3. Лагранжево и эйлерово описание движения

При изучении движения сплошной среды можно использовать два подхода: один из них называют лагранжевым, другой – эйлеровым.

При **лагранжевом** подходе мы интересуемся тем, что происходит с **индивидуальными** точками (частицами) среды.

При движении среды ее характеристики меняются со временем по-разному в разных индивидуальных частицах. Чтобы отличить одну индивидуальную частицу от другой, надо на них "поставить метки". Это можно сделать, например, если присвоить каждой частице свой набор из трех чисел, который играет роль "имени". Эти числа называют лагранжевыми координатами и часто обозначают буквами ξ_1, ξ_2, ξ_3. Лагранжевы координаты индивидуальной точки не меняются в процессе движения.

При лагранжевом описании все величины рассматриваются как функции лагранжевых координат (ξ_1, ξ_2, ξ_3) и времени t. В качестве ξ_1, ξ_2, ξ_3 часто используют x_{01}, x_{02}, x_{03} – значения координат точек пространства, в которых рассматриваемые индивидуальные частицы находились в начальный момент времени.

Законом движения называются функции, описывающие зависимость пространственных координат x_i индивидуальных точек от времени t.

Закон движения записывается в виде

$$x_i = f_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t), \quad i = 1,\, 2,\, 3.$$

Компоненты **скорости** $\vec{v}$ и **ускорения** $\vec{a}$ частиц сплошной среды в декартовой системе координат при лагранжевом описании вычисляются по формулам

$$v_i(\xi, t) = \frac{\partial x_i(\xi, t)}{\partial t}, \quad a_i(\xi, t) = \frac{\partial v_i(\xi, t)}{\partial t},$$

где для краткости использовано обозначение

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

При **эйлеровом** подходе мы интересуемся тем, что происходит **в точках пространства**, через которые движется среда.

Величины, характеризующие движение сплошной среды, рассматриваются при эйлеровом подходе как функции пространственных координат x_1, x_2, x_3 и времени t. Например, величина $\vec{v}(x_1, x_2, x_3, t)$ — это скорость частицы сплошной среды, которая в момент t находится в точке пространства с координатами x_1, x_2, x_3.

Индивидуальная (материальная, полная) производная по времени величины A – это скорость изменения A со временем в индивидуальной частице. Индивидуальная производная обозначается $\dfrac{dA}{dt}$. При лагранжевом описании индивидуальная производная есть просто частная производная по времени при постоянных ξ_i:

$$\frac{dA(\xi_i, t)}{dt} = \frac{\partial A(t, \xi_i)}{\partial t}.$$

При эйлеровом описании $A = A(t, x_i)$. С учетом того, что пространственные координаты индивидуальных точек меняются со временем, причем производные координат индивидуальных частиц по времени суть компоненты скорости v_i, получается следующая формула для $\dfrac{dA(t, x_i)}{dt}$:

$$\frac{dA(t, x_i)}{dt} = \frac{\partial A(t, x_i)}{\partial t} + v_1 \frac{\partial A}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial A}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial A}{\partial x_3},$$

или, в краткой записи,

$$\frac{dA(t, x_i)}{dt} = \frac{\partial A(t, x_i)}{\partial t} + v_k \frac{\partial A(t, x_i)}{\partial x_k}.$$

Здесь $v_1 = v_1(t, x_i)$, $v_2 = v_2(t, x_i)$ и $v_3 = v_3(t, x_i)$ — компоненты вектора скорости среды $\vec{v}(t, x_i)$ в системе координат x_i.

Частная производная по времени при постоянных пространственных координатах $\dfrac{\partial A(t, x_i)}{\partial t}$ называется **локальной** производной по времени. Она описывает скорость изменения A в фиксированной точке пространства; через эту точку проходят со временем разные частицы, так что при вычислении частной производной сравниваются значения A в разных частицах, находившихся в рассматриваемой точке в соответствующие моменты времени.

Ускорение $\vec{a}(t,x)$, по определению, есть скорость изменения скорости индивидуальной частицы среды. Поэтому $\vec{a}(t,x)$ вычисляется как индивидуальная производная скорости по времени. При эйлеровом описании формула для ускорения имеет вид

$$\vec{a}(t,x_i)=\frac{d\vec{v}(t,x_i)}{dt}=\frac{\partial\vec{v}(t,x_i)}{\partial t}+v_k(t,x_i)\frac{\partial\vec{v}(t,x_i)}{\partial x_k}.$$

Лагранжев и эйлеров подходы эквивалентны: если все интересующие величины заданы в рамках одного из них, то можно найти описание в рамках другого подхода.

Переход от лагранжева описания к эйлерову. Пусть некоторая величина A задана как функция лагранжевых координат:

$$A=A(t,\xi_1,\xi_2,\xi_3)$$

и требуется найти A как функцию эйлеровых (пространственных) координат. Рассмотрим закон движения

$$x_i=f_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3,t),\quad i=1,\ 2,\ 3.$$

Выразим с его помощью лагранжевы координаты ξ_i через x_i, t

$$\xi_\alpha=g_\alpha(x_1,x_2,x_3,t),\quad \alpha=1,\ 2,\ 3,$$

и подставим эти соотношения в выражение для $A(t,\xi_i)$. Получим A как функцию эйлеровых координат

$$A=A(g_1(t,x_i),g_2(t,x_i),g_3(t,x_i),t)=A(x_i,t).$$

Чтобы перейти от эйлерова описания к лагранжеву, нужно найти решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i(x_1, x_1, x_3, t), \quad i = 1,\,2,\,3, \tag{3.1}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$x_1\Big|_{t=0} = \xi_1, \quad x_2\Big|_{t=0} = \xi_2, \quad x_3\Big|_{t=0} = \xi_3.$$

Это решение $x_i = f_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$, $i = 1, 2, 3$, найденное для всевозможных значений параметров ξ_1, ξ_2, ξ_3, и есть закон движения, а ξ_1, ξ_2, ξ_3 — лагранжевы координаты частиц. Пусть B известна как функция эйлеровых координат:

$$B = B(t, x_1, x_2, x_3).$$

Подставляя в это выражение найденные зависимости $x_i = f_i(\xi_k, t)$, получим B как функцию лагранжевых переменных:

$$B(f_1(t, \xi, t), f_2(\xi, t), f_3(\xi, t)).$$

Траекторией частицы (ξ_1, ξ_2, ξ_3) называется линия, по которой движется частица. При лагранжевом описании закон движения при фиксированных ξ_i и переменном t представляет собой уравнение траектории частицы (в параметрическом виде). При эйлеровом описании траектории определяются дифференциальными уравнениями (3.1).

Линией тока называется определенная в данный момент t_1 линия, в каждой точке которой касательная направлена по вектору скорости $\vec{v}(x_i, t_1)$. Дифференциальные уравнения линии тока для момента t_1 имеют вид

$$\frac{dx_1}{v_1(x, t_1)} = \frac{dx_2}{v_2(x, t_1)} = \frac{dx_3}{v_3(x, t_1)}.$$

Установившимся, или **стационарным**, называется движение, при котором в каждой точке пространства, занятого средой, все ее характеристики не меняются со временем. При эйлеровом описании все параметры среды в этом случае не зависят явно от времени t. При установившемся движении линии тока не зависят от момента t_1 и совпадают с траекториями частиц.