Механика сплошных сред

Составитель асс. каф БНГС СамГТУ, магистр Никитин В.И.

Практическое занятие 4.
Градиент и Дивергенция.

Градиент (от лат. *gradiens*, род. падеж *gradientis* — шагающий) — характеристика, показывающая направление наискорейшего возрастания некоторой величины, значение которой меняется от одной точки пространства к другой. Например, если взять высоту поверхности Земли над уровнем моря (2-мерное пространство), то её градиент в каждой точке поверхности будет показывать «в горку».

Как видно из объяснения, градиент является векторной функцией, а величина, которую он характеризует — функцией скалярной.

Формально, для случая трёхмерного пространства, градиентом называется векторная функция с компонентами $\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}$, где φ — некоторая скалярная функция координат x, y, z.

Если ϕ — функция *n* переменных $x_1, \ldots, x_n$, то её градиентом будет n-мерный вектор

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \phi}{\partial x_n}\right),$$

компоненты которого равны частным производным ϕ по всем её аргументам.

Градиент обозначается $\mathrm{grad}\phi$ или, с использованием оператора набла, $\nabla\phi$.

Из определения градиента следует, что:

$$\mathrm{grad}\phi = \nabla\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z}\vec{e}_z$$

Пример

Например, градиент функции $\phi(x, y, z) = 2x + 3y^2 - sin(z)$ будет представлять собой:

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) = (2, 6y, -cos(z))$$

В физике

В различных отраслях физики используется понятие градиента различных физических полей.

Например, *градиент концентрации* — нарастание или уменьшение по какому-либо направлению концентрации растворённого вещества, *градиент температуры* - увеличение или уменьшение по направлению температуры среды и т.д.. Градиент может быть вызван различными причинами, например, механическим препятствием, действием электромагнитных, гравитационных или других полей или различием в растворяющей способности граничащих фаз, например, октанол/вода.

Связь с производной по направлению

Используя правило дифференцирования сложной функции, нетрудно показать, что производная функции ϕ по направлению $\vec{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ равняется скалярному произведению градиента ϕ на **единичный** вектор $\vec{e}$:

$$\frac{\partial\phi}{\partial\vec{e}} = \frac{\partial\phi}{\partial x_1}e_1 + \cdots + \frac{\partial\phi}{\partial x_n}e_n = (\nabla\phi, \vec{e})$$

Таким образом, для вычисления производной по любому направлению достаточно знать градиент функции, то есть набор всех её частных производных.

Диверге́нция (от лат. *divergere* — обнаруживать расхождение) — дифференциальный оператор, отображающий векторное поле на скалярное (то есть, в результате применения к векторному полю операции дифференцирования получается скалярное поле), который определяет (для каждой точки), «насколько расходится входящее и исходящее из малой окрестности данной точки поле», точнее, насколько расходятся входящий и исходящий потоки.

Если учесть, что потоку можно приписать алгебраический знак, то нет необходимости учитывать входящий и исходящий потоки по отдельности, всё будет автоматически учтено при суммировании с учётом знака. Поэтому можно дать более короткое определение дивергенции:

> **дивергенция** — это линейный дифференциальный оператор на векторном поле, характеризующий поток данного поля через поверхность достаточно малой (в условиях конкретной задачи) окрестности каждой внутренней точки области определения поля.

Оператор дивергенции, применённый к полю $\mathbf{F}$, обозначают как

$$\operatorname{div}\mathbf{F}$$

или

$$\nabla\cdot\mathbf{F}.$$

Определение в декартовых координатах

Допустим, что векторное поле дифференцируемо в некоторой области. Тогда в трёхмерном декартовом пространстве дивергенция будет определяться выражением

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

(здесь **F** - обозначено некое векторное поле с декартовыми компонентами F_x, F_y, F_z):

Это же выражение можно записать с использованием оператора набла

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$$

Многомерная, а также двумерная и одномерная, дивергенция определяется в декартовых координатах в пространствах соответствующей размерности совершенно аналогично (в верхней формуле меняется лишь количество слагаемых, а нижняя остается той же, подразумевая оператор набла подходящей размерности).

Физическая интерпретация

С точки зрения физики (и в строгом смысле, и в смысле интуитивного физического образа математической операции) дивергенция векторного поля является показателем того, в какой степени данная точка пространства (точнее достаточно малая окрестность точки) является источником или стоком этого поля:

$\operatorname{div} \mathbf{F} > 0$ — точка поля является источником;
$\operatorname{div} \mathbf{F} < 0$ — точка поля является стоком;
$\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ — стоков и источников нет, либо они компенсируют друг друга.

Простым, хоть быть может и несколько схематическим, примером может служить озеро (для простоты — постоянной единичной глубины со всюду горизонтальной скоростью течения воды, не зависящей от глубины, давая, таким образом, двумерное векторное поле на двумерном пространстве). Если угодно иметь более реалистическую картину, то можно рассмотреть горизонтальную проекцию скорости, проинтегрированную по вертикальной пространственной координате, что даст ту же картину двумерного векторного поля на двумерном пространстве, причём картина качественно будет для наших целей не сильно отличаться от упрощённой первой, количественно же являться её обобщением (весьма реалистическим). В такой модели (и в первом, и во втором варианте) родники, бьющие из дна озера будут давать положительную дивергенцию поля скоростей течения, а подводные стоки (пещеры, куда вода утекает) — отрицательную дивергенцию.

Дивергенция вектора плотности тока даёт минус скорость накопления заряда в электродинамике (так как заряд сохраняется, то есть не исчезает и не появляется, а может только переместиться через границы какого-то объёма, чтобы накопиться в нём или уйти из него; а если и возникают или исчезают где-то положительные и отрицательные заряды — то только в равных количествах). (См. Уравнение непрерывности).

Задание по варианту

$$\vec{a} = (\textit{первая цифра в зачетке})xy^2\vec{i} + (\textit{последняя цифра в зачетке})x^3y^2z^3\vec{j} + (\textit{предпоследняя цифра в зачетке})e^{xyz}\vec{k}$$

Вычислить $\nabla \cdot \vec{a}$, Сделать выводы, предполагая, что $\vec{a}$ - поле скоростей.

$$F = (\textit{первая цифра в зачетке})xy^2 + (\textit{последняя цифра в зачетке})x^3y^2z^3 + (\textit{предпоследняя цифра в зачетке})e^{xyz},$$

Вычислить $\nabla F, \nabla \cdot (\nabla F)$.