Механика сплошных сред

Составитель асс. каф БНГС СамГТУ, магистр Никитин В.И.

Практическое занятие 2.
Операции с векторными величинами

Компоненты векторов в декартовой системе координат. Индексные обозначения. В декартовой системе координат компоненты вектора – это величины проекций вектора на координатные оси. Обычно координаты обозначаются x, y, z, единичные векторы, направленные вдоль осей координат (векторы базиса), – $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, а компоненты вектора $\vec{a}$ – a_x, a_y, a_z. Тогда

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\,.$$

Часто используются так называемые индексные обозначения. Координаты обозначаются x_1, x_2, x_3 (имеется в виду, что $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$). Векторы базиса при этом обозначаются $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, а компоненты вектора $\vec{a}$ — a_1, a_2 , a_3. Тогда

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i\vec{e}_i. \qquad \text{(A)}$$

Существует удобное **правило для краткой записи сумм** такого вида, называемое *правилом Эйнштейна*: если в одночленном выражении с буквенными индексами два индекса совпадают, то считается, что по этим индексам производится суммирование, а знак $\sum$ опускается. Таким образом вместо $\sum\limits_{i=1}^{3} a_i\vec{e}_i$ пишется просто $a_i\vec{e}_i$. Обозначение индексов суммирования не существенно: эта же сумма может быть записана в виде $a_j\vec{e}_j$, или $a_\alpha\vec{e}_\alpha$ и т.д. Формула (A), таким образом, может быть записана в виде

$$\vec{a} = a_i\vec{e}_i.$$

Умножение вектора на число. Пусть $\vec{a}$ – вектор, а λ – число. Чтобы вычислить компоненты b_i вектора $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, надо все компоненты $\vec{a}$ умножить на λ:

$$b_i = \lambda a_i.$$

Сложение векторов. Компоненты вектора $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ равны $c_i = a_i + b_i$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = a_i\vec{e}_i + b_i\vec{e}_i = (a_i + b_i)\vec{e}_i$$

Скалярное произведение векторов. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $(\vec{a}\cdot\vec{b})$ и равняется произведению длин векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, умноженному на косинус угла θ между ними:

$$(\vec{a}\cdot\vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta.$$

Для скалярных произведений векторов базиса декартовой ортогональной системы координат имеем

$(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1) = 1$, $(\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2) = 1$, $(\vec{e}_3\cdot\vec{e}_3) = 1$, $(\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j) = 0$ при $i \neq j$,

или

$$(\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j) = \delta_{ij},$$

где δ_{ij} – так называемый символ Кронекера. Он определяется равенствами

$$\delta_{ij} = 1 \text{ при } i = j, \quad \delta_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j.$$

С использованием представлений $\vec{a} = a_i\vec{e}_i$, $\vec{b} = b_j\vec{e}_j$ и свойства линейности скалярного произведения получаем, что в декартовой системе координат

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (a_i\vec{e}_i \cdot b_j\vec{e}_j) = a_i b_j(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i.$$

Таким образом, скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений их соответствующих компонент. В частности, скалярное произведение вектора самого на себя равно квадрату длины вектора. Таким образом, в ортогональной декартовой системе координат **длина вектора** вычисляется по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{a_i a_i}.$$

Величина проекции вектора $\vec{a}$ на направление, задаваемое единичным вектором $\vec{n}$, равна скалярному произведению $(\vec{a} \cdot \vec{n})$:

$$a_n = (\vec{a} \cdot \vec{n}) = |\vec{a}| \cos\widehat{(\vec{a}\,\vec{n})} = a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3 = a_i n_i.$$

Векторное произведение. Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $[\vec{a} \times \vec{b}]$. Оно представляет собой вектор, перпендикулярный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и направленный так, что с его конца переход от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ происходит против часовой стрелки. Длина этого вектора равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Для векторов базиса ортогональной декартовой системы координат имеем

$$[\vec{e}_1 \times \vec{e}_2] = \vec{e}_3, \quad [\vec{e}_2 \times \vec{e}_1] = -\vec{e}_3 \quad \text{и т.д.}$$

Поэтому векторное произведение (в декартовой системе координат) представляется в виде следующего определителя

$$[\vec{a} \times \vec{b}] = [a_i\vec{e}_i \times b_j\vec{e}_j] = a_i b_j[\vec{e}_i \times \vec{e}_j] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Если координаты обозначаются x, y, z, то компоненты векторного произведения $[\vec{a} \times \vec{b}]$ записываются в виде

$$[\vec{a} \times \vec{b}]_x = a_y b_z - a_z b_y \quad \text{и т.д.}$$

Преобразование компонент вектора при переходе от одной декартовой системы координат к другой. Векторы представляют собой объекты, не зависящие от того, какую систему координат мы используем. Однако величины проекций вектора на координатные оси, конечно, зависят от направления осей. Пусть известны компоненты вектора $\vec{a}$ в одной декартовой системе координат. Как вычислить компоненты этого вектора в другой системе, повернутой относительно первой?

где B_{ji} – элементы матрицы B, обратной по отношению к матрице A:

$$B = A^{-1}, \quad A = B^{-1}.$$

Произведение обратных матриц равно единичной матрице. Это условие можно записать в виде

$$B_{ji}A_{ik} = \delta_{jk}, \quad \text{а также} \quad A_{ij}B_{jk} = \delta_{ik}. \tag{1.3}$$

Соотношения (1.2), очевидно, представляют собой разложение старых векторов базиса $\vec{e}_j$ по новым векторам базиса $\vec{e}_i{}'$. Поэтому коэффициенты B_{ji} равны косинусам углов между векторами $\vec{e}_j$ и $\vec{e}_i{}'$, то есть равны A_{ij}:

$$B_{ji} = A_{ij} \tag{1.4}$$

Таким образом, матрица B равна транспонированной матрице A и в то же время является обратной по отношению к A. Матрицы, для которых обратная матрица совпадает с транспонированной, называются ортогональными. Две повернутые относительно друг друга системы ортогональных базисных векторов связаны ортогональными матрицами. Итак, для коэффициентов A_{ij} и B_{ij} вследствие (1.3) и (1.4) верны равенства

$$A_{ij}A_{ik} = \delta_{jk}, \quad B_{ij}B_{ik} = \delta_{jk} \tag{1.5}$$

Связь между координатами точки в двух ортогональных декартовых системах с общим началом координат. Запишем выражение для радиуса-вектора, проведенного в точку пространства,

Задания для самостоятельной работы

1. Компоненты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в декартовой системе следующие (использовать номер зачетной книжки):

$\vec{a} = \{$*последняя цифра в зачетке, предпоследняя цифра в зачетке, первая цифра в зачетке*$\}$

$\vec{b} = \{$*вторая цифра в зачетке, последняя цифра в зачетке* $+3$, *предпоследняя цифра в зачетке умножить на* 6$\}$

Вычислить:

А) компоненты вектора $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Б) скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$

В) величину a_n проекции вектора $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{n}$, если $\vec{n} = (1/2)\overrightarrow{e_1} + (1/2)\overrightarrow{e_2} + (\sqrt{2}/2)\overrightarrow{e_3}$

Г) компоненты векторного произведения $\vec{a} \times \vec{b}$

Д) сумму $a_i \delta_{i2,}\ \delta_{ij,} - \text{символ Кронекера}$

Е) $a_i b_j \delta_{ij,}$

Ж) Косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$