Механика сплошных сред

Составитель асс. каф БНГС СамГТУ, магистр Никитин В.И.

Практическое занятие 3. Преобразование компонент вектора при переходе от одной системы координат к другой.

Связь между векторами базиса двух ортогональных декартовых систем координат. Пусть наряду с системой x_1, x_2, x_3 рассматривается новая система x'_1, x'_2, x'_3, векторы базиса которой $\vec{e}_1\,', \vec{e}_2\,', \vec{e}_3\,'$. Разложим каждый из новых векторов базиса $\vec{e}_i\,'$ по старым векторам базиса. Коэффициенты в этих разложениях обозначим A_{ij}. Имеем

$$\begin{aligned} \vec{e}_1\,' &= A_{11}\vec{e}_1 + A_{12}\vec{e}_2 + A_{13}\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2\,' &= A_{21}\vec{e}_1 + A_{22}\vec{e}_2 + A_{23}\vec{e}_3 \\ \vec{e}_3\,' &= A_{31}\vec{e}_1 + A_{32}\vec{e}_2 + A_{33}\vec{e}_3 \end{aligned} \qquad (1.1)$$

или, в краткой записи

$$\vec{e}_i\,' = A_{ij}\vec{e}_j.$$

Очевидно, что A_{ij} равны косинусам углов между векторами $\vec{e}_i\,'$ и $\vec{e}_j$: $A_{ij} = \cos(\widehat{\vec{e}_i\,'\vec{e}_j})$. Набор коэффициентов A_{ij} можно записать в виде матрицы

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\widehat{\vec{e}_1\,'\vec{e}_1}) & \cos(\widehat{\vec{e}_1\,'\vec{e}_2}) & \cos(\widehat{\vec{e}_1\,'\vec{e}_3}) \\ \cos(\widehat{\vec{e}_2\,'\vec{e}_1}) & \cos(\widehat{\vec{e}_2\,'\vec{e}_2}) & \cos(\widehat{\vec{e}_2\,'\vec{e}_3}) \\ \cos(\widehat{\vec{e}_3\,'\vec{e}_1}) & \cos(\widehat{\vec{e}_3\,'\vec{e}_2}) & \cos(\widehat{\vec{e}_3\,'\vec{e}_3}) \end{pmatrix}$$

Соотношения (1.1) можно рассматривать как систему алгебраических уравнений для определения $\vec{e}_j$ по известным $\vec{e}_i\,'$. Решение этой системы записывается в виде

$$\vec{e}_j = B_{ji}\vec{e}_i\,', \qquad (1.2)$$

где B_{ji} – элементы матрицы B, обратной по отношению к матрице A:

$$B = A^{-1}, \quad A = B^{-1}.$$

Произведение обратных матриц равно единичной матрице. Это условие можно записать в виде

$$B_{ji}A_{ik} = \delta_{jk}, \quad \text{а также} \quad A_{ij}B_{jk} = \delta_{ik}. \qquad (1.3)$$

Соотношения (1.2), очевидно, представляют собой разложение старых векторов базиса $\vec{e}_j$ по новым векторам базиса $\vec{e}_i\,'$. Поэтому коэффициенты B_{ji} равны косинусам углов между векторами $\vec{e}_j$ и $\vec{e}_i\,'$, то есть равны A_{ij}:

$$B_{ji} = A_{ij} \qquad (1.4)$$

Таким образом, матрица B равна транспонированной матрице A и в то же время является обратной по отношению к A. Матрицы, для которых обратная матрица совпадает с транспонированной, называются ортогональными. Две повернутые относительно друг друга системы ортогональных базисных векторов связаны ортогональными матрицами. Итак, для коэффициентов A_{ij} и B_{ij} вследствие (1.3) и (1.4) верны равенства

$$A_{ij}A_{ik} = \delta_{jk}, \quad B_{ij}B_{ik} = \delta_{jk} \qquad (1.5)$$

Связь между координатами точки в двух ортогональных декартовых системах с общим началом координат. Запишем выражение для радиуса-вектора, проведенного в точку пространства,

координаты которой в старой системе x_i, а в новой – x'_i:

$$\vec{r} = x'_i \vec{e}'_i = x_j \vec{e}_j.$$

Подставляя в это равенство выражение (1.1) векторов $\vec{e}'_i$ через $\vec{e}_j$, или выражение (1.2) векторов $\vec{e}'_i$ через $\vec{e}_j$, и используя (1.3), (1.4), (1.5), а также свойство линейной независимости векторов базиса, получаем

$$x'_i = B_{ji} x_j = A_{ij} x_j, \quad x_j = A_{ij} x'_i = B_{ji} x'_i \tag{1.6}$$

Формулы преобразования компонент вектора при переходе от одной декартовой системы координат к другой. Запишем разложения вектора $\vec{a}$ по векторам базиса двух систем координат:

$$\vec{a} = a'_i \vec{e}'_i = a_j \vec{e}_j.$$

Аналогично выводу (1.6) отсюда получаем

$$a'_i = B_{ji} a_j = A_{ij} a_j, \quad a_j = A_{ij} a'_i = B_{ji} a'_i. \tag{1.7}$$

Подчеркнем, что формулы (1.7) выведены из условия, что $a'_i \vec{e}_i{}' = a_j \vec{e}_j$, то есть что выражение вида $a_k \vec{e}_k$ не зависит от выбора системы координат, в любой декартовой системе координат дает один и тот же объект $\vec{a}$. Верно и обратное: формулы (1.7) обеспечивают равенство $a_k \vec{e}_k = \vec{a}$ независимо от выбора конкретной декартовой системы координат. Поэтому можно использовать следующее **определение понятия компонент вектора:** набор чисел a_1, a_2, a_3, заданных в некоторой системе координат, представляет собой компоненты вектора, если при переходе к другой системе координат он преобразуется по формулам (1.7). Набор компонент a_1, a_2, a_3 часто кратко записывают просто как a_i и называют вектором.

Замечание. *Здесь рассматривались компоненты векторов только в ортогональных декартовых координатах. На самом деле часто используются и не декартовы координаты, например цилиндрические или сферические. Закон преобразования компонент векторов при переходе к произвольной системе координат получается аналогичным путем из условия инвариантности вектора, при известной связи между базисными векторами старой и новой систем координат.*

ЗАДАНИЯ

ж) Косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

1.2. Формулы, связывающие координаты x_1, x_2, x_3 и x'_1, x'_2, x'_3 в двух декартовых системах координат, в общем виде записываются так (формулы (1.6)):

$$x'_i = A_{ij}x_j. \qquad (A)$$

а) Написать равенства (A) в раскрытом виде, учитывая, что индексы i, j могут принимать значения 1, 2, 3.

б) Чему равны конкретные значения A_{11}, A_{12}, A_{13} и т.д., если

$$x'_1 = x_1\frac{\sqrt{2}}{2} + x_2\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x'_2 = -x_1\frac{\sqrt{2}}{2} + x_2\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x'_3 = x_3.$$

Записать полученный набор A_{ij} в виде матрицы.

1.3. Компоненты вектора $\vec{a}$ в системе координат x_i равны 1, 3, 2 соста

Записать полученный набор A_{ij} в виде матрицы.

1.3. Компоненты вектора $\vec{a}$ в системе координат x_i равны 1, 3, 2 соответственно.
Вычислить:
а) сумму $a_\alpha \delta_{3\alpha}$, ($\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера);
б) компоненту a'_2 вектора $\vec{a}$ в системе x'_i, если

$$x'_1 = x_1\frac{\sqrt{2}}{2} + x_2\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x'_2 = -x_1\frac{\sqrt{2}}{2} + x_2\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x'_3 = x_3;$$

в) компоненту a'_1 вектора $\vec{a}$ в системе x'_i;
г) компоненту a'_3 вектора $\vec{a}$ в системе x'_i;
д) длину вектора $\vec{a}$ двумя способами: используя его компоненты в системе x_i и в системе x'_i.

18

Задание по варианту

$\vec{a} = \{$*последняя цифра в зачетке, предпоследняя цифра в зачетке, первая цифра в зачетке*$\}$

Вычислить компоненты вектора $\vec{a}$ в системе
$$x'_1 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_3$$
$$x'_2 = x_2$$
$$x'_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3$$

Проверить условие: $|\vec{a}| = |\vec{a}'|$