

# Механика сплошных сред

Составитель асс. каф БНГС СамГТУ, магистр Никитин В.И.

## Лекция 4. Реологические модели

### Силы и напряжения в жидкостях и газах.

Движение сплошной среды, как и абсолютно твердого тела, происходит под действием сил. Но если в теоретической механике, как правило, рассматриваются сосредоточенные силы, то в механике сплошной среды, главным образом, имеют дело с распределенными силами. По характеру действия, вне зависимости от конкретной физической природы, в механике сплошной среды различают два класса сил: *массовые* и *поверхностные*.

*Массовыми* силами называют силы, величина которых пропорциональна массе среды, на которую они действуют. Примерами массовых сил могут служить гравитационные и электромагнитные силы, силы инерции. *Поверхностными* силами называют силы, величина которых пропорциональна площади поверхности, на которую они действуют. Примерами поверхностных сил могут служить силы давления и трения.

Причины, которые вызывают движение и внутренние напряжения в средах - это силы, которые можно разделить на *внутренние* и *внешние*. *Внешние силы*, по отношению к системе – те, которые вызваны другими системами, а *внутренние* – частями системы. В недеформированном теле расположение молекул соответствует состоянию его теплового равновесия. При этом все его части находятся друг с другом и в механическом равновесии. Это значит, что если выделить внутри тела какой-нибудь объем, то равнодействующая всех сил, действующих на этот объем со стороны других частей, равна нулю.

При деформировании же расположение молекул меняется и тело выводится из состояния равновесия, в котором оно находилось первоначально. В результате в нем возникают силы, стремящиеся вернуть тело в состояние равновесия. Эти возникающие при

деформировании внутренние силы называются внутренними напряжениями. Если тело не деформировано, то внутренние напряжения в нем отсутствуют.

Выделим в сплошной среде элементарную площадку  $\Delta S$  с нормалью  $\vec{n}$ , на эту площадку действует внешняя сила  $\Delta \vec{F}$ , находящейся со стороны площадки по направлению нормали (Рис 2.1.а).

На рис 2.1.б. показано разложение действующей силы на нормальную  $\Delta \vec{F}_n$  и касательную  $\Delta \vec{F}_\tau$  составляющую. Напряжение приложенной силы в точке определяется как предел отношения

$$\vec{p} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S}. \quad (2.1)$$

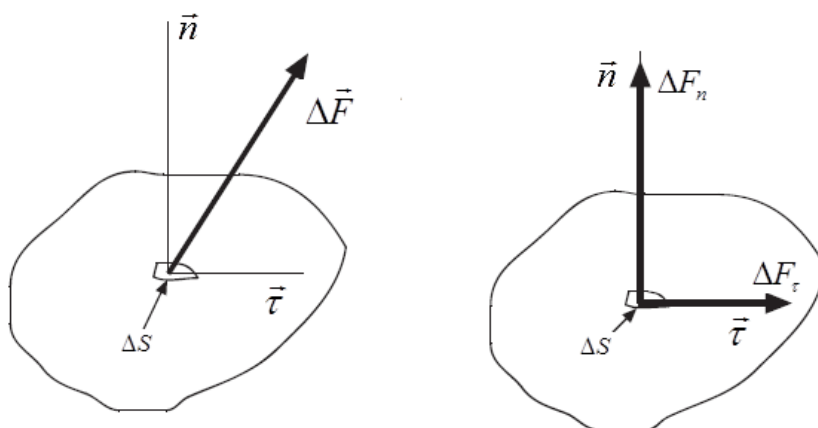


Рис 2.1. Разложение вектора напряжений на составляющие  
При этом нормальные напряжения в точке определяются как

$$p_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta S}, \quad (2.2)$$

а касательные,

$$\tau = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F_\tau}{\Delta S}. \quad (2.3)$$

Если перенести данные рассуждения на трёхмерный случай и рассмотреть элементарный объём (параллелепипед), с действующими

в нём напряжениями, то на каждой площадке параллелепипеда получим следующее разложение напряжений (Рис. 2.2.).

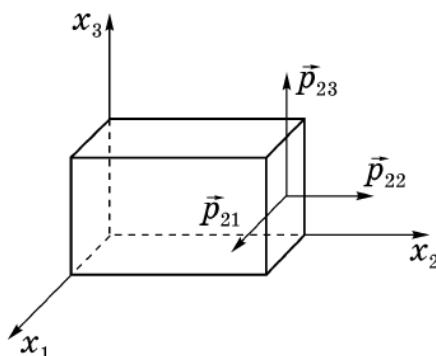


Рис.2.2. Разложение тензора напряжений на компоненты.

Компоненты  $p_{ij}$  образуют тензор второго ранга, названный *тензором напряжений*, которому можно поставить в соответствие матрицу

$$p_{ij} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -p_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Компоненты с одинаковыми индексами  $p_{ii}$  называются *нормальными напряжениями*, а компоненты  $p_{ik} (i \neq k)$  – *касательными напряжениями*, или *напряжениями сдвига*.

Многие определяющие соотношения в механике отражают связь тензора напряжений и тензора скоростей деформации, чем однозначно описывают свойства материала. Характерной чертой движения сплошной среды является ее *деформация*, т. е. изменение расстояния между отдельными точками среды. Компоненты тензора скоростей деформаций могут быть заданы следующим выражением:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right). \quad (2.5)$$

### 2.3. Давление.

Воздействие силы  $\Delta F_n$  на элементарную площадь  $\Delta S$ , заданное выражением

$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta S}, \quad (2.6)$$

назовём давлением. Причём это относится только к нормальной компоненте действующей силы и соответствует  $p_{ii}$  компонентам тензора напряжений. Измеряется давление в  $H / м^2$  или  $Па$ . Чаще всего в задачах встречаются  $кПа$  или  $МПа$ , так как давление в  $1 Па$  является достаточно маленьким.

### 3. РЕОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

*Реология* — это наука о поведении различных текучих и пластичных тел при механическом нагружении. Различают некоторое количество реологических моделей. Основной классификацией является отличие *ньютоновских* и *неньютоновских* сред. Исходные понятия реологии — *ньютоновская жидкость*, вязкость которой не зависит от режима деформирований, и *идеально упругое тело*, в котором в каждый момент времени величина деформации пропорциональна приложенному напряжению. Эти понятия были обобщены для тел, проявляющих одновременно пластичные (вязкостные) и упругие свойства. Практические приложения реологии описывают поведение конкретных материалов при нагрузках и при течении.

*Вязкость* - это свойство реальных жидкостей оказывать сопротивление перемещению одного слоя жидкости относительно другого. При перемещении одних слоев реальной жидкости относительно других возникают силы внутреннего трения, направленные по касательной к поверхности слоев. Действие этих сил проявляется в том, что со стороны слоя, движущегося быстрее, на слой, движущийся медленнее, действует ускоряющая сила. Со стороны же слоя, движущегося медленнее, на слой, движущийся быстрее, действует тормозящая сила.

Среды, для которых в рамках поставленной задачи пренебрегают вязкостью – называют *идеальными*.

### 3.1. Ньютоновская жидкость.

Рассмотрим течения реальных сред между неограниченными параллельными поверхностями. Пусть нижняя плоскость находится в состоянии покоя, а верхняя движется с постоянной скоростью  $w_0$ , тогда профиль скоростей будет таким, как показано на Рис 2.1. Что означает, что согласно условию прилипания – скорость частиц находящихся на неподвижной стенке равна нулю, а частицы находящиеся на подвижной плоскости – перемещаются с постоянной скоростью  $w_0$  – со скоростью стенки. При наличии прилипания от сил трения возникает напряжение, обусловленное сопротивлением скольжению слоев среды, движущихся с различными скоростями.

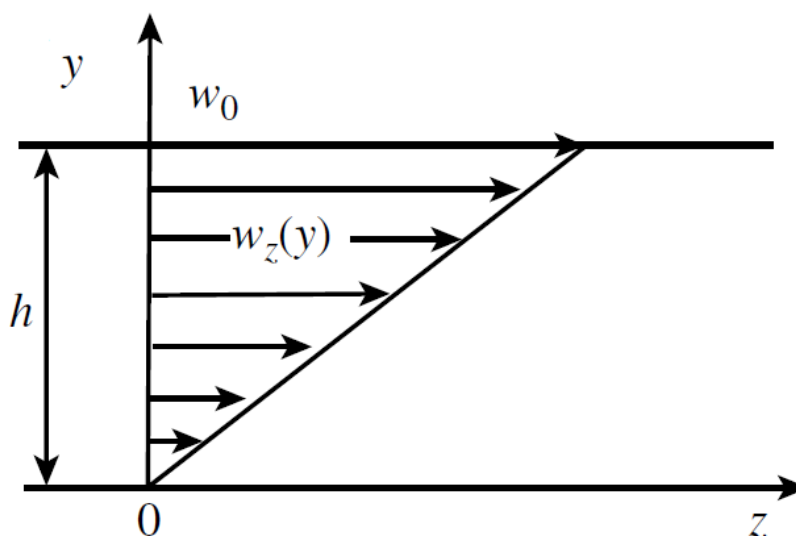


Рис.3.1. Течение между неограниченными параллельными плоскостями

Экспериментально установлено, что в средах, названных вязкими жидкостями, напряжение от сил трения между пластинами определяется формулой Ньютона:

$$\tau = \mu \frac{\partial w_z}{\partial y}, \quad (3.1)$$

где  $\mu$  - динамическая вязкость - параметр, не зависящий от скорости деформации и являющийся функцией температуры и состава (и давления для газов). Также существует понятие кинематического коэффициента вязкости, определяемого как:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (3.2)$$

Среды, для которых справедлива формула Ньютона (2.1), называются ньютоновскими или вязкими средами.  $\tau$  – касательное (внутреннее) напряжение или напряжение сдвига. Касательные являются компонентами тензора напряжений и содержатся во втором слагаемом правой части его разложения (2.4).

*Реологическими уравнениями* называют уравнения связывающие тензор напряжений и тензор скоростей деформаций, т.о.  $\frac{\partial w_z}{\partial y}$  является одной из компонент *тензора деформаций* (2.5).

Графики, соответствующие реологическим уравнениям, называются *реологическими кривыми*, выражающими связь между напряжением сдвига и скоростью сдвига

Модуль *силы внутреннего трения*  $F$  вычисляется как

$$F = \mu \left| \frac{\partial w_z}{\partial y} \right| S. \quad (3.3)$$

Сила внутреннего трения тем больше, чем больше рассматриваемая площадь поверхности слоя  $S$ , и зависит от того, насколько быстро меняется скорость течения жидкости при переходе от слоя к слою.

Величина  $\frac{\partial w_z}{\partial y}$  показывает, как быстро меняется скорость при переходе от слоя к слою в направлении, перпендикулярном направлению движения слоев, и соответствует *градиенту скорости* в соответствующем направлении.  $\frac{\partial w_z}{\partial y}$  принято называть *скоростью сдвига*. Ее можно рассматривать как темп изменения скорости с расстоянием между движущимися слоями. В общем пространственном случае течения неньютоновской жидкости вместо градиента скорости принято записывать *скорость деформации*  $\dot{\gamma}$ :

$$\frac{\partial w_z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \dot{\gamma}. \quad (3.4)$$

К ньютоновским жидкостям относятся пресная и морская вода, дизельное топливо, минеральные и синтетические масла, т.е. те жидкости, которые используются в качестве основы большинства буровых растворов. В этих жидкостях напряжение сдвига прямо пропорционально скорости сдвига, как показано на рис. 3.2. Точки лежат на прямой, которая проходит через начало прямоугольной системы координат (0,0). Вязкость ньютоновской жидкости — это угол наклона данной прямой.

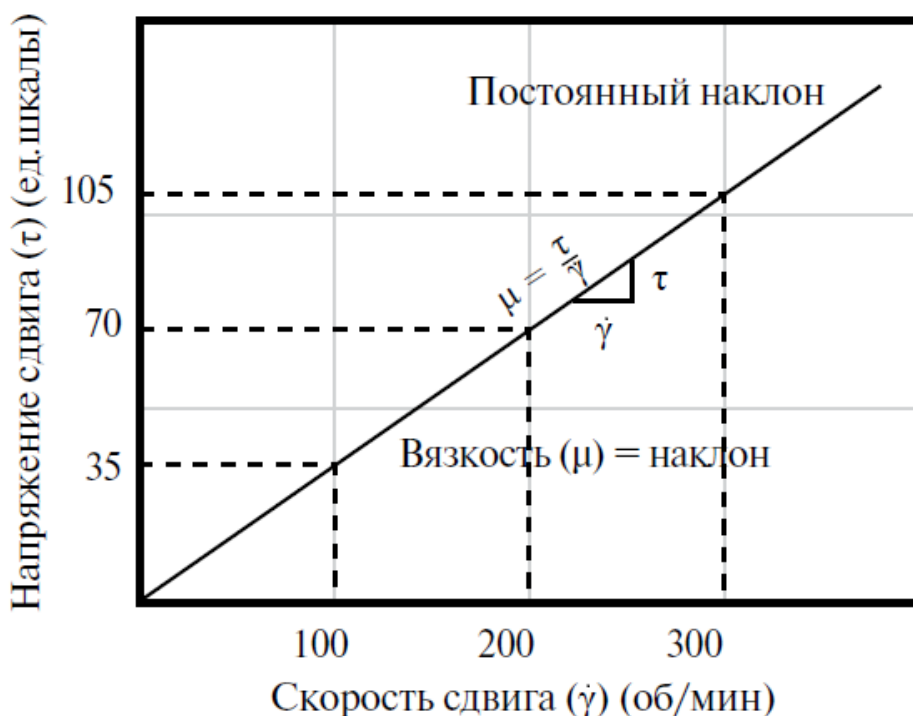


Рис.3.2. Реологическая кривая для ньютоновской среды

Если угол наклона реологической кривой обозначить за  $\alpha$ , то динамическая вязкость:

$$\mu = \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\tau}{\dot{\gamma}}. \quad (3.5)$$

Для измерения вязкости рассмотрим длинный вращающийся цилиндр внутри неподвижного цилиндра, как показано на рис 3.3. Согласно закону ньютона (3.1):

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial r} = \mu \frac{R\omega}{h}. \quad (3.6)$$

Известно, что момент представляет собой произведение силы на плечо, тогда крутящий момент можно связать с напряжением сдвига следующим образом:

$$M = \tau SR = \tau(2\pi RL)R = 2\pi\mu \frac{R^3 L \omega}{h}, \quad (3.7)$$

где  $L$  - длина цилиндра.

Таким образом, из уравнений (3.6) и (3.7) определяется коэффициент  $\mu$ . Приборы для измерения вязкости называются *вискозиметрами*.

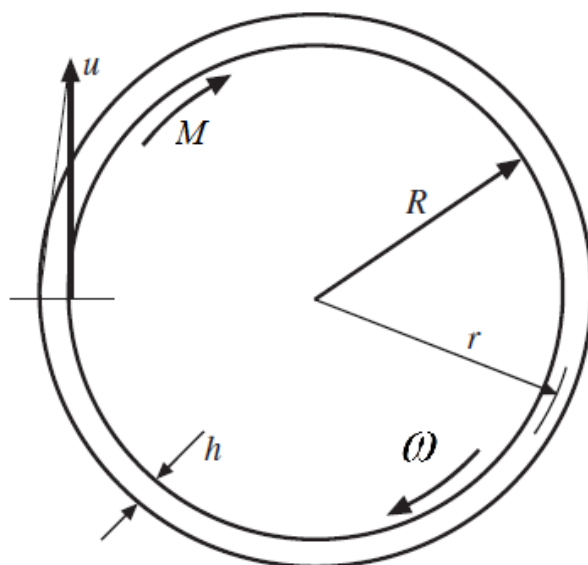


Рис.3.3. Движение вращающегося цилиндра внутри неподвижного цилиндра:  $u$  - скорость на ободе цилиндра,  $\omega$  - угловая скорость цилиндра (скорость вращения),  $h$  - расстояние между стенками,  $M$  - момент.

*Идеальной жидкостью (газом)* называется изотропная сплошная среда, в которой отсутствуют касательные напряжения, то есть  $\tau_{ij} (i \neq j) = 0$ . При этом нормальные напряжения являются сжимающими и их величина зависит только от точки сплошной среды и не зависит от направления. В модели идеальной среды пренебрегают вязкими эффектами.

### 3.2. Вязкопластические жидкости (Тела Шведова).

*Вязкопластичные жидкости (ВПЖ, тела Шведова)* - неньютоновские жидкости, имеющие предел текучести (начальное напряжение сдвига  $\tau_0 \neq 0$ ), имеющие в своём составе



высокомолекулярные соединения и характеризующиеся уменьшением наблюдаемой (*локальной, кажущейся, эффективной*) вязкости с возрастанием скорости деформации.

Для вязкопластичных жидкостей характерно наличие начального нелинейного участка зависимости  $\tau = f(\partial\dot{\gamma}/\partial t)$  с последующим спрямлением зависимости. При наличии ярко выраженного линейного участка зависимости напряжения сдвига от скорости деформации уравнение течения имеет вид:

$$\tau = \tau_0 + \eta\dot{\gamma}, \quad (3.8)$$

где  $\tau_0$  - динамическое напряжение сдвига,  $\eta$  - пластическая вязкость. К вязкопластичным жидкостям относятся глинистые растворы цементные растворы" с добавками, торфяная масса и т.п.

Характерной чертой поведения ВПЖ является наличие предела упругости (начального напряжения сдвига), после превышения которого структура жидкости разрушается. Нелинейный, математически не описываемый участок зависимости можно объяснить расплетением и выравниванием длинных молекул (например, карбоксиметилцеллюлозы, природных полимеров бентонита, желатины и др.) вдоль линий тока. Диссипация энергии при этом уменьшается.

По достижении некоторого критического значения скорости деформации, зависимость  $\tau = f(\partial\dot{\gamma}/\partial t)$  становится линейной, т.е. поведение ВПЖ в дальнейшем похоже на поведение ньютоновской жидкости с предельным значением коэффициента вязкости  $\eta$ . Экстраполяция линейного участка зависимости до пересечения с осью ординат отсекает на ней отрезок  $\tau_0$ , характеризующий так называемое динамическое напряжение сдвига, величину которого непосредственно экспериментально определить невозможно. В отличие от динамического коэффициента вязкости, коэффициент пластической (структурной) вязкости  $\eta$  у большинства веществ константой не является.

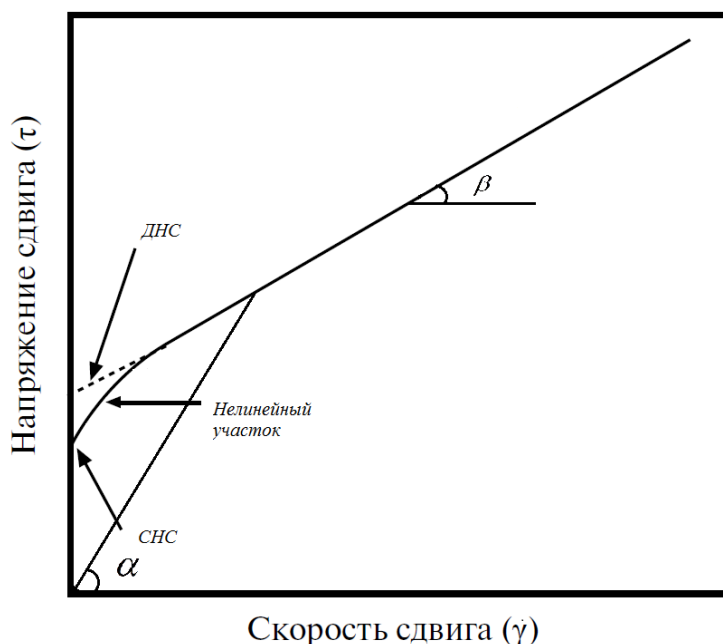


Рис. 3.4. Реологическая кривая для ВПЖ

Для определения вязкости неньютоновской жидкости при определенной скорости сдвига используется «эффективная вязкость». Эффективная вязкость неньютоновской жидкости зависит от скорости сдвига и для каждого значения определяется как тангенс угла наклона прямой, проведенной из начала координат к соответствующей точке кривой (Рис. 3.4.):

$$\mu_{эф} = tg(\alpha), \eta = tg(\beta). \quad (3.9)$$

Большинство неньютоновских жидкостей разжижаются при сдвиге, их эффективная вязкость снижается при увеличении скорости сдвига.

### 3.3. Бингамовские жидкости.

Бингамовские жидкости (Бингама тела) - неньютоновские жидкости, имеющие предел текучести (начальное напряжение сдвига  $\tau_0 \neq 0$ ) и линейную зависимость  $\tau = f(\partial\dot{\gamma}/\partial t)$ . Бингамовским жидкостям свойственно сохранение структуры (неподвижность) вплоть до достижения напряжения, равного начальному напряжению сдвига.

Под действием напряжений, превышающих предел текучести, структура резко разрушается, и жидкость течёт до некоторой степени подобно ньютоновской жидкости. Такое поведение тел Бингама

можно объяснить тем, что их структурными элементами являются твёрдые частицы различной формы и им не нужно выстраиваться вдоль линий тока (строго говоря, бывают частицы похожие на спички, иглы, спицы и им будет естественно выстраиваться вдоль линий тока; диссипация энергии при этом уменьшится, жидкость станет анизотропной и на кривой течения может проявиться начальный нелинейный участок). С увеличением скорости деформации наблюдаемая (эффективная, локальная, кажущаяся, действующая) вязкость тел Бингама уменьшается. Примеры Бингамовских жидкостей: буровые растворы, шламы, масляные краски, зубные пасты, сточные грязи и т.п. Реологическая кривая имеет вид подобный кривой для ВПЖ, но с отсутствием нелинейного участка. Так как буровой раствор часто описывают моделью Бингамовской жидкости, то рассмотрим реологическую кривую, построенную на основании измерений произведённых двухскоростным вискозиметром (Рис.3.5).

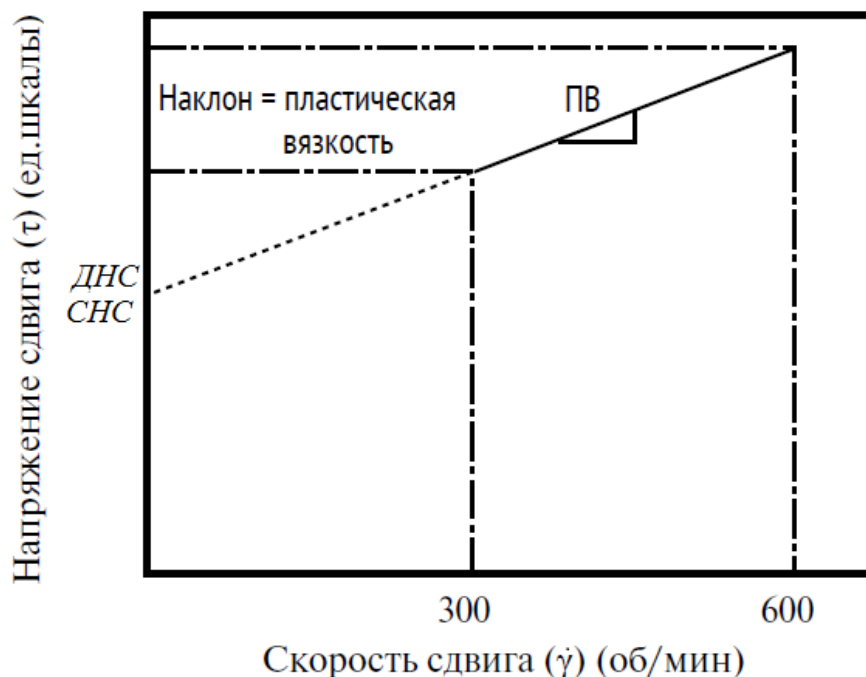


Рис.3.5. Реологическая кривая для Бингамовской жидкости

Следует отметить, что при работе с моделью Бингама, начальные СНС и ДНС будут равны, т.е.  $\tau_0 = \tau_o$ . Поэтому для модели данного типа начальное напряжение сдвига называют динамическим

напряжением сдвига или напряжением сдвига при нулевой скорости сдвига. Особенности состава и строения тел Шведова и тел Бингама являются причиной их поведения при деформировании существенно отличающегося от поведения ньютоновских жидкостей и некоторых неньютоновских. К особенностям состава относятся присутствие высокомолекулярных соединений (тела Шведова) и твердых частиц (тела Бингама). Особенностью строения является взаимодействие высокомолекулярных соединений и твердых частиц друг с другом и с молекулами растворителя, следствием которого является образование пространственной структуры, более или менее жесткой. При попытке деформирования тела Шведова и тела Бингама сопротивляются сдвигу до преодоления предела упругости. После разрушения структуры деформирование тел Бингама происходит по линейному закону, а у тел Шведова вначале наблюдается нелинейный участок выравнивания длинных молекул полимера вдоль линий тока, после чего деформация также происходит по линейному закону. Другими словами, уравнения течения тел Шведова и тел Бингама при скоростях деформации в технологических процессах имеют одинаковый вид линейный вид.

Не лишнее отметить, что при анализе течения интерес представляют не деформации (которые очень велики), а скорости деформации, т.е. скорости течения. Скорость деформации пропорциональна действующим напряжениям, а деформация увеличивается пропорционально времени и сохраняется после устранения напряжений.

Особенности состава и строения тел Шведова и Бингама приводят к особенностям их течения. В области структурного течения (т.е. при частичном сохранении первичной структуры) в центре потока наблюдается ядро потока, движущееся как твердое тело, и периферийная область, где скорости частиц жидкости уменьшаются от скорости движения ядра потока до нуля на стенке (Рис.3.6.). Соотношение размеров ядра потока и периферийной

области и характер изменения скоростей частиц в ней как раз и определяются законами течения тел Шведова и Бингама.

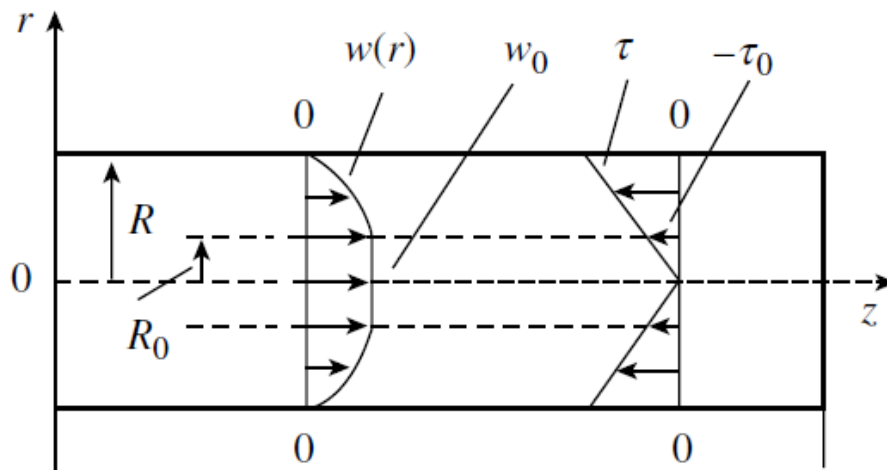


Рис.3.6. Течение неньютоновской жидкости в трубе при образовании ядра потока

Модель Бингама достаточно хорошо описывает реальные буровые жидкости. При необходимости повышения точности модели можно также пользоваться степенными реологическими законами, которые позволяют учесть нелинейное поведение среды.

### 3.4. Степенные модели.

Модель степенного закона сложнее, чем Бингамовская модель вязкопластичной жидкости в том смысле, что она не принимает линейное соотношение между напряжением и скоростью сдвига, как показано на Рис.3.7.

Реологическое уравнение степенного закона записывается как:

$$\tau = K\dot{\gamma}^n, \quad (3.10)$$

где  $K$  – коэффициент консистенции,  $n$  – показатель степенной зависимости (показатель нелинейности). Значение показателя  $n$  указывает на степень неньютоновского поведения жидкости в данном диапазоне скоростей сдвига. Чем меньше  $n$ , тем больше истончается жидкость под воздействием сдвига в данном диапазоне скоростей сдвига и тем менее нелинейным является график зависимости напряжения сдвига от скорости сдвига, как показано на Рис.3.8.

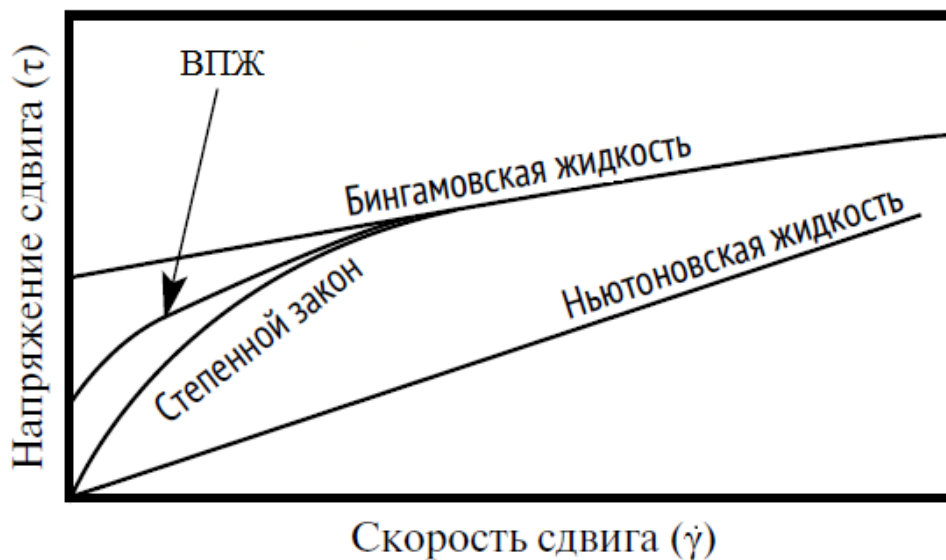


Рис.3.7. Сравнение степенной модели с ВПЖ и Бингамовской

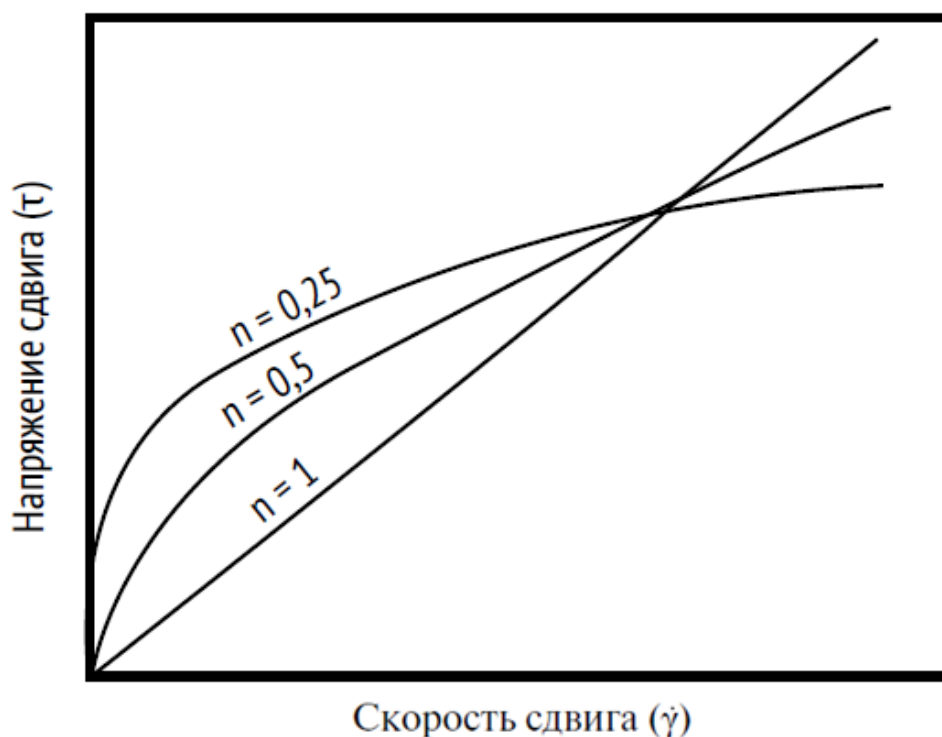


Рис.3.8. Влияние показателя степенной зависимости на вид реологической кривой

В зависимости от значения  $n$  можно выделить три различных типа реологического поведения жидкости:

1.  $n < 1$ : жидкость «разжижается» при сдвиге (*псевдопластические жидкости*); неньютоновская;
2.  $n = 1$ : жидкость ньютоновская  $\Rightarrow K = \mu$ ;

3.  $n > 1$ : так называемая *дилатантная* жидкость; загустевает при сдвиге.

На Рис.3.9. изображены реологические кривые, соответствующие различным классификациям жидкостей, поведение которых можно описать при помощи степенного закона.



Рис.3.9. Реологические кривые, соответствующие различным классификациям жидкостей

Воздействие  $n$  на реологический профиль и профиль скорости очень важно для разжижающихся при сдвиге, неньютоновских, жидкостей. По мере того как профиль скорости становится более плоским (Рис.3.10), скорость жидкости будет выше на большей площади кольцевого пространства, что значительно повышает качество очистки ствола скважины. Это одна из причин, по которой растворы с низким значением  $n$ , обеспечивают такое высокое качество очистки ствола скважины.

Степенная модель имеет преимущества в учёте нелинейных составляющих, но она недостаточно хорошо реологические свойства буровых растворов при низких скоростях сдвига, прежде всего потому, что не предсказывает существование характерного для буровых растворов предела текучести. Для учета напряжения, необходимого для инициации движения жидкости (предела текучести) можно использовать модифицированный степенной закон,

или модель Гершеля-Балкли. Математически модель Гершеля-Балкли записывается следующим образом:

$$\tau = \tau_0 + K\dot{\gamma}^n \quad (3.11)$$

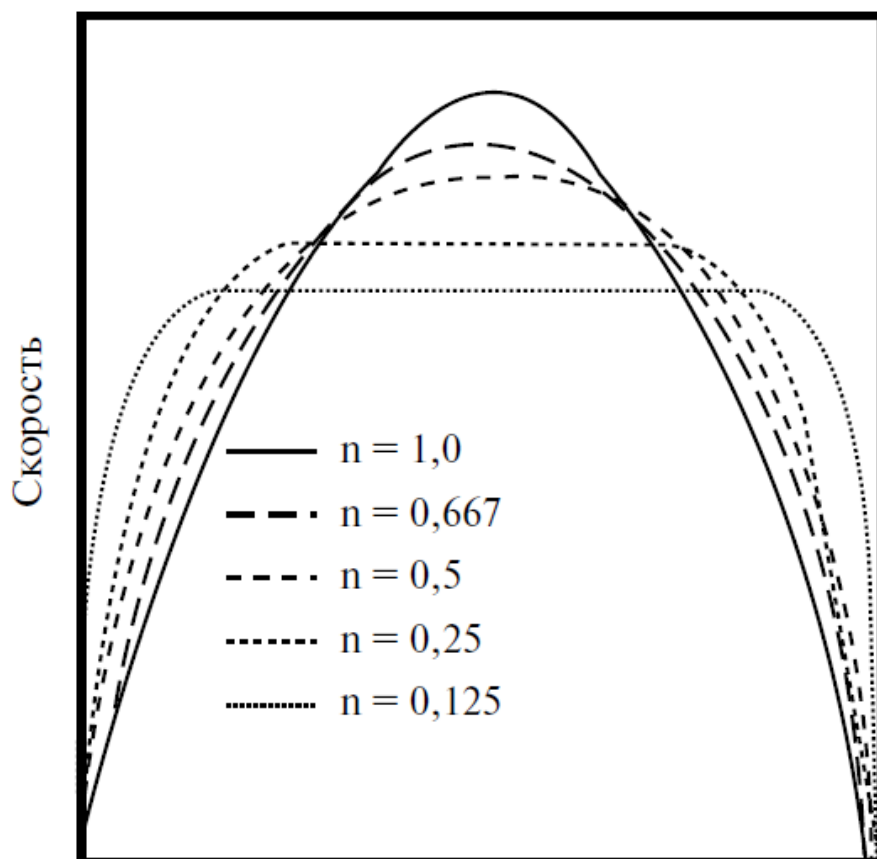


Рис.3.10. Зависимость профиля скорости от показателя степени

Сравнение моделей представлено на Рис.3.11. Модифицированный степенной закон находится между моделью Бингама (вверху) и степенным законом (внизу). Модифицированный степенной закон является более сложной моделью, чем модель Бингама или степенной закон. Однако он точнее отражает истинные реологические свойства большинства буровых растворов:



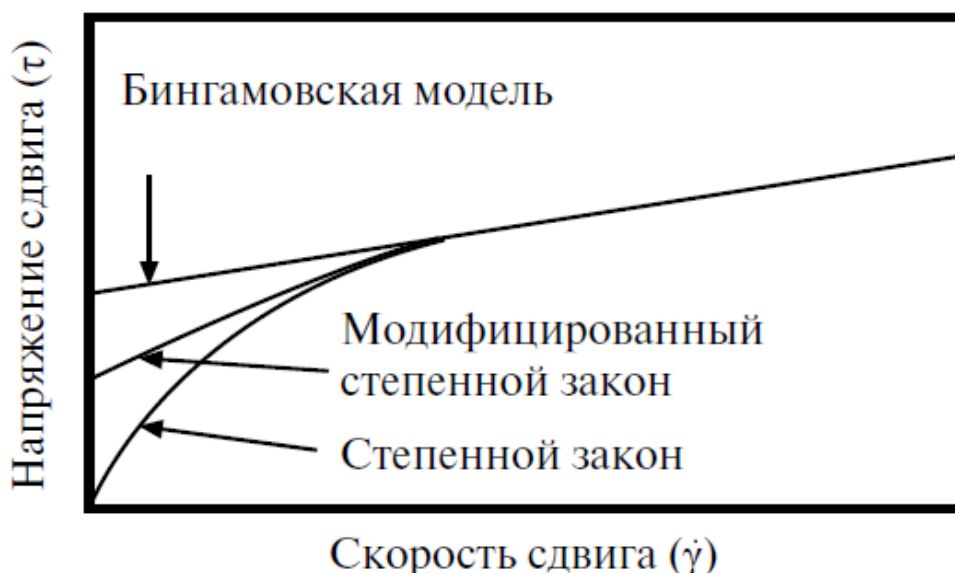


Рис.3.11. Сравнение реологических кривых для Бингамоской, степенной и Гершеля-Балкли модели

**Важное замечание.**

Для всех реологических моделей, рассмотренных в данной теме, знак, стоящий перед коэффициентом вязкости либо «+», либо «-». В части современной литературы знак минус подразумевается. В зависимости от сущности задачи и метода её решения он либо учитывается либо нет. Таким образом, знак «минус» обусловлен отрицательным значением градиента скорости, т.е. количество движения (импульс) передаётся от слоёв жидкости движущихся с большей скоростью, к слоям жидкости, движущимся с меньшей скоростью.

$$\dot{\gamma} > 0 \Rightarrow "+", \quad \dot{\gamma} < 0 \Rightarrow "-"$$
(3.12)

**Вопросы и задания.**

1. Что изучает реология, как наука?
2. Что такое вязкость?
3. Какую реологическую классификацию сред вы знаете?
4. Перечислите известные вам реологические модели.
5. Зависимость каких физических величин отражают реологические кривые?

6. Запишите реологические уравнения для разных моделей и изобразите кривые им соответствующие.
7. Приведите примеры реальных жидкостей для различных реологических моделей.
8. Тела Шведова и Бингама. В чём отражается общее описание и различия?
9. Что такое ядро потока?
10. В чем преимущество степенных моделей?