проверка гипотезы о значимости коэффициента корреляции

Наличие или отсутствие *линейной связи* между *случайными величинами* $X$ и $Y$ проверяется с помощью *коэффициента корреляции* $\rho_{xy}$. Нулевая гипотеза предполагает, что две *переменные* независимы и любое ненулевое значение $r$ возникло из-за случайных *флуктуаций*, т.е.

$$H_0: \rho_{xy}=0.$$

Другими словами, нулевая гипотеза $H_0$ является гипотезой об отсутствии различия между генеральным коэффициентом корреляции $\rho_{xy}$ и нулём.

Альтернативной гипотезой будет неравенство:

$$H_1: \rho_{xy}\neq 0.$$

Правило, в соответствии с которым принимается или отклоняется нулевая гипотеза, заключается в сравнении некоторого комплекса физических *величин*, вычисленного по данным *выборки*, с подобным комплексом, вычисляемым **независимым путём**. Первый называется *статистикой критерия* (*опытным* критерием), последний - *статистическим критерием* (табличным критерием).

В нашем случае статистикой критерия является опытный *Стьюдента критерий*, вычисляемый по *результатам эксперимента* по формуле (1.83), (1.131):

$$t^{on}=\frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}.$$

**Правило** определения *критического значения статистического критерия* заключается в том, что исследователь (руководитель) принимает на себя ответственность за *фиксацию уровня значимости* $\alpha$, т.е. принимает допустимую *вероятность ошибочно* отвергнуть проверяемую *нулевую гипотезу* $H_0$, когда она верна. Критические значения *критерия Стьюдента* $t^{\alpha}{}_{\nu}$ *определяют* для принимаемого уровня значимости $\alpha$, руководствуясь правилом (1.180), (1.254):

$$\int\limits_{t_\nu^\alpha}^{\infty} p(t)dt = P\left(t_\nu^{on}>t_\nu^\alpha\right) = \alpha.$$

где $t^{оп}$ - *опытное* значение критерия Стьюдента, $\alpha$ - площадь под *кривой* $p(t)$, характеризующая вероятность ошибочно отвергнуть верную нулевую гипотезу (см. рис. 1.24, 1.25, 1.26, 1.29. См. также *уравнение* (1.254) и соответствующий раздел). Табулированные значения $t_\nu$ для различных уровней значимости $\alpha$ приведены в Приложении 6. В нашем случае критерий Стьюдента двусторонний, т.к. коэффициент корреляции может находиться в пределах $-1<\rho_{xy}<+1$.

*Опытный* критерий Стьюдента сравнивается с табличным для числа степеней свободы $\nu=n-2$ и принятого *уровня значимости* $\alpha$ (см. *Статистических гипотез проверка*). Если $t^{оп}<t^{\alpha}{}_{\nu}$, то принимается нулевая гипотеза, если $t^{оп}>t^{\alpha}{}_{\nu}$ - альтернативная.

В заключение. Особенности корреляционного метода также кратко описаны в следующих статьях данного руководства: *Данных обработка математическая, Значимости уровень статистического критерия, Значимость параметра, Корреляционная таблица, Корреляционное поле, Корреляционный анализ, Корреляция, Коэффициент корреляции, Нулевая гипотеза, Правило* определения *критического значения статистического критерия, Причинность, Причинно-следственная связь, Связь, Статистических гипотез проверка, Стьюдента критерий, Стьюдента распределение*. Подробно см. [2, 7, 16, 19, 25, 29, 35, 39, 40, 42, 43, 60, 65].

### Пример 5. Определение силы или тесноты линейной связи между случайными величинами $Y$ и $X$

Результаты *наблюдений* (*экспериментов*) представим в виде *корреляционной таблицы*.

*Таблица 9.*

Корреляционная таблица и результаты расчёта компонентов выборочного коэффициента корреляции

| $n$ | $x_i$ | $y_i$ | $x^2$ | $y^2$ | $x_i y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 4,0 | 4,0 | 16,0 | 8,0 |
| 2 | 4 | 6,5 | 16,0 | 42,25 | 26,0 |
| 3 | 6 | 5,0 | 36,0 | 25,0 | 30,0 |
| 4 | 8 | 7,0 | 64,0 | 49,0 | 56,0 |
| 5 | 10 | 9,0 | 100,0 | 81,0 | 90,0 |
| 6 | 12 | 7,5 | 144,0 | 56,25 | 90,0 |
| 7 | 14 | 11,0 | 196,0 | 121,0 | 154,0 |
| 8 | 16 | 9,5 | 256,0 | 90,25 | 152,0 |
| 9 | 18 | 11,5 | 324,0 | 133,25 | 207,0 |
| суммы | 90,0 | 71,0 | 1140,0 | 613,0 | 813,0 |

Соответствующее *корреляционное поле* представлено на рис. 4.1. *Выборочный коэффициент корреляции* вычисляем по формуле (1.82):

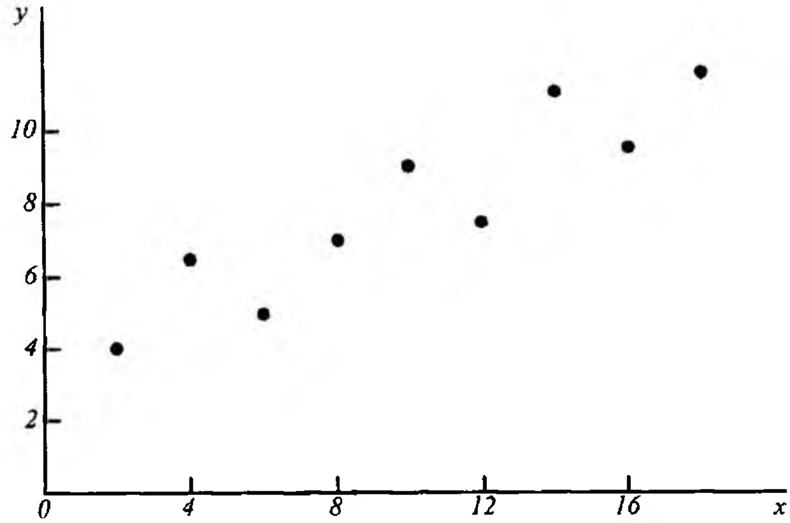



Рис. 4.1. Корреляционное поле случайных величин $y$ и $x$

$$r_{xy} = \frac{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{\left[n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right]\cdot\left[n\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right]}} =$$

$$= \frac{9\cdot 813-90\cdot 71}{((9\cdot 1140-90^2)(9\cdot 613-71^2))^{0.5}} = 0,9142.$$

Коэффициент корреляции достаточно высок; очевидно, что линейная связь $Y$ от $X$ присутствует. Проверим статистическую гипотезу о значимости этой связи.

Наличие или отсутствие *линейной связи* между *случайными величинами* $X$ и $Y$ проверяется с помощью *коэффициента корреляции* $\rho_{xy}$. Нулевая гипотеза предполагает, что две *переменные* независимы и любое ненулевое значение $r$ возникло из-за случайных *флуктуаций*, т.е.

$$H_0: \rho_{xy}=0.$$

Альтернативной гипотезой будет:

$$H_1: \rho\neq 0,$$

Опытный *Стьюдента критерий* вычисляется по формуле (1.131):

$$t^{оп} = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{0,9142\sqrt{9-2}}{\sqrt{1-0,9142^2}} = 5,968 > t_7^{0,05} = 2,365,$$

где 2,365 - двусторонний критерий Стьюдента для **принимаемого** исследователем *уровня значимости* $\alpha$=0,05 и *числа степеней свободы* $\nu=n-2=7$ (см. Приложение 6).

Опытный критерий Стьюдента (т.е. критерий, вычисленный по *результатам эксперимента*) сравнивается с табличным. Поскольку опытный критерий Стьюдента больше табличного (т.е. он попал в критическую область отклонения нулевой гипотезы), гипотеза об отсутствии линейной связи между случайными величинами Y и X отклоняется и принимается альтернативная - линейная зависимость между случайными величинами $Y$ и $X$ с доверительной вероятностью $P$=0,95 имеет место быть.

### Пример 6. Проверка гипотезы об отсутствии корреляции между случайными величинами $Y$ и $X$

Давайте, интереса ради, вычислим коэффициент корреляции для "звёздного неба" (рис.1.10,ж). Вряд ли кому-нибудь придёт в голову размещать в ночном звёздном небе точки отсчёта и системы координат с целью поиска корреляционных связей, поэтому ограничимся случайным набором точек зафиксированных целыми числами. Результаты такого творчества оформим в виде корреляционной таблицы (см. след. стр.).

Соответствующее корреляционное поле представлено на рис. 4.2. *Выборочный коэффициент корреляции* вычисляем по формуле (1.82):

$$r_{xy} = \frac{23\cdot 608-132\cdot 107}{((23\cdot 1006-132^2)(23\cdot 617-107^2))^{0.5}} = -0{,}03537.$$

Коэффициент корреляции очень мал; очевидно, что линейная связь $Y$ от $X$ отсутствует. Проверим статистическую гипотезу о значимости этой связи.

Опытный критерий Стьюдента вычисляется по формуле (1.131):

$$t^{оп} = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{-0{,}03537\sqrt{23-2}}{\sqrt{1-(-0{,}03537)^2}} = -0{,}1622 > t_{21}^{0.05} = -2{,}08,$$

где 2,08 - двусторонний критерий Стьюдента для принимаемого по аналогии с "правилом двух сигма" уровня значимости $\alpha$=0,05 и числа степеней свободы $\nu=n-2=21$ (по поводу "правила двух сигма" см. *Вероятность житейская*).

Наш опытный критерий Стьюдента попал в отрицательную область принятия нулевой гипотезы - гипотезы об отсутствии значимого разли-

*Таблица* 10.

Корреляционная таблица и результаты расчёта компонентов выборочного коэффициента корреляции

| $n$ | $x_1$ | $y_1$ | $x^2$ | $y^2$ | $x_1 y_1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 1 | 4 | 2 |
| 2 | 1 | 5 | 1 | 25 | 5 |
| 3 | 1 | 8 | 1 | 64 | 8 |
| 4 | 2 | 3 | 4 | 9 | 6 |
| 5 | 2 | 7 | 4 | 49 | 14 |
| 6 | 3 | 1 | 9 | 1 | 3 |
| 7 | 3 | 4 | 9 | 16 | 12 |
| 8 | 3 | 6 | 9 | 36 | 18 |
| 9 | 4 | 7 | 16 | 49 | 28 |
| 10 | 5 | 3 | 25 | 9 | 15 |
| 11 | 5 | 5 | 25 | 25 | 25 |
| 12 | 6 | 2 | 36 | 4 | 12 |
| 13 | 6 | 7 | 36 | 49 | 42 |
| 14 | 7 | 4 | 49 | 16 | 28 |
| 15 | 7 | 8 | 49 | 64 | 56 |
| 16 | 8 | 1 | 64 | 1 | 8 |
| 17 | 8 | 6 | 64 | 36 | 48 |
| 18 | 9 | 3 | 81 | 9 | 27 |
| 19 | 9 | 7 | 81 | 49 | 63 |
| 20 | 10 | 4 | 100 | 16 | 40 |
| 21 | 10 | 6 | 100 | 36 | 60 |
| 22 | 11 | 1 | 121 | 1 | 11 |
| 23 | 11 | 7 | 121 | 49 | 77 |
| суммы | 132 | 107 | 1006 | 617 | 608 |

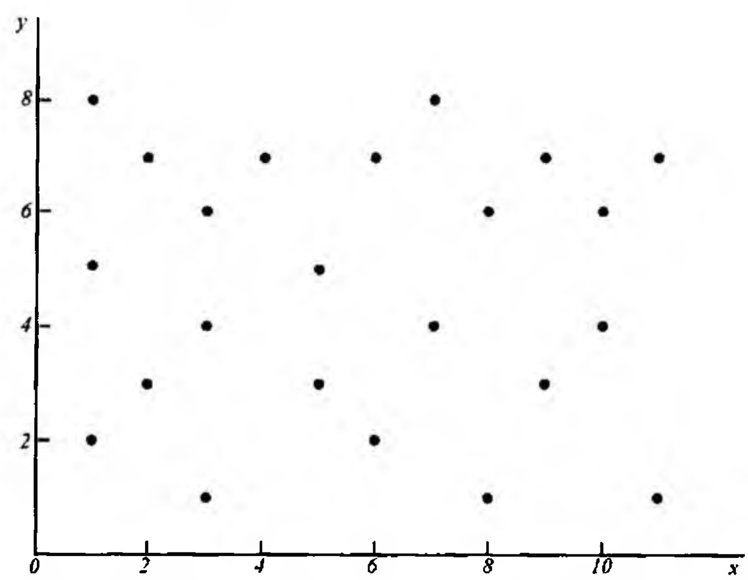



Рис. 4.2. Корреляционное поле случайных величин $Y$ и $X$

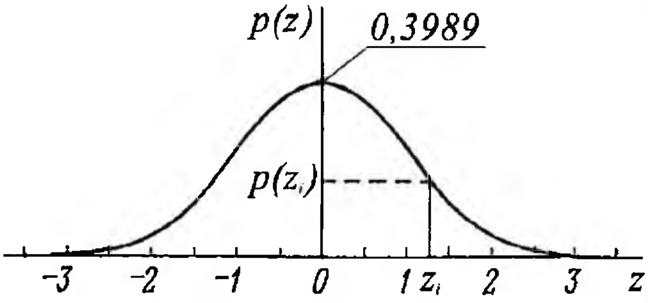
чия между нулём и коэффициентом корреляции (см. рис.1.41). Другими словами, связь между случайными величинами Y и X с доверительной вероятностью $P$=0,95 отсутствует.

345

Приложение 1.

**Значения $p(z)$ (ординаты) стандартизованного нормального распределения**

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$




| z | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,3989 | 0,3989 | 0,3989 | 0,3988 | 0,3986 | 0,3986 | 0,3982 | 0,3930 | 0,3977 | 0,3973 |
| 0,1 | 0,3970 | 0,3966 | 0,3961 | 0,3956 | 9,3951 | 0,3945 | 0,3939 | 0,3932 | 0,3925 | 0,3918 |
| 0,2 | 0,3910 | 0,3902 | 0,3894 | 0,3884 | 0,3876 | 0,3867 | 0,3857 | 0,3847 | 0,3836 | 0,3825 |
| 0,3 | 0,3814 | 0,3802 | 0,3790 | 0,3778 | 0,3765 | 0,3752 | 0,3739 | 0,3725 | 0,3712 | 0,3697 |
| 0,4 | 0,3683 | 0,3668 | 0,3653 | 0,3637 | 0,3621 | 0,3605 | 0,3589 | 0,3572 | 0,3555 | 0,3538 |
| 0,5 | 0,3521 | 0,3503 | 0,3485 | 0,3467 | 0,3448 | 0,3429 | 0,3410 | 0,3391 | 0,3372 | 0,3352 |
| 0,6 | 0,3332 | 0,3312 | 0,3292 | 0,3271 | 0,3251 | 0,3230 | 0,3209 | 0,3187 | 0,3166 | 0,3144 |
| 0,7 | 0,3123 | 0,3101 | 0,3079 | 0,3056 | 0,3034 | 0,3011 | 0,2989 | 0,2966 | 0,2943 | 0,2920 |
| 0,8 | 0,2897 | 0,2874 | 0,2850 | 0,2827 | 0,2803 | 0,2780 | 0,2756 | 0,2732 | 0,2709 | 0,2685 |
| 0,9 | 0,2661 | 0,2637 | 0,2613 | 0,2589 | 0,2565 | 0,2541 | 0,2516 | 0,2492 | 0,2468 | 0,2444 |
| 1,0 | 0,2420 | 0,2396 | 0,2371 | 0,2347 | 0,2323 | 0,2299 | 0,2275 | 0,2251 | 0,2227 | 0,2203 |
| 1,1 | 0,2179 | 0,2155 | 0,2131 | 0,2107 | 0,2083 | 0,2059 | 0,2036 | 0,2012 | 0,1989 | 0,1965 |
| 1,2 | 0,1942 | 0,1919 | 0,1895 | 0,1872 | 0,1849 | 0,1826 | 0,1804 | 0,1781 | 0,1758 | 0,1736 |
| 1,3 | 0,1714 | 0,1691 | 0,1669 | 0,1647 | 0,1626 | 0,1605 | 0,1582 | 0,1561 | 0,1539 | 0,1518 |
| 1,4 | 0,1497 | 0,1476 | 0,1456 | 0,1435 | 0,1415 | 0,1394 | 0,1374 | 0,1354 | 0,1334 | 0,1315 |
| 1,5 | 0,1295 | 0,1276 | 0,1257 | 0,1238 | 0,1219 | 0,1200 | 0,1282 | 0,1163 | 0,1145 | 0,1127 |
| 1,6 | 0,1109 | 0,1092 | 0,1074 | 0,1057 | 0,1040 | 0,1023 | 0,1005 | 0,0989 | 0,0973 | 0,0957 |
| 1,7 | 0,0940 | 0,0925 | 0,0909 | 0,0893 | 0,0878 | 0,0863 | 0,0818 | 0,0833 | 0,0818 | 0,0804 |
| 1,8 | 0,0790 | 0,0775 | 0,0761 | 0,0748 | 0,0734 | 0,0721 | 0,0707 | 0,0594 | 0,0681 | 0,0669 |
| 1,9 | 0,0656 | 0,0644 | 0,0632 | 0,0620 | 0,0608 | 0,0596 | 0,0584 | 0,0573 | 0,0562 | 0,0051 |
| 2,0 | 0,0540 | 0,0529 | 0,0519 | 0,0508 | 0,0498 | 0,0488 | 0,0478 | 0,0468 | 0,0459 | 0,0449 |
| 2,1 | 0,0440 | 0,0431 | 0,0422 | 0,0413 | 0,0404 | 0,0396 | 0,0387 | 0,0379 | 0,0371 | 0,0363 |
| 2,2 | 0,0355 | 0,0347 | 0,0339 | 0,0332 | 0,0325 | 0,0317 | 0,0310 | 0,0303 | 0,0297 | 0,0290 |
| 2,3 | 0,0283 | 0,0277 | 0,0270 | 0,0264 | 0,0258 | 0,0252 | 0,0246 | 0,0241 | 0,0235 | 0,0229 |
| 2,4 | 0,0224 | 0,0219 | 0,0213 | 0,0208 | 0,0203 | 0,0198 | 0,0194 | 0,0189 | 0,0184 | 0,0180 |
| 2,5 | 0,0175 | 0,0171 | 0,0167 | 0,0163 | 0,0158 | 0,0154 | 0,0151 | 0,0147 | 0,0143 | 0,0139 |
| 2,6 | 0,0136 | 0,0132 | 0,0129 | 0,0126 | 0,0122 | 0,0119 | 0,0116 | 0,0113 | 0,0110 | 0,0107 |
| 2,7 | 0,0104 | 0,0101 | 0,0099 | 0,0096 | 0,0093 | 0,0091 | 0,0088 | 0,0086 | 0,0084 | 0,0081 |
| 2,8 | 0,0079 | 0,0077 | 0,0075 | 0,0073 | 0,0071 | 0,0069 | 0,0067 | 0,0065 | 0,0063 | 0,0061 |
| 2,9 | 0,0060 | 0,0058 | 0,0056 | 0,0055 | 0,0053 | 0,0051 | 0,0050 | 0,0048 | 0,0047 | 0,0046 |
| 3,0 | 0,0044 | 0,0043 | 0,0042 | 0,0040 | 0,0039 | 0,0038 | 0,0037 | 0,0036 | 0,0035 | 0,0034 |
| 3,1 | 0,0033 | 0,0032 | 0,0031 | 0,0030 | 0,0029 | 0,0028 | 0,0027 | 0,0026 | 0,0025 | 0,0025 |
| 3,2 | 0,0024 | 0,0023 | 0,0022 | 0,0022 | 0,0021 | 0,0020 | 0,0020 | 0,0019 | 0,0018 | 0,0018 |
| 3,3 | 0,0017 | 0,0017 | 0,0016 | 0,0016 | 0,0015 | 0,0015 | 0,0014 | 0,0014 | 0,0013 | 0,0013 |
| 3,4 | 0,0012 | 0,0012 | 0,0012 | 0,0011 | 0,0011 | 0,0010 | 0,0010 | 0,0010 | 0,0009 | 0,0009 |
| 3,5 | 0,0009 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0007 | 0,0007 | 0,0007 | 0,0007 | 0,0006 |
| 3,6 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0004 |
| 3,7 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 |
| 3,8 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 |
| 3,9 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0001 | 0,0001 |

349

Приложение 2

**Значения функции Лапласа $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$**

| 0 | Φ(z) | 0 | Φ(z) | 0 | Φ(z) | 0 | Φ(z) | 0 | Φ(z) | 0 | Φ(z) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | 0,0000 | 0,44 | 0,1700 | 0,88 | 0,3106 | 1,32 | 0,4066 | 1,76 | 0,4608 | 2,40 | 0,4918 |
| 0,01 | 0,0040 | 0,45 | 0,1736 | 0,89 | 0,3133 | 1,33 | 0,4082 | 1,77 | 0,4616 | 2,42 | 0,4922 |
| 0,02 | 0,0080 | 0,46 | 0,1772 | 0,90 | 0,3159 | 1,34 | 0,4099 | 1,78 | 0,4625 | 2,44 | 0,4927 |
| 0,03 | 0,0120 | 0,47 | 0,1808 | 0,91 | 0,3186 | 1,35 | 0,4115 | 1,79 | 0,4633 | 2,46 | 0,4931 |
| 0,04 | 0,0160 | 0,48 | 0, 1844 | 0,92 | 0,3212 | 1,36 | 0,4131 | 1,80 | 0,4641 | 2,48 | 0,4934 |
| 0,05 | 0,0199 | 0,49 | 0,1879 | 0,93 | 0,3238 | 1,37 | 0,4131 | 1,81 | 0,4649 | 2,50 | 0,4938 |
| 0,06 | 0,0239 | 0,50 | 0,1915 | 0,94 | 0,3264 | 1,38 | 0,4147 | 1,82 | 0,4656 | 2,52 | 0,4941 |
| 0,07 | 0,0279 | 0,51 | 0,195 | 0,95 | 0,3289 | 1,39 | 0,4177 | 1,83 | 0,4664 | 2,54 | 0,4945 |
| 0,08 | 0,0319 | 0,52 | 0,1985 | 0,96 | 0,3315 | 1,40 | 0,4192 | 1,84 | 0,4671 | 2,56 | 0,4948 |
| 0,09 | 0,0359 | 0,53 | 0,2019 | 0,97 | 0,334 | 1,41 | 0,4207 | 1,85 | 0,4678 | 2,58 | 0,4951 |
| 0,10 | 0,0398 | 0,54 | 0,2054 | 0,98 | 0,3365 | 1,42 | 0,4222 | 1,86 | 0,4686 | 2,60 | 0,4953 |
| 0,11 | 0,0478 | 0,55 | 0,2088 | 0,99 | 0,3389 | 1,43 | 0,4236 | 1,87 | 0,4693 | 2,62 | 0,4956 |
| 0,12 | 0,0478 | 0,56 | 0,2123 | 1,00 | 0,34 | 1,44 | 0,4251 | 1,88 | 0,4699 | 2,64 | 0,4959 |
| 0,13 | 0,0517 | 0,57 | 0,2157 | 1,01 | 0,3438 | 1,45 | 0,4265 | 1,89 | 0,4706 | 2,66 | 0,4961 |
| 0,14 | 0,0557 | 0,58 | 0,219 | 1,02 | 0,3461 | 1,46 | 0,4279 | 1,90 | 0,4713 | 2,68 | 0,4963 |
| 0,15 | 0,0596 | 0,59 | 0,2224 | 1,03 | 0,3485 | 1,47 | 0,4292 | 1,91 | 0,4719 | 2,70 | 0,4965 |
| 0,16 | 0,0636 | 0,60 | 0,2257 | 1,04 | 0,3508 | 1,48 | 0,4306 | 1,92 | 0,4726 | 2,72 | 0,4967 |
| 0,17 | 0,0675 | 0,61 | 0,2291 | 1,05 | 0,3531 | 1,49 | 0,4319 | 1,93 | 0,4732 | 2,74 | 0,4969 |
| 0,18 | 0,0714 | 0,62 | 0,2324 | 1,06 | 0,3554 | 1,50 | 0,43 | 1,94 | 0,4738 | 2,76 | 0,4971 |
| 0,19 | 0,0753 | 0,63 | 0,2357 | 1,07 | 0,3577 | 1,51 | 0,4345 | 1,95 | 0,4744 | 2,78 | 0,4973 |
| 0,20 | 0,0793 | 0,64 | 0,2389 | 1,08 | 0,3599 | 1,52 | 0,4357 | 1,96 | 0,475 | 2,80 | 0,4974 |
| 0,21 | 0,0832 | 0,65 | 0,2422 | 1,09 | 0,3621 | 1,53 | 0,437 | 1,97 | 0,4756 | 2,82 | 0,4976 |
| 0,22 | 0,0871 | 0,66 | 0,2454 | 1,10 | 0,3643 | 1,54 | 0,4382 | 1,98 | 0,4761 | 2,84 | 0,4977 |
| 0,23 | 0,0910 | 0,67 | 0,2486 | 1,11 | 0,3665 | 1,55 | 0,4394 | 1,99 | 0,4767 | 2,86 | 0,4979 |
| 0,24 | 0,0948 | 0,68 | 0,2517 | 1,12 | 0,3686 | 1,56 | 0,4406 | 2,00 | 0,4772 | 2,88 | 0,498 |
| 0,25 | 0,0987 | 0,69 | 0,2549 | 1,13 | 0,3708 | 1,57 | 0,4418 | 2,02 | 0,4783 | 2,90 | 0,4981 |
| 0,26 | 0,1026 | 0,70 | 0,258 | 1,14 | 0,3729 | 1,58 | 0,4429 | 2,04 | 0,4793 | 2,92 | 0,4982 |
| 0,27 | 0,1064 | 0,71 | 0,2611 | 1,15 | 0,3749 | 1,59 | 0,4441 | 2,06 | 0,4803 | 2,94 | 0,4984 |
| 0,28 | 0,1103 | 0,72 | 0,2642 | 1,16 | 0,377 | 1,60 | 0,4452 | 2,08 | 0,4812 | 2,96 | 0,49846 |
| 0,29 | 0,1141 | 0,73 | 0,2673 | 1,17 | 0,379 | 1,61 | 0,4463 | 2,10 | 0,4821 | 2,98 | 0,49856 |
| 0,30 | 0,1179 | 0,74 | 0,2703 | 1,18 | 0,381 | 1,62 | 0,4474 | 2,12 | 0,483 | 3,00 | 0,49865 |
| 0,31 | 0,1217 | 0,75 | 0,2734 | 1,19 | 0,383 | 1,63 | 0,4484 | 2,14 | 0,4838 | 3,20 | 0,49931 |
| 0,32 | 0,1255 | 0,76 | 0,2764 | 1,20 | 0,3849 | 1,64 | 0,4495 | 2,16 | 0,4846 | 3,40 | 0,49966 |
| 0,33 | 0,1293 | 0,77 | 0,2794 | 1,21 | 0,3869 | 1,65 | 0,4505 | 2,18 | 0,4854 | 3,60 | 0,49984 |
| 0,34 | 0,1331 | 0,78 | 0.2823 | 1,22 | 0,3883 | 1,66 | 0,4515 | 2,20 | 0,4861 | 3,80 | 0,499928 |
| 0,35 | 0,1368 | 0,79 | 0,2852 | 1,23 | 0,3907 | 1,67 | 0,4525 | 2,22 | 0,4868 | 4,00 | 0,499968 |
| 0,36 | 0,1406 | 0,80 | 0,2881 | 1,24 | 0,3925 | 1,68 | 0,4535 | 2,24 | 0,4875 | 5,00 | 0,499997 |
| 0,37 | 0,1443 | 0,81 | 0,291 | 1,25 | 0,3944 | 1,69 | 0,4545 | 2,26 | 0,4881 | | |
| 0,38 | 0,1480 | 0,82 | 0,2939 | 1,26 | 0,3962 | 1,70 | 0,4554 | 2,28 | 0,4887 | | |
| 0,39 | 0,1517 | 0,83 | 0,2967 | 1,27 | 0,398 | 1,71 | 0,4564 | 2,30 | 0,4893 | | |
| 0,40 | 0,1554 | 0,84 | 0,2995 | 1,28 | 0,3997 | 1,72 | 0,4573 | 2,32 | 0,4898 | | |
| 0,41 | 0,1591 | 0,85 | 0,3023 | 1,29 | 0,4015 | 1,73 | 0,4582 | 2,34 | 0,4904 | | |
| 0,42 | 0,1628 | 0,86 | 0,3051 | 1,30 | 0,4032 | 1,74 | 0,4591 | 2,36 | 0,4909 | | |
| 0,43 | 0,1664 | 0,87 | 0,3078 | 1,31 | 0,4049 | 1,75 | 0,4599 | 2,38 | 0,4913 | | |

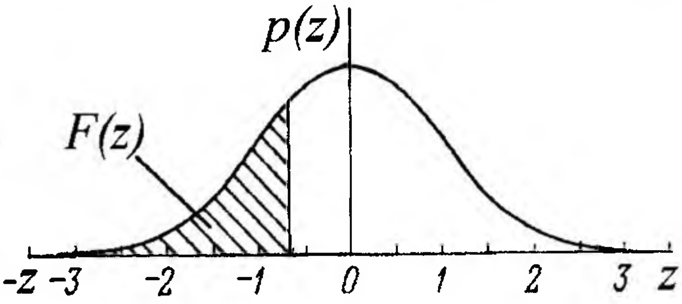
350

Приложение 3.

Функция вероятностей $F(z)$ стандартизованного нормального распределения

(площади стандартизованного нормального распределения от $-\infty$ до $z$)

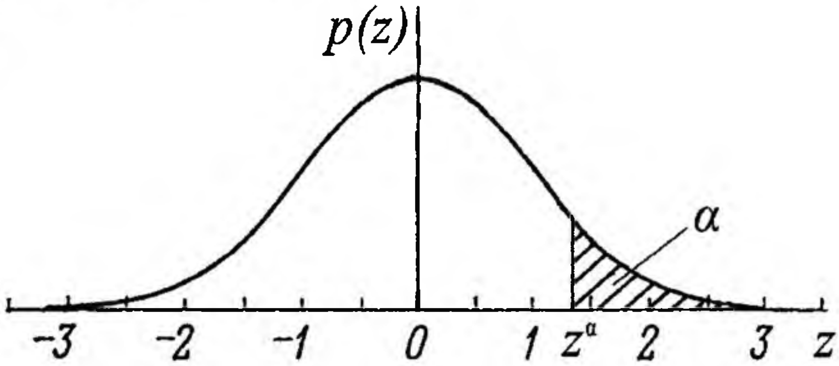
$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz.$$




| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -3.0 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.001 |
| -2.9 | 0.002 | 0.002 | 0.002 | 0.002 | 0.002 | 0.002 | 0.002 | 0.001 | 0.001 | 0.001 |
| -2.8 | 0.003 | 0.002 | 0.002 | 0.002 | 0.002 | 0.002 | 0.002 | 0.002 | 0.002 | 0.002 |
| -2.7 | 0.003 | 0.003 | 0.003 | 0.003 | 0.003 | 0.003 | 0.003 | 0.003 | 0.003 | 0.003 |
| -2.6 | 0.005 | 0.005 | 0.004 | 0.004 | 0.004 | 0.004 | 0.004 | 0.004 | 0.004 | 0.004 |
| -2.5 | 0.006 | 0.006 | 0.006 | 0.006 | 0.006 | 0.005 | 0.005 | 0.005 | 0.005 | 0.005 |
| -2.4 | 0.008 | 0.008 | 0.008 | 0.008 | 0.007 | 0.007 | 0.007 | 0.007 | 0.007 | 0.006 |
| -2.3 | 0.011 | 0.010 | 0.010 | 0.010 | 0.010 | 0.009 | 0.009 | 0.009 | 0.009 | 0.008 |
| -2.2 | 0.014 | 0.014 | 0.013 | 0.013 | 0.013 | 0.012 | 0.012 | 0.012 | 0.011 | 0.011 |
| -2.1 | 0.018 | 0.017 | 0.017 | 0.017 | 0.016 | 0.016 | 0.015 | 0.015 | 0.015 | 0.014 |
| -2.0 | 0.023 | 0.022 | 0.022 | 0.021 | 0.021 | 0.020 | 0.020 | 0.019 | 0.019 | 0.018 |
| -1.9 | 0.029 | 0.028 | 0.027 | 0.027 | 0.026 | 0.026 | 0.025 | 0.024 | 0.024 | 0.023 |
| -1.8 | 0.036 | 0.035 | 0.034 | 0.034 | 0.033 | 0.032 | 0.031 | 0.031 | 0.030 | 0.029 |
| -1.7 | 0.045 | 0.044 | 0.043 | 0.042 | 0.041 | 0.040 | 0.039 | 0.038 | 0.038 | 0.037 |
| -1.6 | 0.055 | 0.054 | 0.053 | 0.052 | 0.051 | 0.049 | 0.048 | 0.047 | 0.046 | 0.046 |
| -1.5 | 0.067 | 0.066 | 0.064 | 0.063 | 0.062 | 0.061 | 0.059 | 0.058 | 0.057 | 0.056 |
| -1.4 | 0.081 | 0.079 | 0.078 | 0.076 | 0.075 | 0.074 | 0.072 | 0.071 | 0.069 | 0.068 |
| -1.3 | 0.097 | 0.095 | 0.093 | 0.092 | 0.090 | 0.089 | 0.087 | 0.085 | 0.084 | 0.082 |
| -1.2 | 0.115 | 0.113 | 0.111 | 0.109 | 0.107 | 0.106 | 0.104 | 0.102 | 0.100 | 0.099 |
| -1.1 | 0.136 | 0.133 | 0.131 | 0.129 | 0.127 | 0.125 | 0.123 | 0.121 | 0.119 | 0.117 |
| -1.0 | 0.159 | 0.156 | 0.154 | 0.152 | 0.149 | 0.147 | 0.145 | 0.142 | 0.140 | 0.138 |
| -0.9 | 0.184 | 0.181 | 0.179 | 0.176 | 0.174 | 0.171 | 0.169 | 0.166 | 0.164 | 0.161 |
| -0.8 | 0.212 | 0.209 | 0.206 | 0.203 | 0.200 | 0.198 | 0.195 | 0.192 | 0.189 | 0.187 |
| -0.7 | 0.242 | 0.239 | 0.236 | 0.233 | 0.230 | 0.227 | 0.224 | 0.221 | 0.218 | 0.215 |
| -0.6 | 0.274 | 0.271 | 0.268 | 0.264 | 0.261 | 0.258 | 0.255 | 0.251 | 0.248 | 0.245 |
| -0.5 | 0.309 | 0.305 | 0.302 | 0.298 | 0.295 | 0.291 | 0.288 | 0.284 | 0.281 | 0.278 |
| -0.4 | 0.345 | 0.341 | 0.337 | 0.334 | 0.330 | 0.326 | 0.323 | 0.319 | 0.316 | 0.312 |
| -0.3 | 0.382 | 0.378 | 0.374 | 0.371 | 0.367 | 0.363 | 0.359 | 0.356 | 0.352 | 0.348 |
| -0.2 | 0.421 | 0.417 | 0.413 | 0.409 | 0.405 | 0.401 | 0.397 | 0.394 | 0.390 | 0.386 |
| -0.1 | 0.460 | 0.456 | 0.452 | 0.448 | 0.444 | 0.440 | 0.436 | 0.433 | 0.429 | 0.425 |
| -0.0 | 0.500 | 0.496 | 0.492 | 0.488 | 0.484 | 0.480 | 0.476 | 0.472 | 0.468 | 0.464 |
| 0.0 | 0.500 | 0.504 | 0.508 | 0.512 | 0.516 | 0.520 | 0.524 | 0.528 | 0.532 | 0.536 |
| 0.1 | 0.540 | 0.544 | 0.548 | 0.552 | 0.556 | 0.560 | 0.564 | 0.567 | 0.571 | 0.575 |
| 0.2 | 0.579 | 0.583 | 0.587 | 0.591 | 0.595 | 0.599 | 0.603 | 0.606 | 0.610 | 0.614 |
| 0.3 | 0.618 | 0.622 | 0.626 | 0.629 | 0.633 | 0.637 | 0.641 | 0.644 | 0.648 | 0.652 |
| 0.4 | 0.655 | 0.659 | 0.663 | 0.666 | 0.670 | 0.674 | 0.677 | 0.681 | 0.684 | 0.688 |
| 0.5 | 0.691 | 0.695 | 0.698 | 0.702 | 0.705 | 0.709 | 0.712 | 0.716 | 0.719 | 0.722 |
| 0.6 | 0.726 | 0.729 | 0.732 | 0.736 | 0.739 | 0.742 | 0.745 | 0.749 | 0.752 | 0.755 |
| 0.7 | 0.758 | 0.761 | 0.764 | 0.767 | 0.770 | 0.773 | 0.776 | 0.779 | 0.782 | 0.785 |
| 0.8 | 0.788 | 0.791 | 0.794 | 0.797 | 0.800 | 0.802 | 0.805 | 0.808 | 0.811 | 0.813 |
| 0.9 | 0.816 | 0.819 | 0.821 | 0.824 | 0.826 | 0.829 | 0.831 | 0.834 | 0.836 | 0.839 |
| 1.0 | 0.841 | 0.844 | 0.846 | 0.848 | 0.851 | 0.853 | 0.855 | 0.858 | 0.860 | 0.862 |
| 1.1 | 0.864 | 0.866 | 0.869 | 0.871 | 0.873 | 0.875 | 0.877 | 0.879 | 0.881 | 0.883 |
| 1.2 | 0.885 | 0.887 | 0.889 | 0.891 | 0.893 | 0.894 | 0.896 | 0.898 | 0.900 | 0.901 |
| 1.3 | 0.903 | 0.905 | 0.907 | 0.908 | 0.910 | 0.911 | 0.913 | 0.915 | 0.916 | 0.918 |
| 1.4 | 0.919 | 0.921 | 0.922 | 0.924 | 0.925 | 0.926 | 0.928 | 0.929 | 0.931 | 0.932 |
| 1.5 | 0.933 | 0.934 | 0.936 | 0.937 | 0.938 | 0.939 | 0.941 | 0.942 | 0.943 | 0.944 |
| 1.6 | 0.945 | 0.946 | 0.947 | 0.948 | 0.949 | 0.951 | 0.952 | 0.953 | 0.954 | 0.954 |
| 1.7 | 0.955 | 0.956 | 0.957 | 0.958 | 0.959 | 0.960 | 0.961 | 0.962 | 0.962 | 0.963 |
| 1.8 | 0.964 | 0.965 | 0.966 | 0.966 | 0.967 | 0.968 | 0.969 | 0.969 | 0.970 | 0.971 |
| 1.9 | 0.971 | 0.972 | 0.973 | 0.973 | 0.974 | 0.974 | 0.975 | 0.976 | 0.976 | 0.977 |
| 2.0 | 0.977 | 0.978 | 0.978 | 0.979 | 0.979 | 0.980 | 0.980 | 0.981 | 0.981 | 0.982 |
| 2.1 | 0.982 | 0.983 | 0.983 | 0.983 | 0.984 | 0.984 | 0.985 | 0.985 | 0.985 | 0.986 |
| 2.2 | 0.986 | 0.986 | 0.987 | 0.987 | 0.987 | 0.988 | 0.988 | 0.988 | 0.989 | 0.989 |
| 2.3 | 0.989 | 0.990 | 0.990 | 0.990 | 0.990 | 0.991 | 0.991 | 0.991 | 0.991 | 0.992 |
| 2.4 | 0.992 | 0.992 | 0.992 | 0.992 | 0.993 | 0.993 | 0.993 | 0.993 | 0.993 | 0.994 |
| 2.5 | 0.994 | 0.994 | 0.994 | 0.994 | 0.994 | 0.995 | 0.995 | 0.995 | 0.995 | 0.995 |
| 2.6 | 0.995 | 0.995 | 0.996 | 0.996 | 0.996 | 0.996 | 0.996 | 0.996 | 0.996 | 0.996 |
| 2.7 | 0.997 | 0.997 | 0.997 | 0.997 | 0.997 | 0.997 | 0.997 | 0.997 | 0.997 | 0.997 |
| 2.8 | 0.997 | 0.998 | 0.998 | 0.998 | 0.998 | 0.998 | 0.998 | 0.998 | 0.998 | 0.998 |
| 2.9 | 0.998 | 0.998 | 0.998 | 0.998 | 0.998 | 0.998 | 0.998 | 0.999 | 0.999 | 0.999 |
| 3.0 | 0.999 | 0.999 | 0.999 | 0.999 | 0.999 | 0.999 | 0.999 | 0.999 | 0.999 | 0.999 |

## Критические площади стандартизованного нормального распределения

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z^{\alpha}}^{\infty}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz=P\left(z>z^{\alpha}\right)$$

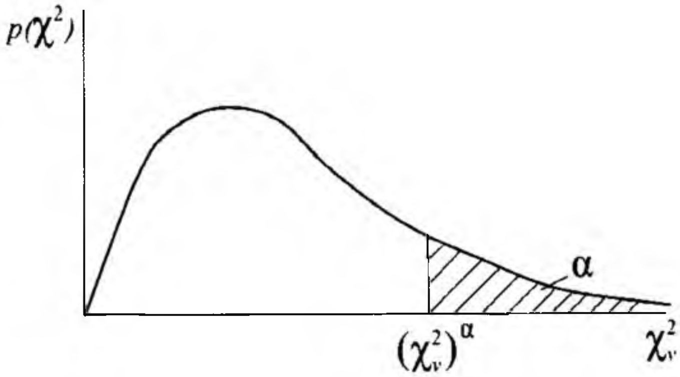



| $z_\alpha$ | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,5000 | 0,4960 | 0,4920 | 0,4880 | 0,4840 | 0,4801 | 0,4761 | 0,4721 | 0,4681 | 0,4641 |
| 0,1 | 0,4602 | 0,4562 | 0,4522 | 0,4483 | 0,4443 | 0,4404 | 0,4364 | 0,4325 | 0,4286 | 0,4247 |
| 0,2 | 0,4207 | 0,4168 | 0,4129 | 0,4090 | 0,4052 | 0,4013 | 0,3974 | 0,3936 | 0,3897 | 0,3859 |
| 0,3 | 0,3821 | 0,3783 | 0,3745 | 0,3707 | 0,3669 | 0,3632 | 0,3594 | 0,3557 | 0,3520 | 0,3483 |
| 0,4 | 0,3446 | 0,3409 | 0,3372 | 0.3336 | 0,3300 | 0,3264 | 0,3228 | 0,3192 | 0,3156 | 0,3121 |
| 0,5 | 0,3085 | 0,3050 | 0,3015 | 0,2981 | 0,2946 | 0,2912 | 0,2877 | 0,2843 | 0,2810 | 0,2776 |
| 0,6 | 0,2743 | 0,2709 | 0,2676 | 0,2643 | 0,2611 | 0,2578 | 0,2546 | 0,2514 | 0,2483 | 0,2451 |
| 0,7 | 0,2420 | 0,2389 | 0,2358 | 0,2327 | 0,2296 | 0,2266 | 0,2236 | 0,2206 | 0,2177 | 0,2148 |
| 0,8 | 0,2119 | 0,2090 | 0,2061 | 0,2033 | 0,2005 | 0,1977 | 0,1949 | 0,1922 | 0,1894 | 0,1867 |
| 0,9 | 0,1841 | 0,1814 | 0,1788 | 0,1762 | 0,1736 | 0,1711 | 0,1685 | 0,1660 | 0,1635 | 0,1611 |
| 1,0 | 0,1587 | 0,1562 | 0,1539 | 0,1515 | 0,1492 | 0,1469 | 0,1446 | 0,1423 | 0,1401 | 0,1379 |
| 1,1 | 0,1357 | 0,1335 | 0,1314 | 0,1292 | 0,1271 | 0,1251 | 0,1230 | 0,1210 | 0,1190 | 0,1170 |
| 1,2 | 0,1151 | 0,1131 | 0,1112 | 0,1093 | 0,1075 | 0,1056 | 0,1038 | 0,1020 | 0,1003 | 0,0985 |
| 1,3 | 0,0968 | 0,0951 | 0,0934 | 0,0918 | 0,0901 | 0,0885 | 0,0869 | 0,0853 | 0,0838 | 0,0823 |
| 1,4 | 0,0808 | 0,0793 | 0,0778 | 0,0764 | 0,0749 | 0,0735 | 0,0721 | 0,0708 | 0,0694 | 0,0681 |
| 1,5 | 0,0668 | 0,0655 | 0,0643 | 0,0630 | 0,0618 | 0,0606 | 0,0594 | 0,0582 | 0,0571 | 0,0559 |
| 1,6 | 0,0548 | 0,0537 | 0,0526 | 0,0516 | 0,0505 | 0,0495 | 0,0485 | 0,0475 | 0,0465 | 0,0455 |
| 1,7 | 0,0446 | 0,0436 | 0,0427 | 0,0418 | 0,0409 | 0,0401 | 0,0392 | 0,0384 | 0,0375 | 0,0367 |
| 1,8 | 0.0359 | 0,0351 | 0,0344 | 0.0336 | 0,0329 | 0,0322 | 0,0314 | 0,0307 | 0,0301 | 0,0294 |
| 1,9 | 0,0287 | 0,0281 | 0,0274 | 0,0268 | 0,0262 | 0,0256 | 0,0250 | 0,0244 | 0,0239 | 0,0233 |
| 2,0 | 0,0228 | 0,0222 | 0,0217 | 0,0212 | 0,0207 | 0,0202 | 0,0197 | 0,0192 | 0,0188 | 0.0183 |
| 2,1 | 0,0179 | 0.0174 | 0,0170 | 0,0166 | 0,0162 | 0.0158 | 0,0154 | 0,0150 | 0,0146 | 0,0143 |
| 2,2 | 0,0139 | 0,0136 | 0,0132 | 0.0129 | 0,0125 | 0,0122 | 0,0119 | 0,0116 | 0,0113 | 0,0110 |
| 2,3 | 0,0107 | 0,0104 | 0,0102 | 0,00990 | 0,00964 | 0,00939 | 0,00914 | 0,00889 | 0,00866 | 0,00842 |
| 2,4 | 0,00820 | 0,00798 | 0,00776 | 0,00755 | 0,00734 | 0,00714 | 0,00695 | 0,00676 | 0,00657 | 0.00639 |
| 2,5 | 0,00621 | 0,00604 | 0,00587 | 0,00570 | 0,00554 | 0,00539 | 0,00523 | 0,00508 | 0,00494 | 0,00480 |
| 2,6 | 0,00466 | 0,00453 | 0,00440 | 0,00427 | 0,00415 | 0.00402 | 0,00391 | 0,00379 | 0,00368 | 0,00357 |
| 2,7 | 0,00347 | 0,00336 | 0,00326 | 0,00317 | 0,00307 | 0,00298 | 0,00289 | 0,00280 | 0,00272 | 0,00264 |
| 2,8 | 0,00256 | 0,00248 | 0,00240 | 0,00233 | 0,00226 | 0,00219 | 0,00212 | 0,00205 | 0,00199 | 0,00193 |
| 2,9 | 0,00187 | 0,00181 | 0,00175 | 0,00169 | 0,00164 | 0,00159 | 0,00154 | 0,00149 | 0,00144 | 0,00139 |

Приложение 5.

Критические значения $X^2$-критерия (критерия Пирсона) при $\nu$ степенях свободы и принимаемом уровне значимости $\alpha$

$$\alpha = \int_{X_\nu^\alpha}^{\infty} p(X^2)\,dX^2 = P\left\{X_\nu^2 > \left(X_\nu^2\right)^\alpha\right\}$$




| Число степеней свободы $\nu$ | Уровень значимости $\alpha$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,995 | 0,990 | 0,975 | 0,950 | 0,900 | 0,10 | 0,05 | 0,025 | 0,010 | 0,005 |
| 1 | 0,000039 | 0,00016 | 0,00098 | 0,0039 | 0,0158 | 2,71 | 3,84 | 5,02 | 6,63 | 7,88 |
| 2 | 0,0100 | 0,0201 | 0,0506 | 0,103 | 0,211 | 4,61 | 5,99 | 7,38 | 9,21 | 10,60 |
| 3 | 0,0717 | 0,115 | 0,216 | 0,352 | 0.584 | 6,25 | 7,81 | 9,35 | 11,34 | 12,84 |
| 4 | 0,207 | 0,297 | 0,484 | 0,711 | 1,06 | 7,78 | 9,49 | 11,14 | 13,28 | 14,86 |
| 5 | 0,412 | 0,554 | 0,831 | 1,15 | 1,61 | 9,24 | 11,07 | 12,83 | 15,09 | 16,75 |
| 6 | 0,676 | 0,872 | 1,24 | 1,64 | 2,20 | 10,64 | 12,59 | 14,45 | 16,81 | 18,55 |
| 7 | 0,989 | 1,24 | 1,69 | 2,17 | 2,83 | 12,02 | 14,07 | 16,01 | 18.48 | 20,28 |
| 8 | 1,34 | 1,65 | 2,18 | 2,73 | 3,49 | 13,36 | 15,51 | 17,53 | 20.09 | 21,96 |
| 9 | 1,73 | 2,09 | 2,70 | 3,33 | 4,17 | 14,68 | 16,92 | 19,02 | 21,67 | 23,59 |
| 10 | 2,16 | 2,56 | 3.25 | 3,94 | 4,87 | 15,99 | 18,31 | 20,48 | 23,21 | 25,19 |
| 11 | 2,60 | 3,05 | 3,82 | 4,57 | 5,58 | 17,28 | 19,68 | 21,92 | 24,73 | 26,76 |
| 12 | 3,07 | 3,57 | 4,40 | 5,23 | 6,30 | 18,55 | 21,03 | 23,34 | 26,22 | 28,30 |
| 13 | 3,57 | 4,11 | 5,01 | 5,89 | 7 04 | 19,81 | 22,36 | 24,74 | 27,69 | 29,82 |
| 14 | 4,07 | 4,66 | 5,63 | 6,57 | 7,79 | 21,06 | 23.68 | 26,12 | 29,14 | 31,32 |
| 15 | 4,60 | 5,23 | 6,26 | 7,26 | 8,55 | 22,31 | 25,00 | 27,49 | 30,58 | 32,80 |
| 16 | 5,14 | 5,81 | 6,91 | 7,96 | 9,31 | 23,54 | 26,30 | 28,85 | 32,00 | 34,27 |
| 17 | 5,70 | 6,41 | 7,56 | 8,67 | 10,08 | 24,77 | 27.59 | 30,19 | 33,41 | 35,72 |
| 18 | 6,26 | 7,01 | 8,23 | 9,39 | 10.86 | 25,99 | 28,87 | 31,53 | 34,81 | 37,16 |
| 19 | 6,84 | 7,63 | 8,91 | 10,12 | 11,65 | 27,20 | 30,14 | 32,85 | 36,19 | 38,58 |
| 20 | 7,43 | 8,26 | 9,59 | 10,85 | 12,44 | 28,41 | 31,41 | 34,17 | 37,57 | 40,00 |
| 21 | 8,03 | 8,90 | 10,28 | 11,59 | 13,24 | 29.62 | 32,67 | 35,48 | 38,93 | 41,40 |
| 22 | 8,64 | 9,54 | 10,98 | 12,34 | 14,04 | 30,81 | 33,92 | 36,78 | 40,29 | 42,80 |
| 23 | 9,26 | 10,20 | 11,69 | 13,09 | 14,85 | 32 01 | 35,17 | 38,08 | 41,64 | 44,18 |
| 24 | 9,89 | 10,86 | 12,40 | 13,85 | 15,66 | 33.20 | 36.42 | 39,36 | 42,98 | 45,56 |
| 25 | 10,52 | 11,52 | 13,12 | 14,61 | 16,47 | 34,38 | 37,65 | 40,65 | 44,31 | 46,93 |
| 26 | 11,16 | 12,20 | 13,84 | 15,38 | 17,29 | 35.56 | 38.88 | 41,92 | 45,64 | 48,29 |
| 27 | 11,81 | 12,88 | 14,57 | 16,15 | 18,11 | 36,74 | 40,11 | 43,19 | 46,96 | 49,64 |
| 28 | 12,46 | 13,56 | 15,31 | 16,93 | 18,94 | 37,92 | 41,34 | 44,46 | 48,28 | 50,99 |
| 29 | 13,12 | 14,26 | 16,05 | 17,71 | 19,77 | 39,09 | 42,56 | 45,72 | 49 59 | 52,34 |
| 30 | 13,79 | 14,95 | 16,79 | 18,49 | 20,60 | 40,26 | 43,77 | 46,98 | 50,89 | 53,67 |
| 40 | 20,71 | 22,16 | 24,43 | 26,51 | 29,05 | 51,81 | 55,76 | 59,34 | 63,69 | 66,77 |
| 60 | 35,53 | 37,48 | 40,48 | 43,19 | 46,46 | 74,40 | 79,08 | 83,30 | 88,38 | 91,95 |
| 120 | 83,85 | 86,92 | 91,58 | 95,70 | 100,62 | 140,23 | 146.57 | 152,21 | 158,95 | 163,65 |

3^?

Приложение 6

**Критические значения одностороннего критерия Стъюдента при ν степенях свободы и принимаемом уровне значимости α**

| Число степеней свободы, ν | Уровень значимости, α | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,1 | 0,05 | 0,025 | 0,01 | 0,005 | 0.001 |
| 1 | 3,078 | 6,314 | 12,706 | 31,821 | 63,657 | 318,310 |
| 2 | 1,886 | 2,920 | 4,303 | 6,965 | 9,925 | 22,327 |
| 3 | 1,638 | 2,353 | 3,182 | 4,541 | 5,841 | 10,215 |
| 4 | 1,533 | 2,132 | 2,776 | 3,747 | 4,604 | 7,173 |
| 5 | 1,476 | 2,015 | 2,571 | 3,365 | 4,032 | 5,893 |
| 6 | 1,440 | 1,943 | 2,447 | 3,143 | 3,707 | 5,208 |
| 7 | 1,415 | 1,895 | 2,365 | 2,998 | 3,499 | 4,785 |
| 8 | 1,397 | 1,860 | 2,306 | 2,896 | 3,355 | 4,501 |
| 9 | 1,383 | 1,833 | 2,262 | 2,821 | 3,250 | 4,297 |
| 10 | 1,372 | 1,812 | 2,228 | 2,764 | 3,169 | 4,144 |
| 11 | 1,363 | 1,796 | 2,201 | 2,718 | 3,105 | 4,025 |
| 12 | 1,356 | 1,782 | 2,179 | 2,681 | 3,055 | 3,930 |
| 13 | 1,350 | 1,771 | 2,160 | 2,650 | 3,012 | 3,852 |
| 14 | 1,345 | 1,761 | 2,145 | 2,264 | 2,977 | 3,787 |
| 15 | 1,341 | 1,753 | 2,131 | 2,602 | 2,947 | 3,733 |
| 16 | 1,377 | 1,746 | 2,120 | 2,583 | 2,961 | 3,686 |
| 17 | 1,333 | 1,740 | 2,110 | 2,567 | 2,898 | 3,646 |
| 18 | 1,330 | 1,734 | 2,101 | 2,552 | 2,878 | 3,610 |
| 19 | 1,328 | 1,729 | 2,093 | 2,539 | 2,861 | 3,579 |
| 20 | 1,325 | 1,725 | 2,086 | 2,528 | 2,845 | 3,552 |
| 21 | 1,323 | 1,721 | 2,080 | 2,518 | 2,831 | 3,527 |
| 22 | 1,321 | 1,717 | 2,074 | 2,508 | 2,819 | 3,505 |
| 23 | 1,319 | 1,714 | 2,069 | 2,500 | 2,807 | 3,485 |
| 24 | 1,318 | 1,711 | 2,064 | 2,492 | 2,797 | 3,467 |
| 25 | 1,316 | 1,708 | 2,060 | 2,485 | 2,787 | 3,450 |
| 26 | 1,315 | 1,706 | 2,056 | 2,479 | 2,779 | 3,435 |
| 27 | 1,314 | 1,703 | 2,052 | 2,473 | 2,771 | 3,421 |
| 28 | 1,313 | 1,701 | 2,048 | 2,467 | 2,763 | 3,408 |
| 29 | 1,311 | 1,699 | 2,045 | 2,462 | 2,756 | 3,396 |
| 30 | 1,310 | 1,697 | 2,042 | 2,457 | 2,750 | 3,385 |
| 40 | 1,303 | 1,684 | 2,021 | 2,423 | 2,704 | 3,307 |
| 60 | 1,296 | 1,671 | 2,000 | 2,390 | 2,660 | 2,232 |
| 120 | 1,289 | 1,658 | 1,980 | 2,358 | 2,617 | 3,160 |
| ∞ | 1,282 | 1,645 | 1,960 | 2,326 | 2,576 | 3,090 |

**Критические значения распределения Фишера $F^{\alpha}$ для уровня значимости $\alpha$ =0,05**

| $\nu_2$ | Число степеней свободы числителя $\nu_1$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ |
| 1 | 161,4 | 199,5 | 215,7 | 224,6 | 230,2 | 234,0 | 236,8 | 238,9 | 240,5 | 241,9 | 243,9 | 245,9 | 248,0 | 249,1 | 250,1 | 251,1 | 252,2 | 253,3 | 254,3 |
| 2 | 18,51 | 19,00 | 19,16 | 19,25 | 19,3 | 19,33 | 19,35 | 19,37 | 19,33 | 19,40 | 19,41 | 19,43 | 19,45 | 19,45 | 19,46 | 19,47 | 19,48 | 19,49 | 19,50 |
| 3 | 10,13 | 9,55 | 9,28 | 9,12 | 9,01 | 8,94 | 8,89 | 8,85 | 8,81 | 8,79 | 8,74 | 8 70 | 8,66 | 8,64 | 8,62 | 8,59 | 8,57 | 8,55 | 8,53 |
| 4 | 7,71 | 8,94 | 6,59 | 6,39 | 6,26 | 6,16 | 6,09 | 6,04 | 6,00 | 5,96 | 5,91 | 5,86 | 5,80 | 5,77 | 5,75 | 5,72 | 5,69 | 5,66 | 5,63 |
| 5 | 6,61 | 5,79 | 5,41 | 5,19 | 5,05 | 4,95 | 4,88 | 4,82 | 4,77 | 4,74 | 4,68 | 4,62 | 4,55 | 4,53 | 4,50 | 4,46 | 4,43 | 4,40 | 4,35 |
| 6 | 5,99 | 5,14 | 4,76 | 4,53 | 4,39 | 4,28 | 4,21 | 4,15 | 4,10 | 4,06 | 4,00 | 3,94 | 3,87 | 3,84 | 3,81 | 3,77 | 3,74 | 3,70 | 3,67 |
| 7 | 5,59 | 4,74 | 4,35 | 4,12 | 3,97 | 3,87 | 3,79 | 3,73 | 3,68 | 3,64 | 3,57 | 3,51 | 3,44 | 3,41 | 3,33 | 3,34 | 3,30 | 3,27 | 3,23 |
| 8 | 5,32 | 4,46 | 4,07 | 3,84 | 3,60 | 3,58 | 3,50 | 3,44 | 3,39 | 3,35 | 3,28 | 3,22 | 3,15 | 3,12 | 3,08 | 3,04 | 3,01 | 2,97 | 2,93 |
| 9 | 5,12 | 4,26 | 3,86 | 3,63 | 3,43 | 3,37 | 3,29 | 3,23 | 3,18 | 3,14 | 3,07 | 3,01 | 2,94 | 2,90 | 2,86 | 2,83 | 2,79 | 2,75 | 2,71 |
| 10 | 4,96 | 4,10 | 3,71 | 3,43 | 3,33 | 3,22 | 3,14 | 3,07 | 3,02 | 2,98 | 2,91 | 2,85 | 2,77 | 2,74 | 2,70 | 2,66 | 2,62 | 2,58 | 2,54 |
| 11 | 4,84 | 3,98 | 3,59 | 3,36 | 3,20 | 3,09 | 3,01 | 2,95 | 2,90 | 2,85 | 2,79 | 2 72 | 2,65 | 2,61 | 2,57 | 2,53 | 2,49 | 2,45 | 2,40 |
| 12 | 4,75 | 3,89 | 3,49 | 3,26 | 3,11 | 3,00 | 2,91 | 2,85 | 2,80 | 2,75 | 2,69 | 2,62 | 2,54 | 2,51 | 2,47 | 2,43 | 2,38 | 2,34 | 2,30 |
| 13 | 4,67 | 3,81 | 3,41 | 3,18 | 3,03 | 2,92 | 2,83 | 2,77 | 2,71 | 2,67 | 2,60 | 2,53 | 2,46 | 2,42 | 2,38 | 2,34 | 2,30 | 2,25 | 2,21 |
| 14 | 4,60 | 3,74 | 3,34 | 3,11 | 2,96 | 2,85 | 2,76 | 2,70 | 2,65 | 2,50 | 2,53 | 2,46 | 2,39 | 2,35 | 2,31: | 2,27 | 2,22 | 2,18 | 2,13 |
| 15 | 4,54 | 3,68 | 3,29 | 3,06 | 2,90 | 2,79 | 2,71 | 2,64 | 2,59 | 2,54 | 2,48 | 2,40 | 2,33 | 2,29 | 2,25 | 2,20 | 2,16 | 2,11 | 2,07 |
| 16 | 4,49 | 3,63 | 3,24 | 3,01 | 2,85 | 2,74 | 2,66 | 2,59 | 2,54 | 2,49 | 2,42 | 2,35 | 2,28 | 2,24 | 2,19 | 2,15 | 2,11 | 2,06 | 2,01 |
| 17 | 4,45 | 3,59 | 3,20 | 2,96 | 2,81 | 2,70 | 2,61 | 2,55 | 2,49 | 2,45 | 2,38 | 2,31 | 2,23 | 2,19 | 2,15 | 2,10 | 2,06 | 2,01 | 1,96 |
| 18 | 4,41 | 3,55 | 3,16 | 2,93 | 2,77 | 2,66 | 2,5S | 2,51 | 2,46 | 2,41 | 2,34 | 2,27 | 2,19 | 2,15 | 2,11 | 2,06 | 2,02 | 1,97 | 1,09 |
| 19 | 4,38 | 3,52 | 3,13 | 2,90 | 2,74 | 2,63 | 2,54 | 2,48 | 2,42 | 2,39 | 2,31 | 2,23 | 2,16 | 2,11 | 2,07 | 2,03 | 1,98 | 1,93 | 1,88 |
| 20 | 4,35 | 3,49 | 3,10 | 2,87 | 2,71 | 2,60 | 2,51 | 2,45 | 2,38 | 2,35 | 2,28 | 2,20 | 2,12 | 2,08 | 2,04 | 1,99 | 1,95 | 1,90 | 1,84 |
| 21 | 4,32 | 3,47 | 3,07 | 2,84 | 2,68 | 2,57 | 2,49 | 2,42 | 2,37 | 2,32 | 2,25 | 2,18 | 2,10 | 2,05 | 2,01 | 1,96 | 1,92 | 1,87 | 1,81 |
| 22 | 4,30 | 3,44 | 3,05 | 2,82 | 2,66 | 2,55 | 2,46 | 2,40 | 2,34 | 2,30 | 2,23 | 2,15 | 2,07 | 2,03 | 1,98 | 1,94 | 1,89 | 1,84 | 1,78 |
| 23 | 4,28 | 3,42 | 3,03 | 2,60 | 2,64 | 2,53 | 2,44 | 2,37 | 2,32 | 2,27 | 2,20 | 2,13 | 2,05 | 2,01 | 1,96 | 1,91 | 1,86 | 1,81 | 1,76 |
| 24 | 4,26 | 3,40 | 3,01 | 2,78 | 2,62 | 2,51 | 2,42 | 2,36 | 2,30 | 2,25 | 2,18 | 2,11 | 2,03 | 1,98 | 1,94 | 1,69 | 1,84 | 1,79 | 1,73 |
| 25 | 4,24 | 3,39 | 2,99 | 2,76 | 2,60 | 2,49 | 2,40 | 2,34 | 2,28 | 2,24 | 2,16 | 2,09 | 2,01 | 1,96 | 1,92 | 1,87 | 1,82 | 1,77 | 1,71 |
| 26 | 4,23 | 3,37 | 2,98 | 2,74 | 2,59 | 2,47 | 2,39 | 2,32 | 2,27 | 2,22 | 2,15 | 2,07 | 1,99 | 1,95 | 1,90 | 1,85 | 1,80 | 1,75 | 1,69 |
| 27 | 4,21 | 3,35 | 2,96 | 2,73 | 2,57 | 2,46 | 2,37 | 2,31 | 2,25 | 2,20 | 2,13 | 2,06 | 1,97 | 1,93 | 1,89 | 1,84 | 1,79 | 1,73 | 1,67 |
| 28 | 4,20 | 3,34 | 2,95 | 2,71 | 2,56 | 2,45 | 2,36 | 2,29 | 2,24 | 2,19 | 2,12 | 2,04 | 1,96 | 1,91 | 1,87 | 1,82 | 1,77 | 1,71 | 1,65 |
| 29 | 4,18 | 3,33 | 2,93 | 2,70 | 2,55 | 2,43 | 2,35 | 2,23 | 2,22 | 2,18 | 2,10 | 2,03 | 1,94 | 1,90 | 1,85 | 1,81 | 1,75 | 1,70 | 1,64 |
| 30 | 4,17 | 3,32 | 2,92 | 2,69 | 2,53 | 2,42 | 2,33 | 2,27 | 2,21 | 2,16 | 2,09 | 2,01 | 1,93 | 1,89 | 1,84 | 1,79 | 1,74 | 1,69 | 1,62 |
| 40 | 4,08 | 3,23 | 2,64 | 2,61 | 2,45 | 2,34 | 2,25 | 2,18 | 2,12 | 2,03 | 2,00 | 1,92 | 1,84 | 1,79 | 1,74 | 1,89 | 1,64 | 1,58 | 1,51 |

**Критические значения распределения Фишера $F^{\alpha}$ для уровня значимости $\alpha$ =0,025**

| $\nu_2$ | Число степеней свободы числителя $\nu_1$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ |
| 1 | 4052 | 499,5 | 5403 | 5625 | 5764 | 5859 | 5928 | 5981 | 6022 | 6056 | 6106 | 6157 | 6209 | 6235 | 6261 | 6287 | 6313 | 6339 | 6366 |
| 2 | 98,50 | 99,00 | 99,17 | 99,25 | 99,30 | 99,33 | 99,36 | 99,37 | 99,39 | 99,40 | 99,42 | 99,43 | 99,45 | 99,46 | 99,47 | 99,47 | 99,48 | 99,49 | 99,50 |
| 3 | 34,12 | 30,82 | 29,46 | 28,71 | 28,24 | 27,91 | 27,67 | 27,49 | 27,35 | 27,23 | 27,05 | 26,87 | 26,69 | 26,60 | 26,50 | 28,41 | 26,32 | 26,22 | 26,13 |
| 4 | 21,20 | 18,00 | 18,69 | 15,98 | 15,52 | 15,21 | 14,98 | 14,80 | 14,66 | 14,55 | 14,37 | 14,20 | 14,02 | 13,93 | 13,84 | 13,75 | 13,65 | 13,56 | 13,46 |
| 5 | 16,28 | 13,27 | 12,06 | 11,39 | 10,97 | 10,67 | 10,46 | 10,29 | 10,16 | 10,05 | 9,89 | 9,72 | 9,55 | 9,47 | 9,39 | 9,29 | 9,20 | 9,11 | 9,02 |
| 6 | 13,75 | 10,92 | 9,78 | 9,15 | 8,75 | 8,47 | 8,26 | 8,10 | 7,98 | 7,87 | 7,72 | 7,56 | 7,40 | 7,31 | 7,23 | 7,14 | 7,08 | 6,97 | 6,88 |
| 7 | 12,25 | 9,55 | 8,45 | 7,85 | 7,46 | 7,19 | 6,99 | 6,84 | 6,72 | 6,62 | 6,47 | 6,31 | 6,16 | 6,07 | 5,99 | 5,91 | 5,82 | 5,74 | 5,65 |
| 8 | 11,26 | 8,65 | 7,59 | 7,01 | 6,63 | 6,37 | 6,18 | 6,03 | 5,91 | 5,81 | 5,67 | 5,52 | 5,36 | 5,28 | 5,20 | 5,12 | 5,03 | 4,95 | 4,86 |
| 9 | 10,56 | 8,02 | 8,99 | 6,42 | 6,06 | 5,80 | 5,61 | 5,47 | 5,35 | 5,26 | 5,11 | 4,96 | 4,81 | 4,73 | 4,65 | 4,57 | 4,48 | 4,40 | 4,31 |
| 10 | 10,04 | 7,58 | 6,55 | 5,99 | 5,64 | 5,39 | 5,20 | 5,06 | 4,94 | 4,85 | 4,71 | 4,56 | 4,41 | 4,33 | 4,25 | 4,17 | 4,08 | 4,00 | 3,91 |
| 11 | 9,65 | 7,21 | 6,22 | 5,67 | 5,32 | 5,07 | 4,89 | 4,74 | 4,63 | 4,54 | 4,40 | 4,25 | 4,10 | 4,02 | 3,94 | 3,86 | 3,78 | 3,69 | 3,60 |
| 12 | 9,33 | 8,93 | 5,95 | 5,41 | 5,06 | 4,82 | 4,64 | 4,50 | 4,39 | 4,30 | 4,16 | 4,01 | 3,86 | 3,78 | 3,70 | 3,62 | 3,54 | 3,45 | 3,36 |
| 13 | 9,07 | 8,70 | 5,74 | 5,21 | 4,86 | 4,62 | 4,44 | 4,30 | 4,19 | 4,10 | 3,96 | 3,82 | 3,68 | 3,59 | 3,51 | 3,43 | 3,34 | 3,25 | 3,17 |
| 14 | 8,86 | 6,51 | 5,56 | 5,04 | 4,89 | 4,46 | 4,28 | 4,14 | 4,03 | 3,94 | 3,80 | 3,66 | 3,51 | 3,43 | 3,35 | 3,27 | 3,18 | 3,09 | 3,00 |
| 15 | 8,88 | 6,36 | 5,42 | 4,89 | 4,53 | 4,32 | 4,14 | 4,00 | 3,89 | 3,80 | 3,67 | 3,52 | 3,37 | 3,29 | 3,21 | 3,13 | 3,05 | 2,96 | 2,87 |
| 16 | 8,53 | 6,23 | 5,29 | 4,77 | 4,44 | 4,20 | 4,03 | 3,89 | 3,78 | 3,69 | 3,55 | 3,41 | 3,26 | 3,18 | 3,10 | 3,02 | 2,93 | 2,84 | 2,75 |
| 17 | 8,40 | 6,11 | 5,18 | 4,67 | 4,34 | 4,10 | 3,93 | 3,79 | 3,68 | 3,59 | 3,46 | 3,31 | 3,16 | 3,08 | 3,00 | 2,92 | 2,83 | 2,75 | 2,65 |
| 18 | 8,29 | 6,01 | 5,09 | 4,59 | 4,25 | 4,01 | 3,84 | 3,71 | 3,60 | 3,51 | 3,37 | 3,23 | 3,08 | 3,00 | 2,92 | 2,84 | 2,75 | 2,66 | 2,57 |
| 19 | 8,18 | 5,93 | 5,01 | 4,50 | 4,17 | 3,94 | 3,77 | 3,63 | 3,52 | 3,43 | 3,30 | 3.15 | 3,00 | 2,92 | 2,84 | 2,76 | 2,67 | 2,59 | 2,49 |
| 20 | 8,10 | 5,85 | 4,94 | 4,43 | 4,10 | 3,87 | 3,70 | 3,58 | 3,46 | 3,37 | 3,23 | 3,09 | 2,94 | 2,86 | 2,78 | 2,69 | 2,61 | 2,52 | 2,42 |
| 21 | 8,02 | 5,78 | 4,87 | 4,37 | 4,04 | 3,81 | 3,64 | 3,51 | 3,40 | 3,31 | 3,17 | 3,03 | 2,88 | 2,80 | 2,72 | 2,64 | 2,55 | 2,46 | 2,33 |
| 22 | 7,95 | 5,72 | 4,82 | 4,31 | 3,99 | 3,76 | 3,59 | 3,45 | 3,35 | 3,26 | 3,12 | 2,98 | 2,83 | 2,75 | 2,67 | 2,58 | 2,50 | 2,40 | 2,31 |
| 23 | 7,88 | 5,66 | 4,76 | 4,26 | 3,94 | 3,71 | 3,54 | 3,41 | 3,30 | 3,21 | 3,07 | 2,93 | 2,78 | 2,70 | 2,62 | 2,54 | 2,45 | 2,35 | 2.26 |
| 24 | 7,82 | 5,61 | 4,72 | 4,22 | 3,90 | 3,67 | 3,50 | 3,36 | 3,26 | 3,17 | 3,03 | 2,89 | 2,74 | 2,68 | 2,58 | 2,49 | 2,40 | 2,31 | 2,21 |
| 25 | 7,77 | 5,57 | 4,68 | 4,18 | 3,85 | 3,63 | 3,46 | 3,32 | 3,22 | 3,13 | 2,99 | 2,85 | 2,70 | 2,62 | 2,54 | 2,45 | 2,36 | 2,27 | 2,17 |
| 28 | 7,72 | 5,53 | 4,64 | 4,14 | 3,82 | 3,59 | 3,42 | 3,29 | 3,18 | 3,09 | 2,96 | 2,81 | 2,66 | 2,58 | 2,50 | 2,42 | 2,33 | 2,23 | 2,13 |
| 27 | 7,68 | 5,49 | 4,60 | 4,11 | 3,78 | 3,56 | 3,39 | 3,26 | 3,15 | 3,06 | 2,93 | 2,78 | 2,63 | 2,55 | 2,47 | 2,38 | 2,29 | 2,20 | 2,10 |
| 28 | 7,64 | 5,45 | 4,57 | 4,07 | 3,75 | 3,53 | 3,36 | 3,23 | 3,12 | 3,03 | 2,90 | 2,75 | 2,60 | 2,52 | 2,44 | 2,35 | 2,26 | 2,17 | 2,06 |
| 29 | 7,60 | 5.42 | 4,54 | 4,04 | 3,73 | 3,50 | 3,33 | 3,20 | 3,09 | 3,00 | 2,87 | 2,73 | 2,57 | 2,49 | 2,41 | 2,33 | 2,23 | 2,14 | 2,03 |
| 30 | 7,56 | 5,39 | 4,51 | 4,02 | 3,70 | 3,47 | 3,30 | 3,17 | 3,07 | 2,98 | 2,64 | 2,70 | 2,56 | 2,47 | 2,39 | 2,30 | 2,21 | 2,11 | 2,01 |
| 40 | 7,31 | 5,18 | 4,31 | 3,83 | 3,51 | 3,29 | 3,12 | 2,99 | 2,89 | 2,80 | 2,68 | 2,52 | 2,37 | 2,29 | 2,20 | 2,11 | 2,02 | 1,92 | 1,80 |
| 60 | 7,08 | 4,98 | 4,13 | 3,65 | 3,34 | 3,12 | 2,95 | 2,82 | 2,72 | 2,63 | 2,50 | 2,35 | 2,20 | 2,12 | 2,03 | 1,94 | 1,84 | 1,73 | 1,60 |
| 120 | 8,85 | 4,79 | 3,95 | 3,48 | 3,17 | 2,96 | 2,79 | 2,66 | 2,56 | 2,47 | 2,34 | 2,19 | 2,03 | 1,95 | 1,86 | 1,76 | 1,66 | 1.53 | 1,38 |
| ∞ | 6,63 | 4,61 | 3,78 | 3,32 | 3,02 | 2,60 | 2,64 | 2,51 | 2,41 | 2,32 | 2,18 | 2,04 | 1,88 | 1,79 | 1,70 | 1,59 | 1,47 | 1.32 | 1,00 |

Приложение 9

**Критические значения распределения Фишера $F^{\alpha}$ для уровня значимости $\alpha$ =0,001**

| $v_2$ | Число степеней свободы числителя $v_1$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ |
| 1 | 4053* | 5000* | 5404* | 5825* | 5764* | 5859* | 5929* | 5981* | 6023* | 8056* | 6107* | 6156* | 6209* | 6235* | 6261* | 6287* | 6313* | 6340* | 6366* |
| 2 | 998,5 | 999,0 | 999,2 | 999,2 | 999,3 | 999,3 | 999,4 | 999,4 | 999,4 | 999,4 | 999,4 | 999,4 | 999,4 | 999,5 | 999,5 | 999,5 | 999,5 | 999,5 | 999,5 |
| 3 | 167,0 | 148 | 141,1 | 137,1 | 134,6 | 132,8 | 131,6 | 130,6 | 129,9 | 129,2 | 128,3 | 127,4 | 126,4 | 125,9 | 125,4 | 125,0 | 124,5 | 124,0 | 123,5 |
| 4 | 74,14 | 61,25 | 56,18 | 53,44 | 51,71 | 50,53 | 49,66 | 49,00 | 48,47 | 48,05 | 47,41 | 46,76 | 46,10 | 45,77 | 45,43 | 45,09 | 44,75 | 44,40 | 44,05 |
| 5 | 47,18 | 37,12 | 33,20 | 31,09 | 29,75 | 28,84 | 29,16 | 27,64 | 27,24 | 26,92 | 26,42 | 25,91 | 25,39 | 25,14 | 24,87 | 24,60 | 24,33 | 24,06 | 23,79 |
| 6 | 35,51 | 27,00 | 23,70 | 21,92 | 20,81 | 20,03 | 19,46 | 19,03 | 18,69 | 18,41 | 17,99 | 17,58 | 17,12 | 16,89 | 16,67 | 16,44 | 16,21 | 15,99 | 15,75 |
| 7 | 29,25 | 21,69 | 18,77 | 17,19 | 16,21 | 15,52 | 15,02 | 14,63 | 14,33 | 14,08 | 13,71 | 13,32 | 12,93 | 12,73 | 12,53 | 12,33 | 12,12 | 11,91 | 11,70 |
| 8 | 25,42 | 18,49 | 15,83 | 14,39 | 13,49 | 12,86 | 12,40 | 12,04 | 11,77 | 11,54 | 11,19 | 10,84 | 10,48 | 10,30 | 10,11 | 9,92 | 9,73 | 9,53 | 9,33 |
| 9 | 22,88 | 16,39 | 13,90 | 12,56 | 11,71 | 11,13 | 10,70 | 10,37 | 10,11 | 9,89 | 9,57 | 9,24 | 8,90 | 8,72 | 8,55 | 8,37 | 8,19 | 6,00 | 7,81 |
| 10 | 21,04 | 14,91 | 12,55 | 11,28 | 10,48 | 9,92 | 9,52 | 9,20 | 8,96 | 8,75 | 8,45 | 8,13 | 7,80 | 7,64 | 7,47 | 7,30 | 7,12 | 6,94 | 6,76 |
| 11 | 19, 69 | 13,81 | 11,58 | 10,35 | 9,58 | 9,05 | 8,66 | 8,36 | 8,12 | 7,92 | 7,63 | 7,32 | 7,01 | 6,85 | 6,68 | 6,52 | 6,35 | 6,17 | 6,00 |
| 12 | 18,64 | 12,97 | 10,80 | 9,63 | 8,89 | 8,38 | 8,00 | 7,71 | 7,48 | 7,29 | 7,00 | 6,71 | 6,40 | 6,25 | 6,09 | 5,93 | 5,76 | 5,59 | 5,42 |
| 13 | 17,81 | 12,31 | 10,21 | 9,07 | 8,35 | 7,86 | 7,49 | 7,21 | 6,98 | 6,80 | 6,52 | 6,23 | 5,93 | 5,78 | 5,63 | 5,47 | 5,30 | 5,14 | 4,97 |
| 14 | 17,14 | 11,78 | 9,73 | 8,62 | 7,92 | 7,43 | 7,08 | 6,80 | 6,58 | 6,40 | 6,13 | 5,85 | 5,56 | 5,41 | 5,25 | 5,10 | 4,94 | 4,77 | 4,60 |
| 15 | 16,59 | 11,34 | 9,34 | 8,25 | 7,57 | 7,09 | 6,74 | 6,47 | 6,26 | 6,09 | 5,81 | 5,54 | 5,25 | 5,10 | 4,95 | 4,80 | 4,64 | 4,47 | 4,31 |
| 16 | 16,12 | 10,97 | 9,00 | 7,94 | 7,27 | 6,81 | 6,46 | 6,19 | 5,98 | 5,81 | 5,55 | 5,27 | 4,99 | 4,85 | 4,70 | 4,54 | 4,39 | 4,23 | 4,06 |
| 17 | 15,72 | 10,88 | 8,73 | 7,68 | 7,02 | 6,56 | 6,22 | 5,96 | 5,75 | 5,59 | 5,32 | 5,05 | 4,78 | 4,63 | 4,48 | 4,33 | 4,18 | 4,02 | 3,85 |
| 18 | 15,38 | 10,39 | 8,49 | 7,46 | 6,81 | 8,35 | 6,02 | 5,76 | 5,56 | 5,39 | 5,13 | 4,87 | 4,59 | 4,45 | 4,30 | 4,15 | 4,00 | 3,84 | 3,67 |
| 19 | 15,08 | 10,16 | 8,29 | 7,26 | 6,62 | 6,18 | 5,85 | 5,59 | 5,39 | 5,22 | 4,97 | 4,70 | 4,43 | 4,29 | 4,14 | 3,99 | 3,84 | 3,68 | 3,51 |
| 20 | 14,82 | 9,95 | 8,10 | 7,10 | 6,46 | 8,02 | 5,69 | 5,44 | 5,24 | 5,08 | 4,82 | 4,56 | 4,29 | 4,15 | 4,00 | 3,86 | 3,70. | 3,54 | 3,38 |
| 21 | 14,59 | 9,77 | 7,94 | 6,95 | 6,32 | 5,89 | 5,56 | 5,31 | 5,11 | 4,95 | 4,70 | 4,44 | 4,17 | 4,03 | 3,88 | 3,74 | 3,58 | 3,42 | 3,26 |
| 22 | 14,38 | 9,81 | 7,80 | 6,81 | 6,19 | 5,76 | 5,44 | 5,19 | 4,99 | 4,83 | 4,58 | 4,33 | 4,06 | 3,92 | 3,78 | 3,63 | 3,48 | 3,32 | 3;15 |
| 23 | 14,19 | 9,47 | 7,67 | 6,69 | 6,08 | 5,85 | 5,33 | 5,09 | 4,89 | 4,73 | 4,48 | 4,23 | 3,96 | 3,82 | 3,68 | 3,53 | 3,38 | 3,22 | 3,05 |
| 24 | 14,03 | 9,34 | 7,55 | 6,59 | 5,98 | 5,55 | 5,23 | 4,99 | 4,80 | 4,64 | 4,39 | 4,14 | 3,87 | 3,74 | 3,59 | 3,45 | 3,29 | 3,14 | 2,97 |
| 25 | 13,88 | 9,22 | 7,45 | 6,49 | 5,88 | 5,48 | 5,15 | 4,91 | 4,71 | 4,58 | 4,31 | 4,06 | 3,79 | 3,66 | 3,52 | 3,37 | 3,22 | 3,06 | 2,89 |
| 26 | 13,74 | 9,12 | 7,36 | 6,41 | 5,80 | 5,38 | 5,07 | 4,83 | 4,64 | 4,48 | 4,24 | 3,99 | 3,72 | 3,59 | 3,44 | 3,30 | 3,15 | 2,99 | 2,82 |
| 27 | 13,81 | 9,02 | 7,27 | 8,33 | 5,73 | 5,31 | 5,00 | 4,76 | 4,57 | 4,41 | 4,17 | 3,92 | 3,66 | 3,52 | 3,38 | 3,23 | 3,08 | 2,92 | 2,75 |
| 23 | 13,50 | 8,93 | 7,19 | 6,25 | 5,66 | 5,24 | 4,93 | 4,69 | 4,50 | 4,35 | 4,11 | 3,86 | 3,60 | 3,46 | 3,32 | 3,18 | 3,02 | 2,86 | 2,69 |
| 29 | 13,39 | 8,86 | 7,12 | 6,19 | 5,59 | 5,18 | 4,87 | 4,64 | 4,45 | 4,29 | 4,05 | 3,80 | 3,54 | 3,41 | 3,27 | 3,12 | 2,97 | 2,81 | 2,64 |
| 30 | 13,29 | 8,77 | 7,05 | 6,12 | 5,53 | 5,12 | 4,82 | 4,58 | 4,39 | 4,24 | 4,00 | 3,75 | 3,49 | 3,36 | 3,22 | 3,07 | 2,92 | 2,76 | 2,59 |
| 40 | 12,81 | 8,25 | 6,80 | 5,70 | 5,13 | 4,73 | 4,44 | 4,21 | 4,02 | 3,87 | 3,64 | 3,40 | 3,15 | 3,01 | 2,87 | 2,73 | 2,57 | 2,41 | 2,23 |
| 60 | 11,97 | 7,76 | 6,17 | 5,31 | 4,76 | 4,37 | 4,09 | 3,87 | 3,69 | 3,54 | 3,31 | 3,08 | 2,83 | 2,69 | 2,55 | 2,41 | 2,25 | 2,08 | 1,89 |
| 120 | 11,38 | 7,32 | 5,79 | 4,95 | 4,42 | 4,04 | 3,77 | 3,55 | 3,39 | 3,24 | 3,02 | 2,78 | 2,53 | 2,40 | 2,26 | 2,11 | 1,95 | 1,76 | 1,54 |
| ∞ | 10,83 | 6,91 | 5,42 | 4,62 | 4,10 | 3,74 | 3,47 | 3,27 | 3,10 | 2,96 | 2,74 | 2,51 | 2,27 | 2,13 | 1,99 | 1,84 | 1,66 | 1,45 | 1,00 |

* Эти значения надо умножить на 100

Приложение 10

## *ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТ*

| Печатные буквы | Рукописные буквы | Транскрипция | Печатные буквы | Рукописные буквы | Транскрипция |
|---|---|---|---|---|---|
| Α α | $\mathcal{A}$ α | áльфа | Ν ν | $\mathcal{N}$ ν | ни (ню) |
| Β β | $\mathcal{B}$ β | бéта | Ξ ξ | Ξ ξ | кси |
| Γ γ | $\mathcal{T}$ γ | гáмма | Ο ο | *O* σ | óмикрон |
| Δ δ | *Δ* δ | дéльта | Π π | $\mathcal{T}$ π | пи |
| Ε ε | *E* ε | эпсилон | Ρ ρ | $\mathcal{P}$ ρ | ро |
| Ζ ζ | $\mathcal{Z}$ ζ | дзéта | Σ σ ς | *Σ* σ ς | сигма |
| Η η | $\mathcal{H}$ η | эта | Τ τ | *T* τ | тáу |
| Θ ϑ θ | θ ϑ θ | тэта | ϒ υ | $\mathcal{Y}$ υ | эпсилон |
| Ι ι | $\mathcal{J}$ ι | йóта | Φ φ | *Φ* φ | фи |
| Κ ϰ | $\mathcal{K}$ ϰ | кáппа | Χ χ | *X* χ | хи |
| Λ λ | *Λ* λ | лáмбда | Ψ ψ | *Ψ* ψ | пси |
| Μ μ | $\mathcal{M}$ μ | ми (мю) | Ω ω | *Ω* ω | омéга |

Приложение 11

## *ЛАТИНСКИЙ АЛФАВИТ*

| Печатные буквы | Рукописные буквы | Транскрипция | Печатные буквы | Рукописные буквы | Транскрипция |
|---|---|---|---|---|---|
| A a | A a | а | N n | N n | эн |
| B b | B b | бэ | O o | O o | о |
| C c | C c | цэ | P p | P p | пэ |
| D d | D d | дэ | Q q | Q q | ку |
| E e | E e | э | R r | R r | эр |
| F f | F f | эф | S s | S s | эс |
| G g | G g | гэ (жэ) | T t | T t | тэ |
| H h | H h | ха (аш) | U u | U u | у |
| I i | I i | и | V v | V v | вэ |
| J j | J j | йот (жи) | W w | W w | дубль-вэ |
| K k | K k | ка | X x | X x | икс |
| L l | L l | эль | Y y | Y y | игрек |
| M m | M m | эм | Z z | Z z | зэт |

Приложение 12

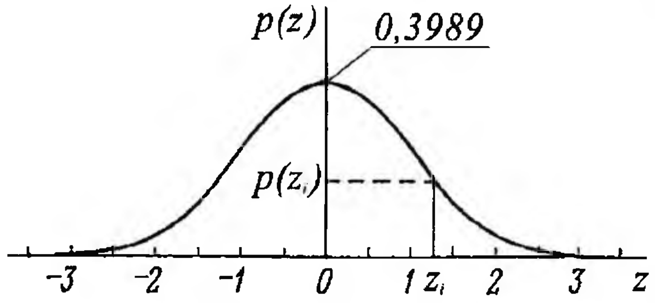
| Латинский шрифт | | Немецкий (готический) шрифт | | Название букв | |
|---|---|---|---|---|---|
| Печатные буквы | Рукописные буквы | Печатные буквы | Рукописные буквы | Международная транскрипция | Транскрипция русскими буквами |
| A a | A a | 𝔄 𝔞 | A a | ['a:] | а |
| B b | B b | 𝔅 𝔟 | B b | [be:] | бэ |
| C c | C c | ℭ 𝔠 | C c | [tse:] | цэ |
| D d | D d | 𝔇 𝔡 | D d | [de:] | дэ |
| E e | E e | 𝔈 𝔢 | E e | ['e:] | э |
| F f | F f | 𝔉 𝔣 | F f | ['ɛf] | эф |
| G g | G g | 𝔊 𝔤 | G g | [ge:] | гэ |
| H h | H h | ℌ 𝔥 | H h | [ha:] | ха |
| I i | I i | ℑ 𝔦 | I i | ['i:] | и |
| J j | J j | 𝔍 𝔧 | J j | [jɔt] | йот |
| K k | K k | 𝔎 𝔨 | K k | [ka:] | ка |
| L l | L l | 𝔏 𝔩 | L l | ['ɛl] | эл |
| M m | M m | 𝔐 𝔪 | M m | ['ɛm] | эм |
| N n | N n | 𝔑 𝔫 | N n | ['ɛn] | эн |
| O o | O o | 𝔒 𝔬 | O o | ['o:] | о |
| P p | P p | 𝔓 𝔭 | P p | [pe:] | пэ |
| Q q | Q q | 𝔔 𝔮 | Q q | [ku:] | ку |
| R r | R r, r | ℜ 𝔯 | R r | ['ɛr] | эр |
| S s | S s, ß | 𝔖 ſ 𝔰 | S ſ ß | ['ɛs] | эс |
| T t | T t | 𝔗 𝔱 | T t | [te:] | тэ |
| U u | U u | 𝔘 𝔲 | U u | ['u:] | у |
| V v | V v | 𝔙 𝔳 | V v | [fao] | фау |
| W w | W w | 𝔚 𝔴 | W w | [ve:] | вэ |
| X x | X x | 𝔛 𝔵 | X x | ['ɪks] | икс |
| Y y | Y y | 𝔜 𝔶 | Y y | ['ypsilɔn] | ипсилон |
| Z z | Z z | ℨ 𝔷 | Z z | [tsɛt] | цэт |

345

Приложение 1.

## Значения $p(z)$ (ординаты) стандартизованного нормального распределения

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$




| z | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,3989 | 0,3989 | 0,3989 | 0,3988 | 0,3986 | 0,3986 | 0,3982 | 0,3930 | 0,3977 | 0,3973 |
| 0,1 | 0,3970 | 0,3966 | 0,3961 | 0,3956 | 9,3951 | 0,3945 | 0,3939 | 0,3932 | 0,3925 | 0,3918 |
| 0,2 | 0,3910 | 0,3902 | 0,3894 | 0,3884 | 0,3876 | 0,3867 | 0,3857 | 0,3847 | 0,3836 | 0,3825 |
| 0,3 | 0,3814 | 0,3802 | 0,3790 | 0,3778 | 0,3765 | 0,3752 | 0,3739 | 0,3725 | 0,3712 | 0,3697 |
| 0,4 | 0,3683 | 0,3668 | 0,3653 | 0,3637 | 0,3621 | 0,3605 | 0,3589 | 0,3572 | 0,3555 | 0,3538 |
| 0,5 | 0,3521 | 0,3503 | 0,3485 | 0,3467 | 0,3448 | 0,3429 | 0,3410 | 0,3391 | 0,3372 | 0,3352 |
| 0,6 | 0,3332 | 0,3312 | 0,3292 | 0,3271 | 0,3251 | 0,3230 | 0,3209 | 0,3187 | 0,3166 | 0,3144 |
| 0,7 | 0,3123 | 0,3101 | 0,3079 | 0,3056 | 0,3034 | 0,3011 | 0,2989 | 0,2966 | 0,2943 | 0,2920 |
| 0,8 | 0,2897 | 0,2874 | 0,2850 | 0,2827 | 0,2803 | 0,2780 | 0,2756 | 0,2732 | 0,2709 | 0,2685 |
| 0,9 | 0,2661 | 0,2637 | 0,2613 | 0,2589 | 0,2565 | 0,2541 | 0,2516 | 0,2492 | 0,2468 | 0,2444 |
| 1,0 | 0,2420 | 0,2396 | 0,2371 | 0,2347 | 0,2323 | 0,2299 | 0,2275 | 0,2251 | 0,2227 | 0,2203 |
| 1,1 | 0,2179 | 0,2155 | 0,2131 | 0,2107 | 0,2083 | 0,2059 | 0,2036 | 0,2012 | 0,1989 | 0,1965 |
| 1,2 | 0,1942 | 0,1919 | 0,1895 | 0,1872 | 0,1849 | 0,1826 | 0,1804 | 0,1781 | 0,1758 | 0,1736 |
| 1,3 | 0,1714 | 0,1691 | 0,1669 | 0,1647 | 0,1626 | 0,1605 | 0,1582 | 0,1561 | 0,1539 | 0,1518 |
| 1,4 | 0,1497 | 0,1476 | 0,1456 | 0,1435 | 0,1415 | 0,1394 | 0,1374 | 0,1354 | 0,1334 | 0,1315 |
| 1,5 | 0,1295 | 0,1276 | 0,1257 | 0,1238 | 0,1219 | 0,1200 | 0,1282 | 0,1163 | 0,1145 | 0,1127 |
| 1,6 | 0,1109 | 0,1092 | 0,1074 | 0,1057 | 0,1040 | 0,1023 | 0,1005 | 0,0989 | 0,0973 | 0,0957 |
| 1,7 | 0,0940 | 0,0925 | 0,0909 | 0,0893 | 0,0878 | 0,0863 | 0,0818 | 0,0833 | 0,0818 | 0,0804 |
| 1,8 | 0,0790 | 0,0775 | 0,0761 | 0,0748 | 0,0734 | 0,0721 | 0,0707 | 0,0694 | 0,0681 | 0,0669 |
| 1,9 | 0,0656 | 0,0644 | 0,0632 | 0,0620 | 0,0608 | 0,0596 | 0,0584 | 0,0573 | 0,0562 | 0,0051 |
| 2,0 | 0,0540 | 0,0529 | 0,0519 | 0,0508 | 0,0498 | 0,0488 | 0,0478 | 0,0468 | 0,0459 | 0,0449 |
| 2,1 | 0,0440 | 0,0431 | 0,0422 | 0,0413 | 0,0404 | 0,0396 | 0,0387 | 0,0379 | 0,0371 | 0,0363 |
| 2,2 | 0,0355 | 0,0347 | 0,0339 | 0,0332 | 0,0325 | 0,0317 | 0,0310 | 0,0303 | 0,0297 | 0,0290 |
| 2,3 | 0,0283 | 0,0277 | 0,0270 | 0,0264 | 0,0258 | 0,0252 | 0,0246 | 0,0241 | 0,0235 | 0,0229 |
| 2,4 | 0,0224 | 0,0219 | 0,0213 | 0,0208 | 0,0203 | 0,0198 | 0,0194 | 0,0189 | 0,0184 | 0,0180 |
| 2,5 | 0,0175 | 0,0171 | 0,0167 | 0,0163 | 0,0158 | 0,0154 | 0,0151 | 0,0147 | 0,0143 | 0,0139 |
| 2,6 | 0,0136 | 0,0132 | 0,0129 | 0,0126 | 0,0122 | 0,0119 | 0,0116 | 0,0113 | 0,0110 | 0,0107 |
| 2,7 | 0,0104 | 0,0101 | 0,0099 | 0,0096 | 0,0093 | 0,0091 | 0,0088 | 0,0086 | 0,0084 | 0,0081 |
| 2,8 | 0,0079 | 0,0077 | 0,0075 | 0,0073 | 0,0071 | 0,0069 | 0,0067 | 0,0065 | 0,0063 | 0,0061 |
| 2,9 | 0,0060 | 0,0058 | 0,0056 | 0,0055 | 0,0053 | 0,0051 | 0,0050 | 0,0048 | 0,0047 | 0,0046 |
| 3,0 | 0,0044 | 0,0043 | 0,0042 | 0,0040 | 0,0039 | 0,0038 | 0,0037 | 0,0036 | 0,0035 | 0,0034 |
| 3,1 | 0,0033 | 0,0032 | 0,0031 | 0,0030 | 0,0029 | 0,0028 | 0,0027 | 0,0026 | 0,0025 | 0,0025 |
| 3,2 | 0,0024 | 0,0023 | 0,0022 | 0,0022 | 0,0021 | 0,0020 | 0,0020 | 0,0019 | 0,0018 | 0,0018 |
| 3,3 | 0,0017 | 0,0017 | 0,0016 | 0,0016 | 0,0015 | 0,0015 | 0,0014 | 0,0014 | 0,0013 | 0,0013 |
| 3,4 | 0,0012 | 0,0012 | 0,0012 | 0,0011 | 0,0011 | 0,0010 | 0,0010 | 0,0010 | 0,0009 | 0,0009 |
| 3,5 | 0,0009 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0007 | 0,0007 | 0,0007 | 0,0007 | 0,0006 |
| 3,6 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0004 |
| 3,7 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 |
| 3,8 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 |
| 3,9 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0001 | 0,0001 |

Приложение 2

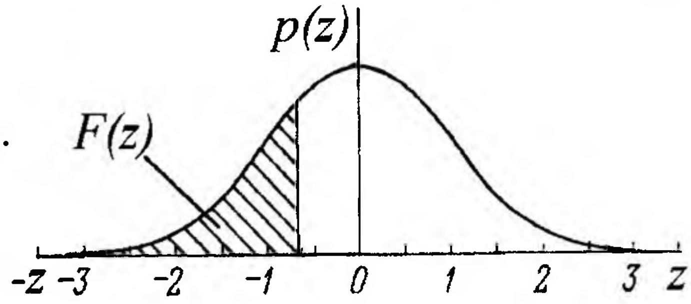
**Значения функции Лапласа $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$**

| 0 | Φ(z) | 0 | Φ(z) | 0 | Φ(z) | 0 | Φ(z) | 0 | Φ(z) | 0 | Φ(z) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | 0,0000 | 0,44 | 0,1700 | 0,88 | 0,3106 | 1,32 | 0,4066 | 1,76 | 0,4608 | 2,40 | 0,4918 |
| 0,01 | 0,0040 | 0,45 | 0,1736 | 0,89 | 0,3133 | 1,33 | 0,4082 | 1,77 | 0,4616 | 2,42 | 0,4922 |
| 0,02 | 0,0080 | 0,46 | 0,1772 | 0,90 | 0,3159 | 1,34 | 0,4099 | 1,78 | 0,4625 | 2,44 | 0,4927 |
| 0,03 | 0,0120 | 0,47 | 0,1808 | 0,91 | 0,3186 | 1,35 | 0,4115 | 1,79 | 0,4633 | 2,46 | 0,4931 |
| 0,04 | 0,0160 | 0,48 | 0, 1844 | 0,92 | 0,3212 | 1,36 | 0,4131 | 1,80 | 0,4641 | 2,48 | 0,4934 |
| 0,05 | 0,0199 | 0,49 | 0,1879 | 0,93 | 0,3238 | 1,37 | 0,4131 | 1,81 | 0,4649 | 2,50 | 0,4938 |
| 0,06 | 0,0239 | 0,50 | 0,1915 | 0,94 | 0,3264 | 1,38 | 0,4147 | 1,82 | 0,4656 | 2,52 | 0,4941 |
| 0,07 | 0,0279 | 0,51 | 0,195 | 0,95 | 0,3289 | 1,39 | 0,4177 | 1,83 | 0,4664 | 2,54 | 0,4945 |
| 0,08 | 0,0319 | 0,52 | 0,1985 | 0,96 | 0,3315 | 1,40 | 0,4192 | 1,84 | 0,4671 | 2,56 | 0,4948 |
| 0,09 | 0,0359 | 0,53 | 0,2019 | 0,97 | 0,334 | 1,41 | 0,4207 | 1,85 | 0,4678 | 2,58 | 0,4951 |
| 0,10 | 0,0398 | 0,54 | 0,2054 | 0,98 | 0,3365 | 1,42 | 0,4222 | 1,86 | 0,4686 | 2,60 | 0,4953 |
| 0,11 | 0,0478 | 0,55 | 0,2088 | 0,99 | 0,3389 | 1,43 | 0,4236 | 1,87 | 0,4693 | 2,62 | 0,4956 |
| 0,12 | 0,0478 | 0,56 | 0,2123 | 1,00 | 0,34 | 1,44 | 0,4251 | 1,88 | 0,4699 | 2,64 | 0,4959 |
| 0,13 | 0,0517 | 0,57 | 0,2157 | 1,01 | 0,3438 | 1,45 | 0,4265 | 1,89 | 0,4706 | 2,66 | 0,4961 |
| 0,14 | 0,0557 | 0,58 | 0,219 | 1,02 | 0,3461 | 1,46 | 0,4279 | 1,90 | 0,4713 | 2,68 | 0,4963 |
| 0,15 | 0,0596 | 0,59 | 0,2224 | 1,03 | 0,3485 | 1,47 | 0,4292 | 1,91 | 0,4719 | 2,70 | 0,4965 |
| 0,16 | 0,0636 | 0,60 | 0,2257 | 1,04 | 0,3508 | 1,48 | 0,4306 | 1,92 | 0,4726 | 2,72 | 0,4967 |
| 0,17 | 0,0675 | 0,61 | 0,2291 | 1,05 | 0,3531 | 1,49 | 0,4319 | 1,93 | 0,4732 | 2,74 | 0,4969 |
| 0,18 | 0,0714 | 0,62 | 0,2324 | 1,06 | 0,3554 | 1,50 | 0,43 | 1,94 | 0,4738 | 2,76 | 0,4971 |
| 0,19 | 0,0753 | 0,63 | 0,2357 | 1,07 | 0,3577 | 1,51 | 0,4345 | 1,95 | 0,4744 | 2,78 | 0,4973 |
| 0,20 | 0,0793 | 0,64 | 0,2389 | 1,08 | 0,3599 | 1,52 | 0,4357 | 1,96 | 0,475 | 2,80 | 0,4974 |
| 0,21 | 0,0832 | 0,65 | 0,2422 | 1,09 | 0,3621 | 1,53 | 0,437 | 1,97 | 0,4756 | 2,82 | 0,4976 |
| 0,22 | 0,0871 | 0,66 | 0,2454 | 1,10 | 0,3643 | 1,54 | 0,4382 | 1,98 | 0,4761 | 2,84 | 0,4977 |
| 0,23 | 0,0910 | 0,67 | 0,2486 | 1,11 | 0,3665 | 1,55 | 0,4394 | 1,99 | 0,4767 | 2,86 | 0,4979 |
| 0,24 | 0,0948 | 0,68 | 0,2517 | 1,12 | 0,3686 | 1,56 | 0,4406 | 2,00 | 0,4772 | 2,88 | 0,498 |
| 0,25 | 0,0987 | 0,69 | 0,2549 | 1,13 | 0,3708 | 1,57 | 0,4418 | 2,02 | 0,4783 | 2,90 | 0,4981 |
| 0,26 | 0,1026 | 0,70 | 0,258 | 1,14 | 0,3729 | 1,58 | 0,4429 | 2,04 | 0,4793 | 2,92 | 0,4982 |
| 0,27 | 0,1064 | 0,71 | 0,2611 | 1,15 | 0,3749 | 1,59 | 0,4441 | 2,06 | 0,4803 | 2,94 | 0,4984 |
| 0,28 | 0,1103 | 0,72 | 0,2642 | 1,16 | 0,377 | 1,60 | 0,4452 | 2,08 | 0,4812 | 2,96 | 0,49846 |
| 0,29 | 0,1141 | 0,73 | 0,2673 | 1,17 | 0,379 | 1,61 | 0,4463 | 2,10 | 0,4821 | 2,98 | 0,49856 |
| 0,30 | 0,1179 | 0,74 | 0,2703 | 1,18 | 0,381 | 1,62 | 0,4474 | 2,12 | 0,483 | 3,00 | 0,49865 |
| 0,31 | 0,1217 | 0,75 | 0,2734 | 1,19 | 0,383 | 1,63 | 0,4484 | 2,14 | 0,4838 | 3,20 | 0,49931 |
| 0,32 | 0,1255 | 0,76 | 0,2764 | 1,20 | 0,3849 | 1,64 | 0,4495 | 2,16 | 0,4846 | 3,40 | 0,49966 |
| 0,33 | 0,1293 | 0,77 | 0,2794 | 1,21 | 0,3869 | 1,65 | 0,4505 | 2,18 | 0,4854 | 3,60 | 0,49984 |
| 0,34 | 0,1331 | 0,78 | 0.2823 | 1,22 | 0,3883 | 1,66 | 0,4515 | 2,20 | 0,4861 | 3,80 | 0,499928 |
| 0,35 | 0,1368 | 0,79 | 0,2852 | 1,23 | 0,3907 | 1,67 | 0,4525 | 2,22 | 0,4868 | 4,00 | 0,499968 |
| 0,36 | 0,1406 | 0,80 | 0,2881 | 1,24 | 0,3925 | 1,68 | 0,4535 | 2,24 | 0,4875 | 5,00 | 0,499997 |
| 0,37 | 0,1443 | 0,81 | 0,291 | 1,25 | 0,3944 | 1,69 | 0,4545 | 2,26 | 0,4881 | | |
| 0,38 | 0,1480 | 0,82 | 0,2939 | 1,26 | 0,3962 | 1,70 | 0,4554 | 2,28 | 0,4887 | | |
| 0,39 | 0,1517 | 0,83 | 0,2967 | 1,27 | 0,398 | 1,71 | 0,4564 | 2,30 | 0,4893 | | |
| 0,40 | 0,1554 | 0,84 | 0,2995 | 1,28 | 0,3997 | 1,72 | 0,4573 | 2,32 | 0,4898 | | |
| 0,41 | 0,1591 | 0,85 | 0,3023 | 1,29 | 0,4015 | 1,73 | 0,4582 | 2,34 | 0,4904 | | |
| 0,42 | 0,1628 | 0,86 | 0,3051 | 1,30 | 0,4032 | 1,74 | 0,4591 | 2,36 | 0,4909 | | |
| 0,43 | 0,1664 | 0,87 | 0,3078 | 1,31 | 0,4049 | 1,75 | 0,4599 | 2,38 | 0,4913 | | |

Приложение 3.

Функция вероятностей $F(z)$ стандартизованного нормального распределения
(площади стандартизованного нормального распределения от $-\infty$ до $z$)

$$F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz.$$

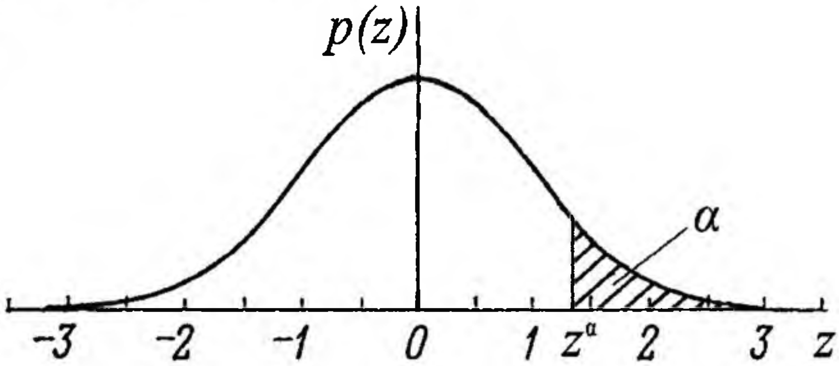



| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -3.0 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.001 |
| -2.9 | 0.002 | 0.002 | 0.002 | 0.002 | 0.002 | 0.002 | 0.002 | 0.001 | 0.001 | 0.001 |
| -2.8 | 0.003 | 0.002 | 0.002 | 0.002 | 0.002 | 0.002 | 0.002 | 0.002 | 0.002 | 0.002 |
| -2.7 | 0.003 | 0.003 | 0.003 | 0.003 | 0.003 | 0.003 | 0.003 | 0.003 | 0.003 | 0.003 |
| -2.6 | 0.005 | 0.005 | 0.004 | 0.004 | 0.004 | 0.004 | 0.004 | 0.004 | 0.004 | 0.004 |
| -2.5 | 0.006 | 0.006 | 0.006 | 0.006 | 0.006 | 0.005 | 0.005 | 0.005 | 0.005 | 0.005 |
| -2.4 | 0.008 | 0.008 | 0.008 | 0.008 | 0.007 | 0.007 | 0.007 | 0.007 | 0.007 | 0.006 |
| -2.3 | 0.011 | 0.010 | 0.010 | 0.010 | 0.010 | 0.009 | 0.009 | 0.009 | 0.009 | 0.008 |
| -2.2 | 0.014 | 0.014 | 0.013 | 0.013 | 0.013 | 0.012 | 0.012 | 0.012 | 0.011 | 0.011 |
| -2.1 | 0.018 | 0.017 | 0.017 | 0.017 | 0.016 | 0.016 | 0.015 | 0.015 | 0.015 | 0.014 |
| -2.0 | 0.023 | 0.022 | 0.022 | 0.021 | 0.021 | 0.020 | 0.020 | 0.019 | 0.019 | 0.018 |
| -1.9 | 0.029 | 0.028 | 0.027 | 0.027 | 0.026 | 0.026 | 0.025 | 0.024 | 0.024 | 0.023 |
| -1.8 | 0.036 | 0.035 | 0.034 | 0.034 | 0.033 | 0.032 | 0.031 | 0.031 | 0.030 | 0.029 |
| -1.7 | 0.045 | 0.044 | 0.043 | 0.042 | 0.041 | 0.040 | 0.039 | 0.038 | 0.038 | 0.037 |
| -1.6 | 0.055 | 0.054 | 0.053 | 0.052 | 0.051 | 0.049 | 0.048 | 0.047 | 0.046 | 0.046 |
| -1.5 | 0.067 | 0.066 | 0.064 | 0.063 | 0.062 | 0.061 | 0.059 | 0.058 | 0.057 | 0.056 |
| -1.4 | 0.081 | 0.079 | 0.078 | 0.076 | 0.075 | 0.074 | 0.072 | 0.071 | 0.069 | 0.068 |
| -1.3 | 0.097 | 0.095 | 0.093 | 0.092 | 0.090 | 0.089 | 0.087 | 0.085 | 0.084 | 0.082 |
| -1.2 | 0.115 | 0.113 | 0.111 | 0.109 | 0.107 | 0.106 | 0.104 | 0.102 | 0.100 | 0.099 |
| -1.1 | 0.136 | 0.133 | 0.131 | 0.129 | 0.127 | 0.125 | 0.123 | 0.121 | 0.119 | 0.117 |
| -1.0 | 0.159 | 0.156 | 0.154 | 0.152 | 0.149 | 0.147 | 0.145 | 0.142 | 0.140 | 0.138 |
| -0.9 | 0.184 | 0.181 | 0.179 | 0.176 | 0.174 | 0.171 | 0.169 | 0.166 | 0.164 | 0.161 |
| -0.8 | 0.212 | 0.209 | 0.206 | 0.203 | 0.200 | 0.198 | 0.195 | 0.192 | 0.189 | 0.187 |
| -0.7 | 0.242 | 0.239 | 0.236 | 0.233 | 0.230 | 0.227 | 0.224 | 0.221 | 0.218 | 0.215 |
| -0.6 | 0.274 | 0.271 | 0.268 | 0.264 | 0.261 | 0.258 | 0.255 | 0.251 | 0.248 | 0.245 |
| -0.5 | 0.309 | 0.305 | 0.302 | 0.298 | 0.295 | 0.291 | 0.288 | 0.284 | 0.281 | 0.278 |
| -0.4 | 0.345 | 0.341 | 0.337 | 0.334 | 0.330 | 0.326 | 0.323 | 0.319 | 0.316 | 0.312 |
| -0.3 | 0.382 | 0.378 | 0.374 | 0.371 | 0.367 | 0.363 | 0.359 | 0.356 | 0.352 | 0.348 |
| -0.2 | 0.421 | 0.417 | 0.413 | 0.409 | 0.405 | 0.401 | 0.397 | 0.394 | 0.390 | 0.386 |
| -0.1 | 0.460 | 0.456 | 0.452 | 0.448 | 0.444 | 0.440 | 0.436 | 0.433 | 0.429 | 0.425 |
| -0.0 | 0.500 | 0.496 | 0.492 | 0.488 | 0.484 | 0.480 | 0.476 | 0.472 | 0.468 | 0.464 |
| 0.0 | 0.500 | 0.504 | 0.508 | 0.512 | 0.516 | 0.520 | 0.524 | 0.528 | 0.532 | 0.536 |
| 0.1 | 0.540 | 0.544 | 0.548 | 0.552 | 0.556 | 0.560 | 0.564 | 0.567 | 0.571 | 0.575 |
| 0.2 | 0.579 | 0.583 | 0.587 | 0.591 | 0.595 | 0.599 | 0.603 | 0.606 | 0.610 | 0.614 |
| 0.3 | 0.618 | 0.622 | 0.626 | 0.629 | 0.633 | 0.637 | 0.641 | 0.644 | 0.648 | 0.652 |
| 0.4 | 0.655 | 0.659 | 0.663 | 0.666 | 0.670 | 0.674 | 0.677 | 0.681 | 0.684 | 0.688 |
| 0.5 | 0.691 | 0.695 | 0.698 | 0.702 | 0.705 | 0.709 | 0.712 | 0.716 | 0.719 | 0.722 |
| 0.6 | 0.726 | 0.729 | 0.732 | 0.736 | 0.739 | 0.742 | 0.745 | 0.749 | 0.752 | 0.755 |
| 0.7 | 0.758 | 0.761 | 0.764 | 0.767 | 0.770 | 0.773 | 0.776 | 0.779 | 0.782 | 0.785 |
| 0.8 | 0.788 | 0.791 | 0.794 | 0.797 | 0.800 | 0.802 | 0.805 | 0.808 | 0.811 | 0.813 |
| 0.9 | 0.816 | 0.819 | 0.821 | 0.824 | 0.826 | 0.829 | 0.831 | 0.834 | 0.836 | 0.839 |
| 1.0 | 0.841 | 0.844 | 0.846 | 0.848 | 0.851 | 0.853 | 0.855 | 0.858 | 0.860 | 0.862 |
| 1.1 | 0.864 | 0.866 | 0.869 | 0.871 | 0.873 | 0.875 | 0.877 | 0.879 | 0.881 | 0.883 |
| 1.2 | 0.885 | 0.887 | 0.889 | 0.891 | 0.893 | 0.894 | 0.896 | 0.898 | 0.900 | 0.901 |
| 1.3 | 0.903 | 0.905 | 0.907 | 0.908 | 0.910 | 0.911 | 0.913 | 0.915 | 0.916 | 0.918 |
| 1.4 | 0.919 | 0.921 | 0.922 | 0.924 | 0.925 | 0.926 | 0.928 | 0.929 | 0.931 | 0.932 |
| 1.5 | 0.933 | 0.934 | 0.936 | 0.937 | 0.938 | 0.939 | 0.941 | 0.942 | 0.943 | 0.944 |
| 1.6 | 0.945 | 0.946 | 0.947 | 0.948 | 0.949 | 0.951 | 0.952 | 0.953 | 0.954 | 0.954 |
| 1.7 | 0.955 | 0.956 | 0.957 | 0.958 | 0.959 | 0.960 | 0.961 | 0.962 | 0.962 | 0.963 |
| 1.8 | 0.964 | 0.965 | 0.966 | 0.966 | 0.967 | 0.968 | 0.969 | 0.969 | 0.970 | 0.971 |
| 1.9 | 0.971 | 0.972 | 0.973 | 0.973 | 0.974 | 0.974 | 0.975 | 0.976 | 0.976 | 0.977 |
| 2.0 | 0.977 | 0.978 | 0.978 | 0.979 | 0.979 | 0.980 | 0.980 | 0.981 | 0.981 | 0.982 |
| 2.1 | 0.982 | 0.983 | 0.983 | 0.983 | 0.984 | 0.984 | 0.985 | 0.985 | 0.985 | 0.986 |
| 2.2 | 0.986 | 0.986 | 0.987 | 0.987 | 0.987 | 0.988 | 0.988 | 0.988 | 0.989 | 0.989 |
| 2.3 | 0.989 | 0.990 | 0.990 | 0.990 | 0.990 | 0.991 | 0.991 | 0.991 | 0.991 | 0.992 |
| 2.4 | 0.992 | 0.992 | 0.992 | 0.992 | 0.993 | 0.993 | 0.993 | 0.993 | 0.993 | 0.994 |
| 2.5 | 0.994 | 0.994 | 0.994 | 0.994 | 0.994 | 0.995 | 0.995 | 0.995 | 0.995 | 0.995 |
| 2.6 | 0.995 | 0.995 | 0.996 | 0.996 | 0.996 | 0.996 | 0.996 | 0.996 | 0.996 | 0.996 |
| 2.7 | 0.997 | 0.997 | 0.997 | 0.997 | 0.997 | 0.997 | 0.997 | 0.997 | 0.997 | 0.997 |
| 2.8 | 0.997 | 0.998 | 0.998 | 0.998 | 0.998 | 0.998 | 0.998 | 0.998 | 0.998 | 0.998 |
| 2.9 | 0.998 | 0.998 | 0.998 | 0.998 | 0.998 | 0.998 | 0.998 | 0.999 | 0.999 | 0.999 |
| 3.0 | 0.999 | 0.999 | 0.999 | 0.999 | 0.999 | 0.999 | 0.999 | 0.999 | 0.999 | 0.999 |

Приложение 4.

## Критические площади стандартизованного нормального распределения

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z^{\alpha}}^{\infty}\exp\left(-\frac{z^{2}}{2}\right)dz=P\left(z>z^{\alpha}\right)$$

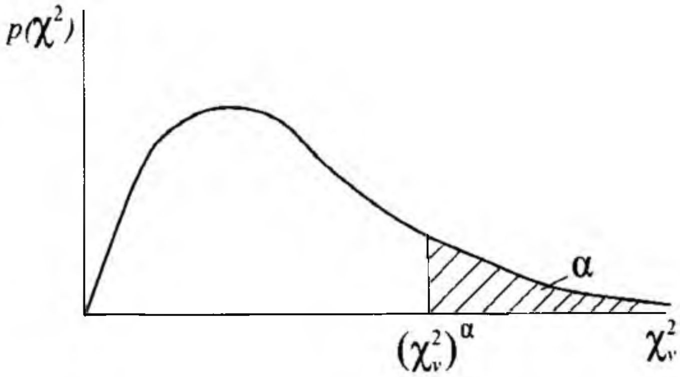



| $z_\alpha$ | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,5000 | 0,4960 | 0,4920 | 0,4880 | 0,4840 | 0,4801 | 0,4761 | 0,4721 | 0,4681 | 0,4641 |
| 0,1 | 0,4602 | 0,4562 | 0,4522 | 0,4483 | 0,4443 | 0,4404 | 0,4364 | 0,4325 | 0,4286 | 0,4247 |
| 0,2 | 0,4207 | 0,4168 | 0,4129 | 0,4090 | 0,4052 | 0,4013 | 0,3974 | 0,3936 | 0,3897 | 0,3859 |
| 0,3 | 0,3821 | 0,3783 | 0,3745 | 0,3707 | 0,3669 | 0,3632 | 0,3594 | 0,3557 | 0,3520 | 0,3483 |
| 0,4 | 0,3446 | 0,3409 | 0,3372 | 0.3336 | 0,3300 | 0,3264 | 0,3228 | 0,3192 | 0,3156 | 0,3121 |
| 0,5 | 0,3085 | 0,3050 | 0,3015 | 0,2981 | 0,2946 | 0,2912 | 0,2877 | 0,2843 | 0,2810 | 0,2776 |
| 0,6 | 0,2743 | 0,2709 | 0,2676 | 0,2643 | 0,2611 | 0,2578 | 0,2546 | 0,2514 | 0,2483 | 0,2451 |
| 0,7 | 0,2420 | 0,2389 | 0,2358 | 0,2327 | 0,2296 | 0,2266 | 0,2236 | 0,2206 | 0,2177 | 0,2148 |
| 0,8 | 0,2119 | 0,2090 | 0,2061 | 0,2033 | 0,2005 | 0,1977 | 0,1949 | 0,1922 | 0,1894 | 0,1867 |
| 0,9 | 0,1841 | 0,1814 | 0,1788 | 0,1762 | 0,1736 | 0,1711 | 0,1685 | 0,1660 | 0,1635 | 0,1611 |
| 1,0 | 0,1587 | 0,1562 | 0,1539 | 0,1515 | 0,1492 | 0,1469 | 0,1446 | 0,1423 | 0,1401 | 0,1379 |
| 1,1 | 0,1357 | 0,1335 | 0,1314 | 0,1292 | 0,1271 | 0,1251 | 0,1230 | 0,1210 | 0,1190 | 0,1170 |
| 1,2 | 0,1151 | 0,1131 | 0,1112 | 0,1093 | 0,1075 | 0,1056 | 0,1038 | 0,1020 | 0,1003 | 0,0985 |
| 1,3 | 0,0968 | 0,0951 | 0,0934 | 0,0918 | 0,0901 | 0,0885 | 0,0869 | 0,0853 | 0,0838 | 0,0823 |
| 1,4 | 0,0808 | 0,0793 | 0,0778 | 0,0764 | 0,0749 | 0,0735 | 0,0721 | 0,0708 | 0,0694 | 0,0681 |
| 1,5 | 0,0668 | 0,0655 | 0,0643 | 0,0630 | 0,0618 | 0,0606 | 0,0594 | 0,0582 | 0,0571 | 0,0559 |
| 1,6 | 0,0548 | 0,0537 | 0,0526 | 0,0516 | 0,0505 | 0,0495 | 0,0485 | 0,0475 | 0,0465 | 0,0455 |
| 1,7 | 0,0446 | 0,0436 | 0,0427 | 0,0418 | 0,0409 | 0,0401 | 0,0392 | 0,0384 | 0,0375 | 0,0367 |
| 1,8 | 0.0359 | 0,0351 | 0,0344 | 0.0336 | 0,0329 | 0,0322 | 0,0314 | 0,0307 | 0,0301 | 0,0294 |
| 1,9 | 0,0287 | 0,0281 | 0,0274 | 0,0268 | 0,0262 | 0,0256 | 0,0250 | 0,0244 | 0,0239 | 0,0233 |
| 2,0 | 0,0228 | 0,0222 | 0,0217 | 0,0212 | 0,0207 | 0,0202 | 0,0197 | 0,0192 | 0,0188 | 0.0183 |
| 2,1 | 0,0179 | 0.0174 | 0,0170 | 0,0166 | 0,0162 | 0.0158 | 0,0154 | 0,0150 | 0,0146 | 0,0143 |
| 2,2 | 0,0139 | 0,0136 | 0,0132 | 0.0129 | 0,0125 | 0,0122 | 0,0119 | 0,0116 | 0,0113 | 0,0110 |
| 2,3 | 0,0107 | 0,0104 | 0,0102 | 0,00990 | 0,00964 | 0,00939 | 0,00914 | 0,00889 | 0,00866 | 0,00842 |
| 2,4 | 0,00820 | 0,00798 | 0,00776 | 0,00755 | 0,00734 | 0,00714 | 0,00695 | 0,00676 | 0,00657 | 0.00639 |
| 2,5 | 0,00621 | 0,00604 | 0,00587 | 0,00570 | 0,00554 | 0,00539 | 0,00523 | 0,00508 | 0,00494 | 0,00480 |
| 2,6 | 0,00466 | 0,00453 | 0,00440 | 0,00427 | 0,00415 | 0.00402 | 0,00391 | 0,00379 | 0,00368 | 0,00357 |
| 2,7 | 0,00347 | 0,00336 | 0,00326 | 0,00317 | 0,00307 | 0,00298 | 0,00289 | 0,00280 | 0,00272 | 0,00264 |
| 2,8 | 0,00256 | 0,00248 | 0,00240 | 0,00233 | 0,00226 | 0,00219 | 0,00212 | 0,00205 | 0,00199 | 0,00193 |
| 2,9 | 0,00187 | 0,00181 | 0,00175 | 0,00169 | 0,00164 | 0,00159 | 0,00154 | 0,00149 | 0,00144 | 0,00139 |

Приложение 5.

Критические значения $X^2$-критерия (критерия Пирсона) при $\nu$ степенях свободы и принимаемом уровне значимости $\alpha$

$$\alpha = \int\limits_{X_\nu^\alpha}^{\infty} p(X^2)\,dX^2 = P\left\{X_\nu^2 > \left(X_\nu^2\right)^\alpha\right\}$$




| Число степеней свободы $\nu$ | Уровень значимости $\alpha$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,995 | 0,990 | 0,975 | 0,950 | 0,900 | 0,10 | 0,05 | 0,025 | 0,010 | 0,005 |
| 1 | 0,000039 | 0,00016 | 0,00098 | 0,0039 | 0,0158 | 2,71 | 3,84 | 5,02 | 6,63 | 7,88 |
| 2 | 0,0100 | 0,0201 | 0,0506 | 0,103 | 0,211 | 4,61 | 5,99 | 7,38 | 9,21 | 10,60 |
| 3 | 0,0717 | 0,115 | 0,216 | 0,352 | 0.584 | 6,25 | 7,81 | 9,35 | 11,34 | 12,84 |
| 4 | 0,207 | 0,297 | 0,484 | 0,711 | 1,06 | 7,78 | 9,49 | 11,14 | 13,28 | 14,86 |
| 5 | 0,412 | 0,554 | 0,831 | 1,15 | 1,61 | 9,24 | 11,07 | 12,83 | 15,09 | 16,75 |
| 6 | 0,676 | 0,872 | 1,24 | 1,64 | 2,20 | 10,64 | 12,59 | 14,45 | 16,81 | 18,55 |
| 7 | 0,989 | 1,24 | 1,69 | 2,17 | 2,83 | 12,02 | 14,07 | 16,01 | 18.48 | 20,28 |
| 8 | 1,34 | 1,65 | 2,18 | 2,73 | 3,49 | 13,36 | 15,51 | 17,53 | 20.09 | 21,96 |
| 9 | 1,73 | 2,09 | 2,70 | 3,33 | 4,17 | 14,68 | 16,92 | 19,02 | 21,67 | 23,59 |
| 10 | 2,16 | 2,56 | 3.25 | 3,94 | 4,87 | 15,99 | 18,31 | 20,48 | 23,21 | 25,19 |
| 11 | 2,60 | 3,05 | 3,82 | 4.57 | 5,58 | 17,28 | 19,68 | 21,92 | 24,73 | 26,76 |
| 12 | 3,07 | 3,57 | 4,40 | 5,23 | 6,30 | 18,55 | 21,03 | 23,34 | 26,22 | 28,30 |
| 13 | 3,57 | 4,11 | 5.01 | 5,89 | 7 04 | 19,81 | 22,36 | 24,74 | 27,69 | 29,82 |
| 14 | 4,07 | 4,66 | 5,63 | 6,57 | 7,79 | 21,06 | 23.68 | 26,12 | 29,14 | 31,32 |
| 15 | 4,60 | 5,23 | 6,26 | 7,26 | 8,55 | 22,31 | 25,00 | 27,49 | 30,58 | 32,80 |
| 16 | 5,14 | 5,81 | 6,91 | 7,96 | 9,31 | 23,54 | 26,30 | 28,85 | 32,00 | 34,27 |
| 17 | 5,70 | 6,41 | 7,56 | 8,67 | 10,08 | 24,77 | 27.59 | 30,19 | 33,41 | 35,72 |
| 18 | 6,26 | 7,01 | 8,23 | 9,39 | 10,86 | 25,99 | 28,87 | 31,53 | 34,81 | 37,16 |
| 19 | 6,84 | 7,63 | 8,91 | 10,12 | 11,65 | 27,20 | 30,14 | 32,85 | 36,19 | 38,58 |
| 20 | 7,43 | 8,26 | 9,59 | 10,85 | 12,44 | 28,41 | 31,41 | 34,17 | 37,57 | 40,00 |
| 21 | 8,03 | 8,90 | 10,28 | 11,59 | 13,24 | 29,62 | 32,67 | 35,48 | 38,93 | 41,40 |
| 22 | 8,64 | 9,54 | 10,98 | 12,34 | 14,04 | 30,81 | 33,92 | 36,78 | 40,29 | 42,80 |
| 23 | 9,26 | 10,20 | 11,69 | 13,09 | 14,85 | 32 01 | 35,17 | 38,08 | 41,64 | 44,18 |
| 24 | 9,89 | 10,86 | 12,40 | 13,85 | 15,66 | 33.20 | 36.42 | 39,36 | 42,98 | 45,56 |
| 25 | 10,52 | 11,52 | 13,12 | 14,61 | 16,47 | 34,38 | 37,65 | 40,65 | 44,31 | 46,93 |
| 26 | 11,16 | 12,20 | 13,84 | 15,38 | 17,29 | 35.56 | 38.88 | 41,92 | 45,64 | 48,29 |
| 27 | 11,81 | 12,88 | 14,57 | 16,15 | 18,11 | 36,74 | 40,11 | 43,19 | 46,96 | 49,64 |
| 28 | 12,46 | 13,56 | 15,31 | 16,93 | 18,94 | 37,92 | 41,34 | 44,46 | 48,28 | 50,99 |
| 29 | 13,12 | 14,26 | 16,05 | 17,71 | 19,77 | 39,09 | 42,56 | 45,72 | 49 59 | 52,34 |
| 30 | 13,79 | 14,95 | 16,79 | 18,49 | 20,60 | 40,26 | 43,77 | 46,98 | 50,89 | 53,67 |
| 40 | 20,71 | 22,16 | 24,43 | 26,51 | 29,05 | 51,81 | 55,76 | 59,34 | 63,69 | 66,77 |
| 60 | 35,53 | 37,48 | 40,48 | 43,19 | 46,46 | 74,40 | 79,08 | 83,30 | 88,38 | 91,95 |
| 120 | 83,85 | 86,92 | 91,58 | 95,70 | 100,62 | 140,23 | 146.57 | 152,21 | 158,95 | 163,65 |

Приложение 6

**Критические значения одностороннего критерия Стъюдента при ν степенях свободы и принимаемом уровне значимости α**

| Число степеней свободы, ν | Уровень значимости, α | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,1 | 0,05 | 0,025 | 0,01 | 0,005 | 0.001 |
| 1 | 3,078 | 6,314 | 12,706 | 31,821 | 63,657 | 318,310 |
| 2 | 1,886 | 2,920 | 4,303 | 6,965 | 9,925 | 22,327 |
| 3 | 1,638 | 2,353 | 3,182 | 4,541 | 5,841 | 10,215 |
| 4 | 1,533 | 2,132 | 2,776 | 3,747 | 4,604 | 7,173 |
| 5 | 1,476 | 2,015 | 2,571 | 3,365 | 4,032 | 5,893 |
| 6 | 1,440 | 1,943 | 2,447 | 3,143 | 3,707 | 5,208 |
| 7 | 1,415 | 1,895 | 2,365 | 2,998 | 3,499 | 4,785 |
| 8 | 1,397 | 1,860 | 2,306 | 2,896 | 3,355 | 4,501 |
| 9 | 1,383 | 1,833 | 2,262 | 2,821 | 3,250 | 4,297 |
| 10 | 1,372 | 1,812 | 2,228 | 2,764 | 3,169 | 4,144 |
| 11 | 1,363 | 1,796 | 2,201 | 2,718 | 3,105 | 4,025 |
| 12 | 1,356 | 1,782 | 2,179 | 2,681 | 3,055 | 3,930 |
| 13 | 1,350 | 1,771 | 2,160 | 2,650 | 3,012 | 3,852 |
| 14 | 1,345 | 1,761 | 2,145 | 2,264 | 2,977 | 3,787 |
| 15 | 1,341 | 1,753 | 2,131 | 2,602 | 2,947 | 3,733 |
| 16 | 1,377 | 1,746 | 2,120 | 2,583 | 2,961 | 3,686 |
| 17 | 1,333 | 1,740 | 2,110 | 2,567 | 2,898 | 3,646 |
| 18 | 1,330 | 1,734 | 2,101 | 2,552 | 2,878 | 3,610 |
| 19 | 1,328 | 1,729 | 2,093 | 2,539 | 2,861 | 3,579 |
| 20 | 1,325 | 1,725 | 2,086 | 2,528 | 2,845 | 3,552 |
| 21 | 1,323 | 1,721 | 2,080 | 2,518 | 2,831 | 3,527 |
| 22 | 1,321 | 1,717 | 2,074 | 2,508 | 2,819 | 3,505 |
| 23 | 1,319 | 1,714 | 2,069 | 2,500 | 2,807 | 3,485 |
| 24 | 1,318 | 1,711 | 2,064 | 2,492 | 2,797 | 3,467 |
| 25 | 1,316 | 1,708 | 2,060 | 2,485 | 2,787 | 3,450 |
| 26 | 1,315 | 1,706 | 2,056 | 2,479 | 2,779 | 3,435 |
| 27 | 1,314 | 1,703 | 2,052 | 2,473 | 2,771 | 3,421 |
| 28 | 1,313 | 1,701 | 2,048 | 2,467 | 2,763 | 3,408 |
| 29 | 1,311 | 1,699 | 2,045 | 2,462 | 2,756 | 3,396 |
| 30 | 1,310 | 1,697 | 2,042 | 2,457 | 2,750 | 3,385 |
| 40 | 1,303 | 1,684 | 2,021 | 2,423 | 2,704 | 3,307 |
| 60 | 1,296 | 1,671 | 2,000 | 2,390 | 2,660 | 2,232 |
| 120 | 1,289 | 1,658 | 1,980 | 2,358 | 2,617 | 3,160 |
| ∞ | 1,282 | 1,645 | 1,960 | 2,326 | 2,576 | 3,090 |

**Критические значения распределения Фишера $F^{\alpha}$ для уровня значимости $\alpha$ =0,05**

| $\nu_2$ | Число степеней свободы числителя $\nu_1$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ |
| 1 | 161,4 | 199,5 | 215,7 | 224,6 | 230,2 | 234,0 | 236,8 | 238,9 | 240,5 | 241,9 | 243,9 | 245,9 | 248,0 | 249,1 | 250,1 | 251,1 | 252,2 | 253,3 | 254,3 |
| 2 | 18,51 | 19,00 | 19,16 | 19,25 | 19,3 | 19,33 | 19,35 | 19,37 | 19,33 | 19,40 | 19,41 | 19,43 | 19,45 | 19,45 | 19,46 | 19,47 | 19,48 | 19,49 | 19,50 |
| 3 | 10,13 | 9,55 | 9,28 | 9,12 | 9,01 | 8,94 | 8,89 | 8,85 | 8,81 | 8,79 | 8,74 | 8 70 | 8,66 | 8,64 | 8,62 | 8,59 | 8,57 | 8,55 | 8,53 |
| 4 | 7,71 | 8,94 | 6,59 | 6,39 | 6,26 | 6,16 | 6,09 | 6,04 | 6,00 | 5,96 | 5,91 | 5,86 | 5,80 | 5,77 | 5,75 | 5,72 | 5,69 | 5,66 | 5,63 |
| 5 | 6,61 | 5,79 | 5,41 | 5,19 | 5,05 | 4,95 | 4,88 | 4,82 | 4,77 | 4,74 | 4,68 | 4,62 | 4,55 | 4,53 | 4,50 | 4,46 | 4,43 | 4,40 | 4,35 |
| 6 | 5,99 | 5,14 | 4,76 | 4,53 | 4,39 | 4,28 | 4,21 | 4,15 | 4,10 | 4,06 | 4,00 | 3,94 | 3,87 | 3,84 | 3,81 | 3,77 | 3,74 | 3,70 | 3,67 |
| 7 | 5,59 | 4,74 | 4,35 | 4,12 | 3,97 | 3,87 | 3,79 | 3,73 | 3,68 | 3,64 | 3,57 | 3,51 | 3,44 | 3,41 | 3,33 | 3,34 | 3,30 | 3,27 | 3,23 |
| 8 | 5,32 | 4,46 | 4,07 | 3,84 | 3,60 | 3,58 | 3,50 | 3,44 | 3,39 | 3,35 | 3,28 | 3,22 | 3,15 | 3,12 | 3,08 | 3,04 | 3,01 | 2,97 | 2,93 |
| 9 | 5,12 | 4,26 | 3,86 | 3,63 | 3,43 | 3,37 | 3,29 | 3,23 | 3,18 | 3,14 | 3,07 | 3,01 | 2,94 | 2,90 | 2,86 | 2,83 | 2,79 | 2,75 | 2,71 |
| 10 | 4,96 | 4,10 | 3,71 | 3,43 | 3,33 | 3,22 | 3,14 | 3,07 | 3,02 | 2,98 | 2,91 | 2,85 | 2,77 | 2,74 | 2,70 | 2,66 | 2,62 | 2,58 | 2,54 |
| 11 | 4,84 | 3,98 | 3,59 | 3,36 | 3,20 | 3,09 | 3,01 | 2,95 | 2,90 | 2,85 | 2,79 | 2 72 | 2,65 | 2,61 | 2,57 | 2,53 | 2,49 | 2,45 | 2,40 |
| 12 | 4,75 | 3,89 | 3,49 | 3,26 | 3,11 | 3,00 | 2,91 | 2,85 | 2,80 | 2,75 | 2,69 | 2,62 | 2,54 | 2,51 | 2,47 | 2,43 | 2,38 | 2,34 | 2,30 |
| 13 | 4,67 | 3,81 | 3,41 | 3,18 | 3,03 | 2,92 | 2,83 | 2,77 | 2,71 | 2,67 | 2,60 | 2,53 | 2,46 | 2,42 | 2,38 | 2,34 | 2,30 | 2,25 | 2,21 |
| 14 | 4,60 | 3,74 | 3,34 | 3,11 | 2,96 | 2,85 | 2,76 | 2,70 | 2,65 | 2,50 | 2,53 | 2,46 | 2,39 | 2,35 | 2,31: | 2,27 | 2,22 | 2,18 | 2,13 |
| 15 | 4,54 | 3,68 | 3,29 | 3,06 | 2,90 | 2,79 | 2,71 | 2,64 | 2,59 | 2,54 | 2,48 | 2,40 | 2,33 | 2,29 | 2,25 | 2,20 | 2,16 | 2,11 | 2,07 |
| 16 | 4,49 | 3,63 | 3,24 | 3,01 | 2,85 | 2,74 | 2,66 | 2,59 | 2,54 | 2,49 | 2,42 | 2,35 | 2,28 | 2,24 | 2,19 | 2,15 | 2,11 | 2,06 | 2,01 |
| 17 | 4,45 | 3,59 | 3,20 | 2,96 | 2,81 | 2,70 | 2,61 | 2,55 | 2,49 | 2,45 | 2,38 | 2,31 | 2,23 | 2,19 | 2,15 | 2,10 | 2,06 | 2,01 | 1,96 |
| 18 | 4,41 | 3,55 | 3,16 | 2,93 | 2,77 | 2,66 | 2,5S | 2,51 | 2,46 | 2,41 | 2,34 | 2,27 | 2,19 | 2,15 | 2,11 | 2,06 | 2,02 | 1,97 | 1,09 |
| 19 | 4,38 | 3,52 | 3,13 | 2,90 | 2,74 | 2,63 | 2,54 | 2,48 | 2,42 | 2,39 | 2,31 | 2,23 | 2,16 | 2,11 | 2,07 | 2,03 | 1,98 | 1,93 | 1,88 |
| 20 | 4,35 | 3,49 | 3,10 | 2,87 | 2,71 | 2,60 | 2,51 | 2,45 | 2,38 | 2,35 | 2,28 | 2,20 | 2,12 | 2,08 | 2,04 | 1,99 | 1,95 | 1,90 | 1,84 |
| 21 | 4,32 | 3,47 | 3,07 | 2,84 | 2,68 | 2,57 | 2,49 | 2,42 | 2,37 | 2,32 | 2,25 | 2,18 | 2,10 | 2,05 | 2,01 | 1,96 | 1,92 | 1,87 | 1,81 |
| 22 | 4,30 | 3,44 | 3,05 | 2,82 | 2,66 | 2,55 | 2,46 | 2,40 | 2,34 | 2,30 | 2,23 | 2,15 | 2,07 | 2,03 | 1,98 | 1,94 | 1,89 | 1,84 | 1,78 |
| 23 | 4,28 | 3,42 | 3,03 | 2,60 | 2,64 | 2,53 | 2,44 | 2,37 | 2,32 | 2,27 | 2,20 | 2,13 | 2,05 | 2,01 | 1,96 | 1,91 | 1,86 | 1,81 | 1,76 |
| 24 | 4,26 | 3,40 | 3,01 | 2,78 | 2,62 | 2,51 | 2,42 | 2,36 | 2,30 | 2,25 | 2,18 | 2,11 | 2,03 | 1,98 | 1,94 | 1,69 | 1,84 | 1,79 | 1,73 |
| 25 | 4,24 | 3,39 | 2,99 | 2,76 | 2,60 | 2,49 | 2,40 | 2,34 | 2,28 | 2,24 | 2,16 | 2,09 | 2,01 | 1,96 | 1,92 | 1,87 | 1,82 | 1,77 | 1,71 |
| 26 | 4,23 | 3,37 | 2,98 | 2,74 | 2,59 | 2,47 | 2,39 | 2,32 | 2,27 | 2,22 | 2,15 | 2,07 | 1,99 | 1,95 | 1,90 | 1,85 | 1,80 | 1,75 | 1,69 |
| 27 | 4,21 | 3,35 | 2,96 | 2,73 | 2,57 | 2,46 | 2,37 | 2,31 | 2,25 | 2,20 | 2,13 | 2,06 | 1,97 | 1,93 | 1,89 | 1,84 | 1,79 | 1,73 | 1,67 |
| 28 | 4,20 | 3,34 | 2,95 | 2,71 | 2,56 | 2,45 | 2,36 | 2,29 | 2,24 | 2,19 | 2,12 | 2,04 | 1,96 | 1,91 | 1,87 | 1,82 | 1,77 | 1,71 | 1,65 |
| 29 | 4,18 | 3,33 | 2,93 | 2,70 | 2,55 | 2,43 | 2,35 | 2,23 | 2,22 | 2,18 | 2,10 | 2,03 | 1,94 | 1,90 | 1,85 | 1,81 | 1,75 | 1,70 | 1,64 |
| 30 | 4,17 | 3,32 | 2,92 | 2,69 | 2,53 | 2,42 | 2,33 | 2,27 | 2,21 | 2,16 | 2,09 | 2,01 | 1,93 | 1,89 | 1,84 | 1,79 | 1,74 | 1,69 | 1,62 |
| 40 | 4,08 | 3,23 | 2,64 | 2,61 | 2,45 | 2,34 | 2,25 | 2,18 | 2,12 | 2,03 | 2,00 | 1,92 | 1,84 | 1,79 | 1,74 | 1,89 | 1,64 | 1,58 | 1,51 |

Приложение 8

**Критические значения распределения Фишера $F^{\alpha}$ для уровня значимости $\alpha$ =0,025**

| $\nu_2$ | Число степеней свободы числителя $\nu_1$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ |
| 1 | 4052 | 499,5 | 5403 | 5625 | 5764 | 5859 | 5928 | 5981 | 6022 | 6056 | 6106 | 6157 | 6209 | 6235 | 6261 | 6287 | 6313 | 6339 | 6366 |
| 2 | 98,50 | 99,00 | 99,17 | 99,25 | 99,30 | 99,33 | 99,36 | 99,37 | 99,39 | 99,40 | 99,42 | 99,43 | 99,45 | 99,46 | 99,47 | 99,47 | 99,48 | 99,49 | 99,50 |
| 3 | 34,12 | 30,82 | 29,46 | 28,71 | 28,24 | 27,91 | 27,67 | 27,49 | 27,35 | 27,23 | 27,05 | 26,87 | 26,69 | 26,60 | 26,50 | 28,41 | 26,32 | 26,22 | 26,13 |
| 4 | 21,20 | 18,00 | 18,69 | 15,98 | 15,52 | 15,21 | 14,98 | 14,80 | 14,66 | 14,55 | 14,37 | 14,20 | 14,02 | 13,93 | 13,84 | 13,75 | 13,65 | 13,56 | 13,46 |
| 5 | 16,28 | 13,27 | 12,06 | 11,39 | 10,97 | 10,67 | 10,46 | 10,29 | 10,16 | 10,05 | 9,89 | 9,72 | 9,55 | 9,47 | 9,39 | 9,29 | 9,20 | 9,11 | 9,02 |
| 6 | 13,75 | 10,92 | 9,78 | 9,15 | 8,75 | 8,47 | 8,26 | 8,10 | 7,98 | 7,87 | 7,72 | 7,56 | 7,40 | 7,31 | 7,23 | 7,14 | 7,08 | 6,97 | 6,88 |
| 7 | 12,25 | 9,55 | 8,45 | 7,85 | 7,46 | 7,19 | 6,99 | 6,84 | 6,72 | 6,62 | 6,47 | 6,31 | 6,16 | 6,07 | 5,99 | 5,91 | 5,82 | 5,74 | 5,65 |
| 8 | 11,26 | 8,65 | 7,59 | 7,01 | 6,63 | 6,37 | 6,18 | 6,03 | 5,91 | 5,81 | 5,67 | 5,52 | 5,36 | 5,28 | 5,20 | 5,12 | 5,03 | 4,95 | 4,86 |
| 9 | 10,56 | 8,02 | 8,99 | 6,42 | 6,06 | 5,80 | 5,61 | 5,47 | 5,35 | 5,26 | 5,11 | 4,96 | 4,81 | 4,73 | 4,65 | 4,57 | 4,48 | 4,40 | 4,31 |
| 10 | 10,04 | 7,58 | 6,55 | 5,99 | 5,64 | 5,39 | 5,20 | 5,06 | 4,94 | 4,85 | 4,71 | 4,56 | 4,41 | 4,33 | 4,25 | 4,17 | 4,08 | 4,00 | 3,91 |
| 11 | 9,65 | 7,21 | 6,22 | 5,67 | 5,32 | 5,07 | 4,89 | 4,74 | 4,63 | 4,54 | 4,40 | 4,25 | 4,10 | 4,02 | 3,94 | 3,86 | 3,78 | 3,69 | 3,60 |
| 12 | 9,33 | 8,93 | 5,95 | 5,41 | 5,06 | 4,82 | 4,64 | 4,50 | 4,39 | 4,30 | 4,16 | 4,01 | 3,86 | 3,78 | 3,70 | 3,62 | 3,54 | 3,45 | 3,36 |
| 13 | 9,07 | 8,70 | 5,74 | 5,21 | 4,86 | 4,62 | 4,44 | 4,30 | 4,19 | 4,10 | 3,96 | 3,82 | 3,68 | 3,59 | 3,51 | 3,43 | 3,34 | 3,25 | 3,17 |
| 14 | 8,86 | 6,51 | 5,56 | 5,04 | 4,89 | 4,46 | 4,28 | 4,14 | 4,03 | 3,94 | 3,80 | 3,66 | 3,51 | 3,43 | 3,35 | 3,27 | 3,18 | 3,09 | 3,00 |
| 15 | 8,88 | 6,36 | 5,42 | 4,89 | 4,53 | 4,32 | 4,14 | 4,00 | 3,89 | 3,80 | 3,67 | 3,52 | 3,37 | 3,29 | 3,21 | 3,13 | 3,05 | 2,96 | 2,87 |
| 16 | 8,53 | 6,23 | 5,29 | 4,77 | 4,44 | 4,20 | 4,03 | 3,89 | 3,78 | 3,69 | 3,55 | 3,41 | 3,26 | 3,18 | 3,10 | 3,02 | 2,93 | 2,84 | 2,75 |
| 17 | 8,40 | 6,11 | 5,18 | 4,67 | 4,34 | 4,10 | 3,93 | 3,79 | 3,68 | 3,59 | 3,46 | 3,31 | 3,16 | 3,08 | 3,00 | 2,92 | 2,83 | 2,75 | 2,65 |
| 18 | 8,29 | 6,01 | 5,09 | 4,59 | 4,25 | 4,01 | 3,84 | 3,71 | 3,60 | 3,51 | 3,37 | 3,23 | 3,08 | 3,00 | 2,92 | 2,84 | 2,75 | 2,66 | 2,57 |
| 19 | 8,18 | 5,93 | 5,01 | 4,50 | 4,17 | 3,94 | 3,77 | 3,63 | 3,52 | 3,43 | 3,30 | 3.15 | 3,00 | 2,92 | 2,84 | 2,76 | 2,67 | 2,59 | 2,49 |
| 20 | 8,10 | 5,85 | 4,94 | 4,43 | 4,10 | 3,87 | 3,70 | 3,58 | 3,46 | 3,37 | 3,23 | 3,09 | 2,94 | 2,86 | 2,78 | 2,69 | 2,61 | 2,52 | 2,42 |
| 21 | 8,02 | 5,78 | 4,87 | 4,37 | 4,04 | 3,81 | 3,64 | 3,51 | 3,40 | 3,31 | 3,17 | 3,03 | 2,88 | 2,80 | 2,72 | 2,64 | 2,55 | 2,46 | 2,33 |
| 22 | 7,95 | 5,72 | 4,82 | 4,31 | 3,99 | 3,76 | 3,59 | 3,45 | 3,35 | 3,26 | 3,12 | 2,98 | 2,83 | 2,75 | 2,67 | 2,58 | 2,50 | 2,40 | 2,31 |
| 23 | 7,88 | 5,66 | 4,76 | 4,26 | 3,94 | 3,71 | 3,54 | 3,41 | 3,30 | 3,21 | 3,07 | 2,93 | 2,78 | 2,70 | 2,62 | 2,54 | 2,45 | 2,35 | 2.26 |
| 24 | 7,82 | 5,61 | 4,72 | 4,22 | 3,90 | 3,67 | 3,50 | 3,36 | 3,26 | 3,17 | 3,03 | 2,89 | 2,74 | 2,68 | 2,58 | 2,49 | 2,40 | 2,31 | 2,21 |
| 25 | 7,77 | 5,57 | 4,68 | 4,18 | 3,85 | 3,63 | 3,46 | 3,32 | 3,22 | 3,13 | 2,99 | 2,85 | 2,70 | 2,62 | 2,54 | 2,45 | 2,36 | 2,27 | 2,17 |
| 28 | 7,72 | 5,53 | 4,64 | 4,14 | 3,82 | 3,59 | 3,42 | 3,29 | 3,18 | 3,09 | 2,96 | 2,81 | 2,66 | 2,58 | 2,50 | 2,42 | 2,33 | 2,23 | 2,13 |
| 27 | 7,68 | 5,49 | 4,60 | 4,11 | 3,78 | 3,56 | 3,39 | 3,26 | 3,15 | 3,06 | 2,93 | 2,78 | 2,63 | 2,55 | 2,47 | 2,38 | 2,29 | 2,20 | 2,10 |
| 28 | 7,64 | 5,45 | 4,57 | 4,07 | 3,75 | 3,53 | 3,36 | 3,23 | 3,12 | 3,03 | 2,90 | 2,75 | 2,60 | 2,52 | 2,44 | 2,35 | 2,26 | 2,17 | 2,06 |
| 29 | 7,60 | 5.42 | 4,54 | 4,04 | 3,73 | 3,50 | 3,33 | 3,20 | 3,09 | 3,00 | 2,87 | 2,73 | 2,57 | 2,49 | 2,41 | 2,33 | 2,23 | 2,14 | 2,03 |
| 30 | 7,56 | 5,39 | 4,51 | 4,02 | 3,70 | 3,47 | 3,30 | 3,17 | 3,07 | 2,98 | 2,64 | 2,70 | 2,56 | 2,47 | 2,39 | 2,30 | 2,21 | 2,11 | 2,01 |
| 40 | 7,31 | 5,18 | 4,31 | 3,83 | 3,51 | 3,29 | 3,12 | 2,99 | 2,89 | 2,80 | 2,68 | 2,52 | 2,37 | 2,29 | 2,20 | 2,11 | 2,02 | 1,92 | 1,80 |
| 60 | 7,08 | 4,98 | 4,13 | 3,65 | 3,34 | 3,12 | 2,95 | 2,82 | 2,72 | 2,63 | 2,50 | 2,35 | 2,20 | 2,12 | 2,03 | 1,94 | 1,84 | 1,73 | 1,60 |
| 120 | 8,85 | 4,79 | 3,95 | 3,48 | 3,17 | 2,96 | 2,79 | 2,66 | 2,56 | 2,47 | 2,34 | 2,19 | 2,03 | 1,95 | 1,86 | 1,76 | 1,66 | 1.53 | 1,38 |
| ∞ | 6,63 | 4,61 | 3,78 | 3,32 | 3,02 | 2,60 | 2,64 | 2,51 | 2,41 | 2,32 | 2,18 | 2,04 | 1,88 | 1,79 | 1,70 | 1,59 | 1,47 | 1.32 | 1,00 |

Приложение 9

**Критические значения распределения Фишера $F^{\alpha}$ для уровня значимости $\alpha$ =0,001**

| $v_2$ | Число степеней свободы числителя $v_1$ | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ |
| 1 | 4053* | 5000* | 5404* | 5825* | 5764* | 5859* | 5929* | 5981* | 6023* | 8056* | 6107* | 6156* | 6209* | 6235* | 6261* | 6287* | 6313* | 6340* | 6366* |
| 2 | 998,5 | 999,0 | 999,2 | 999,2 | 999,3 | 999,3 | 999,4 | 999,4 | 999,4 | 999,4 | 999,4 | 999,4 | 999,4 | 999,5 | 999,5 | 999,5 | 999,5 | 999,5 | 999,5 |
| 3 | 167,0 | 148 | 141,1 | 137,1 | 134,6 | 132,8 | 131,6 | 130,6 | 129,9 | 129,2 | 128,3 | 127,4 | 126,4 | 125,9 | 125,4 | 125,0 | 124,5 | 124,0 | 123,5 |
| 4 | 74,14 | 61,25 | 56,18 | 53,44 | 51,71 | 50,53 | 49,66 | 49,00 | 48,47 | 48,05 | 47,41 | 46,76 | 46,10 | 45,77 | 45,43 | 45,09 | 44,75 | 44,40 | 44,05 |
| 5 | 47,18 | 37,12 | 33,20 | 31,09 | 29,75 | 28,84 | 29,16 | 27,64 | 27,24 | 26,92 | 26,42 | 25,91 | 25,39 | 25,14 | 24,87 | 24,60 | 24,33 | 24,06 | 23,79 |
| 6 | 35,51 | 27,00 | 23,70 | 21,92 | 20,81 | 20,03 | 19,46 | 19,03 | 18,69 | 18,41 | 17,99 | 17,58 | 17,12 | 16,89 | 16,67 | 16,44 | 16,21 | 15,99 | 15,75 |
| 7 | 29,25 | 21,69 | 18,77 | 17,19 | 16,21 | 15,52 | 15,02 | 14,63 | 14,33 | 14,08 | 13,71 | 13,32 | 12,93 | 12,73 | 12,53 | 12,33 | 12,12 | 11,91 | 11,70 |
| 8 | 25,42 | 18,49 | 15,83 | 14,39 | 13,49 | 12,86 | 12,40 | 12,04 | 11,77 | 11,54 | 11,19 | 10,84 | 10,48 | 10,30 | 10,11 | 9,92 | 9,73 | 9,53 | 9,33 |
| 9 | 22,88 | 16,39 | 13,90 | 12,56 | 11,71 | 11,13 | 10,70 | 10,37 | 10,11 | 9,89 | 9,57 | 9,24 | 8,90 | 8,72 | 8,55 | 8,37 | 8,19 | 6,00 | 7,81 |
| 10 | 21,04 | 14,91 | 12,55 | 11,28 | 10,48 | 9,92 | 9,52 | 9,20 | 8,96 | 8,75 | 8,45 | 8,13 | 7,80 | 7,64 | 7,47 | 7,30 | 7,12 | 6,94 | 6,76 |
| 11 | 19, 69 | 13,81 | 11,58 | 10,35 | 9,58 | 9,05 | 8,66 | 8,36 | 8,12 | 7,92 | 7,63 | 7,32 | 7,01 | 6,85 | 6,68 | 6,52 | 6,35 | 6,17 | 6,00 |
| 12 | 18,64 | 12,97 | 10,80 | 9,63 | 8,89 | 8,38 | 8,00 | 7,71 | 7,48 | 7,29 | 7,00 | 6,71 | 6,40 | 6,25 | 6,09 | 5,93 | 5,76 | 5,59 | 5,42 |
| 13 | 17,81 | 12,31 | 10,21 | 9,07 | 8,35 | 7,86 | 7,49 | 7,21 | 6,98 | 6,80 | 6,52 | 6,23 | 5,93 | 5,78 | 5,63 | 5,47 | 5,30 | 5,14 | 4,97 |
| 14 | 17,14 | 11,78 | 9,73 | 8,62 | 7,92 | 7,43 | 7,08 | 6,80 | 6,58 | 6,40 | 6,13 | 5,85 | 5,56 | 5,41 | 5,25 | 5,10 | 4,94 | 4,77 | 4,60 |
| 15 | 16,59 | 11,34 | 9,34 | 8,25 | 7,57 | 7,09 | 6,74 | 6,47 | 6,26 | 6,09 | 5,81 | 5,54 | 5,25 | 5,10 | 4,95 | 4,80 | 4,64 | 4,47 | 4,31 |
| 16 | 16,12 | 10,97 | 9,00 | 7,94 | 7,27 | 6,81 | 6,46 | 6,19 | 5,98 | 5,81 | 5,55 | 5,27 | 4,99 | 4,85 | 4,70 | 4,54 | 4,39 | 4,23 | 4,06 |
| 17 | 15,72 | 10,88 | 8,73 | 7,68 | 7,02 | 6,56 | 6,22 | 5,96 | 5,75 | 5,59 | 5,32 | 5,05 | 4,78 | 4,63 | 4,48 | 4,33 | 4,18 | 4,02 | 3,85 |
| 18 | 15,38 | 10,39 | 8,49 | 7,46 | 6,81 | 8,35 | 6,02 | 5,76 | 5,56 | 5,39 | 5,13 | 4,87 | 4,59 | 4,45 | 4,30 | 4,15 | 4,00 | 3,84 | 3,67 |
| 19 | 15,08 | 10,16 | 8,29 | 7,26 | 6,62 | 6,18 | 5,85 | 5,59 | 5,39 | 5,22 | 4,97 | 4,70 | 4,43 | 4,29 | 4,14 | 3,99 | 3,84 | 3,68 | 3,51 |
| 20 | 14,82 | 9,95 | 8,10 | 7,10 | 6,46 | 8,02 | 5,69 | 5,44 | 5,24 | 5,08 | 4,82 | 4,56 | 4,29 | 4,15 | 4,00 | 3,86 | 3,70. | 3,54 | 3,38 |
| 21 | 14,59 | 9,77 | 7,94 | 6,95 | 6,32 | 5,89 | 5,56 | 5,31 | 5,11 | 4,95 | 4,70 | 4,44 | 4,17 | 4,03 | 3,88 | 3,74 | 3,58 | 3,42 | 3,26 |
| 22 | 14,38 | 9,81 | 7,80 | 6,81 | 6,19 | 5,76 | 5,44 | 5,19 | 4,99 | 4,83 | 4,58 | 4,33 | 4,06 | 3,92 | 3,78 | 3,63 | 3,48 | 3,32 | 3;15 |
| 23 | 14,19 | 9,47 | 7,67 | 6,69 | 6,08 | 5,85 | 5,33 | 5,09 | 4,89 | 4,73 | 4,48 | 4,23 | 3,96 | 3,82 | 3,68 | 3,53 | 3,38 | 3,22 | 3,05 |
| 24 | 14,03 | 9,34 | 7,55 | 6,59 | 5,98 | 5,55 | 5,23 | 4,99 | 4,80 | 4,64 | 4,39 | 4,14 | 3,87 | 3,74 | 3,59 | 3,45 | 3,29 | 3,14 | 2,97 |
| 25 | 13,88 | 9,22 | 7,45 | 6,49 | 5,88 | 5,48 | 5,15 | 4,91 | 4,71 | 4,58 | 4,31 | 4,06 | 3,79 | 3,66 | 3,52 | 3,37 | 3,22 | 3,06 | 2,89 |
| 26 | 13,74 | 9,12 | 7,36 | 6,41 | 5,80 | 5,38 | 5,07 | 4,83 | 4,64 | 4,48 | 4,24 | 3,99 | 3,72 | 3,59 | 3,44 | 3,30 | 3,15 | 2,99 | 2,82 |
| 27 | 13,81 | 9,02 | 7,27 | 8,33 | 5,73 | 5,31 | 5,00 | 4,76 | 4,57 | 4,41 | 4,17 | 3,92 | 3,66 | 3,52 | 3,38 | 3,23 | 3,08 | 2,92 | 2,75 |
| 23 | 13,50 | 8,93 | 7,19 | 6,25 | 5,66 | 5,24 | 4,93 | 4,69 | 4,50 | 4,35 | 4,11 | 3,86 | 3,60 | 3,46 | 3,32 | 3,18 | 3,02 | 2,86 | 2,69 |
| 29 | 13,39 | 8,86 | 7,12 | 6,19 | 5,59 | 5,18 | 4,87 | 4,64 | 4,45 | 4,29 | 4,05 | 3,80 | 3,54 | 3,41 | 3,27 | 3,12 | 2,97 | 2,81 | 2,64 |
| 30 | 13,29 | 8,77 | 7,05 | 6,12 | 5,53 | 5,12 | 4,82 | 4,58 | 4,39 | 4,24 | 4,00 | 3,75 | 3,49 | 3,36 | 3,22 | 3,07 | 2,92 | 2,76 | 2,59 |
| 40 | 12,81 | 8,25 | 6,80 | 5,70 | 5,13 | 4,73 | 4,44 | 4,21 | 4,02 | 3,87 | 3,64 | 3,40 | 3,15 | 3,01 | 2,87 | 2,73 | 2,57 | 2,41 | 2,23 |
| 60 | 11,97 | 7,76 | 6,17 | 5,31 | 4,76 | 4,37 | 4,09 | 3,87 | 3,69 | 3,54 | 3,31 | 3,08 | 2,83 | 2,69 | 2,55 | 2,41 | 2,25 | 2,08 | 1,89 |
| 120 | 11,38 | 7,32 | 5,79 | 4,95 | 4,42 | 4,04 | 3,77 | 3,55 | 3,39 | 3,24 | 3,02 | 2,78 | 2,53 | 2,40 | 2,26 | 2,11 | 1,95 | 1,76 | 1,54 |
| ∞ | 10,83 | 6,91 | 5,42 | 4,62 | 4,10 | 3,74 | 3,47 | 3,27 | 3,10 | 2,96 | 2,74 | 2,51 | 2,27 | 2,13 | 1,99 | 1,84 | 1,66 | 1,45 | 1,00 |

* Эти значения надо умножить на 100

Приложение 10

# *ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТ*

| Печатные буквы | Рукописные буквы | Транскрипция | | Печатные буквы | Рукописные буквы | Транскрипция |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Α α | Α α | а́льфа | | Ν ν | Ν ν | ни (ню) |
| Β β | Β β | бе́та | | Ξ ξ | Ξ ξ | кси |
| Γ γ | Γ γ | га́мма | | Ο ο | Ο ο | о́микрон |
| Δ δ | Δ δ | де́льта | | Π π | Π π | пи |
| Ε ε | Ε ε | эпсилон | | Ρ ρ | Ρ ρ | ро |
| Ζ ζ | Ζ ζ | дзе́та | | Σ σ ς | Σ σ ς | сигма |
| Η η | Η η | эта | | Τ τ | Τ τ | та́у |
| Θ ϑ θ | θ ϑ θ | тэта | | Υ υ | Υ υ | эпсилон |
| Ι ι | Ι ι | йо́та | | Φ φ | Φ φ | фи |
| Κ ϰ | Κ ϰ | ка́ппа | | Χ χ | Χ χ | хи |
| Λ λ | Λ λ | ла́мбда | | Ψ ψ | Ψ ψ | пси |
| Μ μ | Μ μ | ми (мю) | | Ω ω | Ω ω | оме́га |

Приложение 11

## *ЛАТИНСКИЙ АЛФАВИТ*

| Печатные буквы | Рукописные буквы | Транскрипция | Печатные буквы | Рукописные буквы | Транскрипция |
|---|---|---|---|---|---|
| ***A a*** | ***A a*** | а | ***N n*** | ***N n*** | эн |
| ***B b*** | ***B b*** | бэ | ***O o*** | ***O o*** | о |
| ***C c*** | ***C c*** | цэ | ***P p*** | ***P p*** | пэ |
| ***D d*** | ***D d*** | дэ | ***Q q*** | ***Q q*** | ку |
| ***E e*** | ***E e*** | э | ***R r*** | ***R r*** | эр |
| ***F f*** | ***F f*** | эф | ***S s*** | ***S s*** | эс |
| ***G g*** | ***G g*** | гэ (жэ) | ***T t*** | ***T t*** | тэ |
| ***H h*** | ***H h*** | ха (аш) | ***U u*** | ***U u*** | у |
| ***I i*** | ***I i*** | и | ***V v*** | ***V v*** | вэ |
| ***J j*** | ***J j*** | йот (жи) | ***W w*** | ***W w*** | дубль-вэ |
| ***K k*** | ***K k*** | ка | ***X x*** | ***X x*** | икс |
| ***L l*** | ***L l*** | эль | ***Y y*** | ***Y y*** | игрек |
| ***M m*** | ***M m*** | эм | ***Z z*** | ***Z z*** | зэт |

Приложение 12

| Латинский шрифт | | Немецкий (готический) шрифт | | Название букв | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Печатные буквы** | **Рукописные буквы** | **Печатные буквы** | **Рукописные буквы** | **Международная транскрипция** | **Транскрипция русскими буквами** |
| A a | A a | 𝔄 𝔞 | A a | ['a:] | а |
| B b | B b | 𝔅 𝔟 | B b | [be:] | бэ |
| C c | C c | ℭ 𝔠 | C c | [tse:] | цэ |
| D d | D d | 𝔇 𝔡 | D d | [de:] | дэ |
| E e | E e | 𝔈 𝔢 | E e | ['e:] | э |
| F f | F f | 𝔉 𝔣 | F f | ['ɛf] | эф |
| G g | G g | 𝔊 𝔤 | G g | [ge:] | гэ |
| H h | H h | ℌ 𝔥 | H h | [ha:] | ха |
| I i | I i | ℑ 𝔦 | I i | ['i:] | и |
| J j | J j | 𝔍 𝔧 | J j | [jɔt] | йот |
| K k | K k | 𝔎 𝔨 | K k | [ka:] | ка |
| L l | L l | 𝔏 𝔩 | L l | ['ɛl] | эл |
| M m | M m | 𝔐 𝔪 | M m | ['ɛm] | эм |
| N n | N n | 𝔑 𝔫 | N n | ['ɛn] | эн |
| O o | O o | 𝔒 𝔬 | O o | ['o:] | о |
| P p | P p | 𝔓 𝔭 | P p | [pe:] | пэ |
| Q q | Q q | 𝔔 𝔮 | Q q | [ku:] | ку |
| R r | R r, r | ℜ 𝔯 | R r | ['ɛr] | эр |
| S s | S s, ſ | 𝔖 ſ 𝔰 | S ſ ß s | ['ɛs] | эс |
| T t | T t | 𝔗 𝔱 | T t | [te:] | тэ |
| U u | U u | 𝔘 𝔲 | U u | ['u:] | у |
| V v | V v | 𝔙 𝔳 | V v | [fao] | фау |
| W w | W w | 𝔚 𝔴 | W w | [ve:] | вэ |
| X x | X x | 𝔛 𝔵 | X x | ['ɪks] | икс |
| Y y | Y y | 𝔜 𝔶 | Y y | ['ypsilɔn] | ипсилон |
| Z z | Z z | ℨ 𝔷 | Z z | [tsɛt] | цэт |

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК


1. *Аветисов А.Г., Булатов А.И., Шаманов С.А.* Методы прикладной математики в инженерном деле при строительстве нефтяных и газовых скважин. - М.: ООО "Недра-Бизнесцентр", 2003. - 239 с., с илл.
2. *Ахназарова С.Л., Кафаров В.В.* Методы оптимизации эксперимента в химической технологии: Учеб. пособие для хим.-технол. спец. вузов. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Высш. шк., 1985. - 327 с., с илл.
3. *Бендат Дж., Пирсол А.* Измерение и анализ случайных процессов. - Пер. с англ. Г.В.Матушевского и В.Е.Привальского. М.: Мир, 1974. - 464 с., с илл.
4. *Бернулли Я.* О законе больших чисел. - Пер. с лат. Я.В.Успенского. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. - 176 с., с илл.
5. *Бикел П., Доксам К.* Математическая статистика. - Пер. с англ. Ю.А.Данилова; Предисл. Ю.Н.Тюрина. - М.: Финансы и статистика, 1983. - 278 с., с илл.
6. *Большев Л.Н., Смирнов Н.В.* Таблицы математической статистики. - М.: Наука. Вычислительный центр АН СССР, 1968. - 476 с.
7. *Брандт З.* Статистические методы анализа наблюдений. - Пер. с англ. Г.А.Погребинского, под ред. В.Ф.Писаренко. - М.: Мир, 1975. - 312 с., с илл.
8. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* **Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов.** - 13-е изд., исправленное. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. - 544 с., с илл.
9. *Бурбаки Н.* Теория множеств. - Пер. с франц. - М., 1965.
10. *Вапник В.Н., Глазкова Т.Г., Кощеев В.А., Михальский А.И., Червоненкис А.Я.* **Алгоритмы и программы восстановления зависимостей**/Под. ред. *В.Н. Вапника.* - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. - 816 с., с илл.
11. *Вейль Г.* Математическое мышление. Сборник: Пер. с англ. и нем./Сост. Ю.А. Данилов. Под ред. [и со статьями] Б.В. Бирюкова, А.Н. Паршина. - М.: Наука, 1989. - 400 с., с илл.
12. *Вейль Г.* Симметрия. - Пер. с англ. Б.В. Бирюкова и Ю.А. Данилова. Под ред. Б.А. Розенфельда. - М.: Наука, 1968. - 191 с., с илл.
13. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* **Теория вероятностей и её инженерные приложения**. - М.: Наука. Гл. ред. физ.- мат. лит. - 1988. - 480 с., с илл.
14. *Вигнер Е.* Этюды о симметрии. - Пер. с англ. Ю.А. Данилова. Под ред. Я.А. Смородинского. - М.: Мир, 1971. - 318 с., с илл.
15. *Виноградов И.М.* Основы теории чисел. 9-е изд. - М.: 1981.
16. ВРЕМЕННОЕ РУКОВОДСТВО по обработке и прогнозированию некоторых показателей режимов проводки скважин, составленное Азербайджанским институтом нефти и химии им. М.Азизбекова. - Составители: *А.Х.Мирзаджанзаде, А.К.Караев* (*руководители*), *С.Г.Агаев, Г.Т.Вартунян, Е.А.Гусейнов, А.Л.Каплан, З.Г.Каримов, М.Г.Копейкис, А.И.Мамедов, Т.Г.Фараджев*. Баку. - 1971. - 98 с., с илл.
17. *Выгодский М.Я.* Справочник по элементарной математике. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968. - 416 с., с илл.
18. *Выгодский М.Я.* Справочник по высшей математике. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1976. - 872 с., с илл.
19. *Ганджумян Р.А.* Математическая статистика в разведочном бурении: Справочное пособие. - М.: Недра, 1990. - 218 с., с илл.
20. *Гильдерман Ю.Н.* Закон и случай. - Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1991. - 200 с.

21. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов. - Изд. 6-е, стер. - М.: Высш. шк., 1997. - 479 с., с илл.
22. *Грудинкин А.* Всегда ли бутерброд падает маслом вниз. Ж. "Знание - Сила", №3, 2000.
23. *Дементьев Л.Ф., Шурубор Ю.В.* Зачем геологу-нефтянику математика и компьютеры. - М.: Недра, 1991. - 127 с., с илл.
24. *Джини К.* Средние величины. М.: Статистика, 1970.
25. *Дэвис Дж.С.* Статистический анализ данных в геологии. - Пер. с англ. В 2-х книгах. Пер. В.А. Голубевой, под ред. Д.А. Родионова. - М.: Недра, 1990. - 427 с., с илл.
26. *Ефимова М.Р., Петрова Е.В., Румянцев В.Н.* Общая теория статистики: Учебник. - М.: ИНФРА-М, 1998. - 416 с., с илл.
27. *Зайдель А.Н.* Погрешности измерений физических величин. - Л.: Наука, 1985.
28. *Игнатов В.И.* Организация и проведение эксперимента в бурении. М.: Недра, 1978. - 94 с.
29. *Каждан А.В., Гуськов О.И.* Математические методы в геологии: Учебник для вузов. - М.: Недра, 1990. - 251 с., с илл.
30. *Камке Д., Кремер К.* Физические основы единиц измерений. - Пер. с нем. - М.: Мир, 1980. - 208 с., с илл.
31. *Кафаров В.В., Дорохов И.Н., Липатов Л.Н.* **Системный анализ процессов химической технологии.** Статистические методы идентификации процессов химической технологии. - М.: Наука, 1982. - 345 с., с илл.
32. *Кендалл М.Дж., Стьюарт А.* Теория распределений. - Пер с англ. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966. - 588 с., с илл.
33. *Кендалл М.Дж., Стьюарт А.* Статистические выводы и связи. - Пер. с англ. - М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., - 1973. - 900 с., с илл.
34. *Кокс Д., Хинкли Д.* Теоретическая статистика. - Пер. с англ. Е.В.Чепурина./Под ред. Ю.К.Беляева. - М.: Мир, 1978. - 560 с., с илл.
35. *Колемаев В.А., Калинина В.Н.* Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник/Под ред. Колемаева В.А. - М.: ИНФРА-М, 1997. - 302 с., с илл. (серия "Высшее образование").
36. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения, теоремы, формулы. Пер. с амер./Под общей ред. *И.Г.Арамановича.* Перераб. - М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974. - 832 с., с илл.
37. *Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. - Киев: Наукова думка, 1978. - 584 с., с илл.
38. *Коузов П.А.* Основы анализа дисперсного состава промышленных пылей и измельчённых материалов. Изд. 2-е, испр. - Л.: Химия, 1974. - 280 с., с илл.
39. *Крамбейн У., Грейбилл Ф.* Статистические модели в геологии. - Пер. с англ. Д.А.Родионова. Под ред. Ю.В.Прохорова. - М.: Мир, 1969. - 398 с., с илл.
40. *Крамер Г.* Математические методы статистики. - Пер. с англ. А.С.Монина, А.А.Петрова. Под ред. А.М.Колмогорова. - 2-е изд., стереотип. - М.: Мир, 1975. - 648 с., с илл.
41. *Кудрин В.* Универсальный коррелятор. Ж. "Знание - сила" №5, 2006, с. 102.
42. *Кулаичев А.П.* Методы и средства анализа данных в среде Windows. STADIA 6.0. Изд. 2-е, перераб. и доп. - М.: "Информатика и компьютеры", 1998. - 270 с., с илл.
43. *Кулаичев А.П.* Методы и средства анализа данных в среде Windows. STADIA. Изд. 3-е, перераб. и доп. - М.: InCo НПО "Информатика и компьютеры", 1999. - 344 с., с илл.
44. *Лаудон Т.* ЭВМ и машинные методы в геологии. - Пер. с англ./Пер. *Д.А.Родионова.* - М.: Мир, 1981. - 318 с., с илл.

45. *Литтл Дж.А., Рубин Д.Б.* Статистический анализ данных с пропусками. - Пер. с англ. - М.: Финансы и статистика, 1990. - 336 с., с илл.
46. *Лихолетов И.И., Мицкевич И.П.* Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике. Изд. 2-е, испр. и доп, Минск, "Вышейш. школа", 1969. - 455 с., с илл.
47. **Математическая энциклопедия**. В 5 т./Гл. ред. *И.М.Виноградов*. Ред. кол. *С.И.Адян, П.С.Александров, Н.С.Бахвалов, В.И.Битюцков* и др. - М.: Сов. энциклопедия, 1977.
48. **Математический энциклопедический словарь**/Гл. ред. *Ю.В.Прохоров*. Ред. кол. *С.И.Адян, Н.С.Бахвалов, В.И.Битюцков* и др. - М.: Сов. энциклопедия, 1988. - 847 с., с илл.
49. *Ортоли С., Витковски Н.* Ванна Архимеда. Краткая мифология науки/Пер. с франц. Д.Баюка. - М.: КоЛибри, 2007. - 240 с., с илл.
50. *Пасхавер И.С.* Средние величины в статистике. - М.: Статистика, 1979.
51. **Политехнический словарь**. Гл. ред. акад. *А.Ю.Ишлинский*. - П 50 2-е изд. - М.: Советская энциклопедия, 1980. - 656 с., с илл.
52. *Прахар К.* Распределение простых чисел. Пер. с нем. А.А. Карацубы. Под ред. А.И. Виноградова. М.: Мир, 1967 г.- 512 с.
53. *Расторгуев С.П.* **Инфицирование как способ защиты жизни. Вирусы: биологические, социальные, психические, компьютерные**. - М.: Издательство Агентства "Яхтсмен", 1996. - 336 с., с илл.
54. *Рейхман Дж.* Применение статистики. - М.: Статистика, 1969.
55. *Секей Г.* Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. Пер. с англ. - М.: Мир, 1990. - 240 с., с илл.
56. Справочник по прикладной статистике. Под ред. *Э.Ллойда, У.Ледермана*. Пер. с англ. под ред. *С.А.Айвазяна и Ю.Н.Тюрина*. М.: Финансы и статистика, 1990, в 2-х т.
57. Справочник по специальным функциям. С формулами, графиками и математическими таблицами. Под ред. *Абрамовица М.* и *Стиган И.* Пер. с англ. под ред. *Диткина В.А.* и *Кармазиной Л.Н.* М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. - 832 с., с илл.
58. *Тейлор Дж.* Введение в теорию ошибок. - М.: Мир, 1985. - 272 с., с илл.
59. *Трост Э.* Простые числа. Пер. с нем. *Н.И.Фельдмана*. Под ред. *А.О.Гельфонда*. М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1959. - 136 с.
60. *Тюрин Ю.Н., Макаров А.А.* Статистический анализ данных на компьютере/Под. ред. В.Э. Фигурнова. - М.: ИНФРА-М. 1998. - 528 с., с илл.
61. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и её приложения. В 2-х томах. Т. 1: Пер. с англ. - М.: Мир, 1984. - 528 с., с илл.
62. **Физический энциклопедический словарь**. Гл. ред. *А.М.Прохоров*. Ред. кол. *Д.М.Алексеев, А.М.Бонч-Бруевич, А.С.Боровик-Романов* и др. - М.: Сов. энциклопедия, 1984. - 944 с., с илл.
63. *Цивинский Д.Н.* Разработка и реализация программы седиментационного анализа для предварительной оценки качества реагентов, применяемых в цементных растворах. Вестник Самарского государственного технического университета, Вып. 1, 1994 г., 161-165 с.
64. *Цивинский Д.Н.* (RU) **"Анализ седиментационной кривой методом моментов"**. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ №2006610562, от 9 февраля 2006 г. Заявка №2005613240 от 9 декабря 2005 г.
65. *Шарапов И.П.* Применение математической статистики в геологии (Статистический анализ геологических данных). - 2-е изд., испр. и доп. - М.: Недра, 1971. - 248 с., с илл.

66. *Шевелев И.Ш., Марутаев М.А., Шмелев И.П.* Золотое сечение: Три взгляда на природу гармонии. - М.: Стройиздат, 1990. - 343 с., с илл.
67. *Эберт К., Эдерер Х.* Компьютеры. Применение в химии. - Пер. с нем. - М.: Мир, 1988. - 416 с., с илл.
68. *Яворский Б.М., Детлаф А.А.* Справочник по физике. Изд. 2-е, испр. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1964. - 848 с., с илл.
69. *Ягодинский В.Н.* Ритм, ритм, ритм! Этюды хронобиологии. - М.: Знание, 1985. - 192 с., с илл.

**Лексикографические источники**

70. *Александрова З.Е.* **Словарь синонимов русского языка**. Около 9000 синонимических рядов. Под ред. Л.А.Чешко. Изд. 3-е, стереотип. - М.: Сов. энциклопедия, 1971. - 600 с.
71. **Антология мудрости**. Более 25000 афоризмов, максим, изречений. Составитель *В.Ю.Шойхер*. - М.: "Издательский дом "Вече", 2005. - 848 с.
72. **Англо-русский политехнический словарь**. 80000 терминов. Под ред. *А.Е.Чернухина*. Изд. 3-е. - М., Русский язык, 1976. - 648 с.
73. *Бабкин А.М., Шендецов В.В.* Словарь иноязычных выражений и слов. В двух томах. - 2-е изд., перераб. и доп. - Л.: Наука, Ленинградское отделение, 1981 г.
74. **Биологический энциклопедический словарь**. Более 7500 статей. / Гл. ред. *М.С.Гиляров*. Ред. коллегия *А.А.Баев, Г.Г.Винберг, Г.А.Заварзин* и др. - 2-е изд., исправл. - М.: "Большая российская энциклопедия", 1995. - 864 с., с илл.
75. **БОЛЬШАЯ ЭНЦИКЛОПЕДИЯ.** Словарь общедоступных сведений по всем отраслям знания. Под редакцией *С.Н.Южакова*. Третье издание со стереотипа. Санкт-Петербург. Книгоиздательское т-во "Просвещение". 1903 г.
76. **Большой англо-русский словарь**. В двух томах. Около 150000 слов. Под общ. руковод. *И.Р.Гальперина*. - М.: Советская энциклопедия, 1972.
77. *Борохов Э.* **Энциклопедия афоризмов** (Мысль в слове). - Худож. *Ю.Д.Федичкин*. - М.: ООО "Фирма "Издательство АСТ", 1999. - 720 с.
78. *Брокгауз Ф.А., Ефрон И.А.* Мировая история. Иллюстрированный биографический словарь. Современная версия. - М.: Изд-во Эксмо, 2008. - 864 с., с илл.
79. *Брокгауз Ф.А., Ефрон И.А.* **Энциклопедический словарь**. Современная версия. - М.: Изд-во Эксмо, 2003. - 672 с., с илл.
80. *Вейсман А.Д.* **Греческо-русский словарь**. - Репринт V издания 1899 г., С.-Петербургъ. - М.: Греко-латинский кабинет Ю.А.Шичалина, 1991. - 1370 с.
81. *Ганшина К.А.* **Французско-русский словарь**. Около 51000 слов. - 8-е изд., стереотип. - М.: Русский язык, 1979. - 912 с.
82. *Даль Владимир.* **Толковый словарь живого великорусского языка**. Воспроизведение второго издания 1880-1882 гг. - М.: Русский язык, 1978. В 4 томах.
83. *Даль Владимир.* **Толковый словарь живого великорусского языка**. Репринтное воспроизведение издания 1903-1909 гг., осуществлённое под редакцией профессора И.А. Бодуэна де Куртенэ. - М.: ТЕРРА, 2000. В 4 томах.
84. *Дворецкий И.Х.* **Латинско-русский словарь**. Около 50000 слов. - Изд. 2-е, перераб. и доп. - М.: Русский язык, 1976. - 1096 с.
85. *Кедринский В.В.* **Англо-русский словарь по химии и переработке нефти**. Около 60000 терминов. - Изд. 2-е, перераб. и доп. - М.: Русский язык, 1975. - 769 с.

86. *Кондаков Н.И.* **Логический словарь**. Отв. редактор *Д.П.Горский*. - М.: Наука, 1971. - 656 с.
87. *Кротов В.* **СЛОВАРЬ** философических, метафорических, юмористических, и прочих разных **ПАРАДОКСАЛЬНЫХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ**. - М.: КРОН-ПРЕСС, 1995. - 480 с.
88. *Мюллер В.К.* **Англо-русский словарь.** 70000 слов. - Изд. 16-е, стереотипное. - М.: Советская энциклопедия, 1971. - 912 с.
89. **Немецко-русский словарь.** 80000 слов. Под ред. *А.А.Лепинга* и *Н.П.Страховой*. Изд. 7-е, стереотипное. - М.: Русский язык, 1976. - 991 с.
90. *Ожегов С.И.* **Словарь русского языка**: Около 57000 слов/Под ред. чл.-корр. АН СССР *Н.Ю. Шведовой*. - 19-е изд., испр. - М.: Русский язык, 1987. - 752 с.
91. **Орфографический словарь русского языка**. Около 104 000 слов. Под ред. *С.Г.Бархударова, С.И.Ожегова* и *А.В.Шапиро*. Изд. 9-е. - М.: Сов. энциклопедия, 1969. - 520 с.
92. **Словарь иностранных слов: актуальная лексика, толкования, этимология**. 1500 словарных статей./*Н.Н.Андреева, Н.С.Арапова, Л.М.Баш, А.В.Боброва, Г.Л.Вячеслова, Р.С.Кимягарова, Е.М.Сендровиц*. - М.: Цитадель, 1997. - 320 с.
93. **Словарь иностранных слов и выражений**. Авт.-сост. *Н.В.Трус, Т.Г.Шубина*. - Мн.: Современ. литератор, 1999. - 576 с. - (энциклопедический справочник).
94. **Словарь синонимов русского языка**. В 2 томах. 4148 статей. Гл. ред. *А.П.Евгеньева*. - Л.: Наука, Ленинградское отделение, 1970.
95. **Словарь физиологических терминов**. Отв. редактор *О.Г.Газенко*. - М.: Наука, 1987. - 447 с., с илл.
96. **Современный словарь иностранных слов**. Около 20000 слов. - СПб.: Дуэт, 1994. - 752 с.
97. *Таранов П.С.* **Анатомия мудрости.** Философия изнутри. В 2 томах. - М.: Изд-во "Остожье", 1996.
98. **Терра-Лексикон**: Иллюстрированный энциклопедический словарь. Около 18000 статей. - М.: Терра, 1998. - 672 с., с илл.
99. **Трудности словоупотребления и варианты норм русского литературного языка**. Словарь-справочник. Ред. *К.С.Горбачевич*. - Л.: Наука, ленинградское отделение, 1971. - 520 с.
100. *Фасмер М.* **Этимологический словарь русского языка**. В 4 томах. Пер. с нем. и доп. *О.Н.Трубачёва*. Под ред. *Б.А.Ларина*. Изд. 2-е, стереотип. - М.: Прогресс, 1986.
101. **Философский энциклопедический словарь**. Гл. редакция: *Л.Ф.Ильичёв, П.Н.Федосеев, С.М.Ковалёв, В.Г.Панов*. - М.: Сов. энциклопедия, 1983. - 840 с.
102. *Хориков И.П., Малев М.Г.* **Новогреческо-русский словарь**. Около 67000 слов. Под ред. *П.Пердикиса* и *Т.Папандопулоса*. - М.: Культура и традиции, 1993, 856 с.
103. *Черных П.Я.* Историко-этимологический современного словарь русского языка. 13560 слов. В 2-х томах. П.Я.Черных. - 8-е изд., стереотип. - М.: Рус. яз. - Медиа, 2007.
104. *Шведова Н.Ю.* Толковый словарь русского языка с включением сведений о происхождении слов. РАН. Институт русского языка им. В.В.Виноградова. Отв. ред. *Н.Ю.Шведова*. - М.: Издательский центр "Азбуковник", 2007. - 1175 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

## ПЕРЕЧЕНЬ СТАТЕЙ О ПОНЯТИЯХ И ТЕРМИНАХ

ЦИВИНСКИЙ Дмитрий Николаевич

**Применение статистического метода анализа в нефтегазовом деле**
**Учебное пособие**

Печатается в авторской редакции

Корректор Алендукова Н.А.

Формат 16×84 1/16. Бумага офсетная
Усл.п.л. 21,9.
Уч.-изд.л. 20,8.
Тираж 150. Рег.№21/13.

---

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Самарский государственный технический университет"
443100, г. Самара, ул. Мологвардейская, 244.
Главный корпус.

Отпечатано в типографии
Самарского государственного технического университета
443100, г. Самара, ул. Мологвардейская, 244.,
корпус №8.