Механика сплошных сред

Составитель асс. каф БНГС СамГТУ, магистр Никитин В.И.

Лекция 2. Теория подобия. π –теорема

1.3. Теория подобия. π –теорема.

Одно из фундаментальных свойств природных, технологических, многих экономических и социальных объектов – симметрия (*подобие, повторяемость, воспроизводимость*) – находит свое отражение в их математических моделях. Наличие какого-либо вида симметрии у изучаемого явления означает большую простоту объекта в сравнении с его менее симметричным аналогом. На этом основываются широко применяемые методы упрощения математических моделей и, следовательно, методы упрощения их анализа. Они состоят в понижении порядка системы уравнений, образующих модель, в уменьшении числа переменных, от которых зависят искомые величины, или числа постоянных параметров, определяющих процесс, и т.д. Инвариантность явлений и процессов по отношению к изменению единиц измерения находит свое воплощение в так называемой π – теореме (читается: "пи-теорема").

В конкретных теоретических и экспериментальных исследованиях, как правило, проблема сводится к отысканию (одной или нескольких) предполагаемых зависимостей (функций)вида

$$x = f\left(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k, x_{k+1} \ldots, x_n\right), \qquad (1.6)$$

Здесь x — определяемая физическая величина, которая в данном исследовании ищется, $x_1, \ldots, x_n$ — величины, от которых искомая величина x зависит, среди них одни могут быть постоянными в данном явлении, другие — переменными; все они называются определяющими параметрами или аргументами искомой функции размерности f.

Найдем теперь структуру функции f при предположении, что эта функция выражает собой некоторую физическую закономерность — закон, не зависящий от выбора систем единиц измерения.

Разбиение аргументов на две группы в (1.6) сделано следующим образом: первые k величин $x_1, x_2, x_3, ..., x_k$ $(k \le n)$ имеют независимые размерности (число основных единиц измерения должно быть больше или равно k, и среди механических величин обычно имеется не более трех с независимыми размерностями), а размерности остальных параметров $x_{k+1} ..., x_n$ зависимы от них, то есть выражаются в виде произведений степеней от размерностей параметров $x_1, x_2, x_3, ..., x_k$:

$$\begin{gathered}[x_{k+1}] = [x_1]^{\alpha_{k+1}} \ldots [x_k]^{\gamma_{k+1}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [x_{k+i}] = [x_1]^{\alpha_{k+i}} \ldots [x_k]^{\gamma_{k+i}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [x_n] = [x_1]^{\alpha_n} \ldots [x_k]^{\gamma_n}\end{gathered} \qquad (1.7)$$

Если размерности всех определяющих параметров независимы, то $k = n$; если все определяющие параметры безразмерны, то $k = 0$. Таким образом, $0 \le k \le n$.

Т.е. в зависимости вида $x = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_k, x_{k+1} ..., x_n)$, зависимыми параметрами являются $x, x_{k+1} ..., x_n$, а следовательно можно составить $m = (n - k + 1)$.

Вернувшись к первоначальной зависимости (1.6) показать от противного, опираясь на предполагаемую зависимость (1.6), что размерность определяемой величины x должна обязательно выражаться через размерности определяющих параметров первой группы $x_1, x_2, x_3, ..., x_k$:

$$[x] = [x_1]^{\alpha} \dots [x_k]^{\gamma} \tag{1.8}$$

Заменим теперь в (1.6) параметры с зависимыми размерностями $x, x_{k+1} ..., x_n$ через безразмерные величины $\pi, \pi_{k+1} \pi_n$, определив их выражениями

$$\pi = \frac{x}{x_1^{\alpha} \dots x_k^{\gamma}}, \pi_{k+1} = \frac{x_{k+1}}{x_1^{\alpha_{k+1}} \dots x_k^{\gamma_{k+1}}}, \dots,$$
$$\pi_{k+i} = \frac{x_{k+i}}{x_1^{\alpha_{k+i}} \dots x_k^{\gamma_{k+i}}}, \dots, \pi_n = \frac{x_n}{x_1^{\alpha_n} \dots x_k^{\gamma_n}}. \tag{1.9}$$

Тогда вместо (1.6) с учетом (1.8), (1.9) получим:

$$\pi = \frac{1}{x_1^{\alpha} \dots x_k^{\gamma}} f\left(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, x_1^{\alpha_{k+1}} \dots x_k^{\gamma_{k+1}} \pi_{k+1}, \dots, x_1^{\alpha_n} \dots x_k^{\gamma_n} \pi_n\right), \tag{1.10}$$

Или в других обозначениях

$$\pi = F\left(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, \pi_{k+1}, \dots, \pi_n\right), \tag{1.11}$$

Теперь покажем, что функция F от параметров $x_1, x_2, x_3, ..., x_k$ на самом деле не зависит. Очевидно, значения величин $\pi, \pi_{k+1}, ..., \pi_n$ вообще не зависят от выбора систем тех единиц измерения, через которые выражаются k размерно независимых величин $x_1, x_2, x_3, ..., x_k$. Далее можно показать, что всегда можно перейти к такой системе единиц измерения в данном классе, что любой из параметров с независимыми размерностями $x_1, x_2, x_3, ..., x_k$, например x_1, изменится в произвольное число раз, а остальные размерные параметры $x_2, x_3, ..., x_k$ останутся неизменными (например при переходе из СГС в СИ или обратно). При таком переходе, как было сказано выше, останутся неизменными также и безразмерные аргументы $\pi, \pi_{k+1}, ..., \pi_n$ в функции (1.11) и ее значение π. Но отсюда следует, что функция F в действительности от аргумента x_1 не зависит. Аналогично показывается, что она не зависит и от аргументов $x_2, x_3, ..., x_k$, поэтому вместо (1.11) будем иметь

$$\pi = \Phi(\pi_{k+1}, ..., \pi_n), \qquad (1.12)$$

а сама искомая зависимость (1.6) примет вид: $\pi = f/(x_1^\alpha \dots x_k^\gamma)$, то есть

$$x = f(x_1 \dots x_n) = x_1^\alpha \dots x_k^\gamma \, \Phi\left(\frac{x_{k+1}}{x_1^{\alpha_{k+1}} \dots x_k^{\gamma_{k+1}}}, ..., \frac{x_n}{x_1^{\alpha_n} \dots x_k^{\gamma_n}} \right) = \qquad (1.13)$$
$$= x_1^\alpha \dots x_k^\gamma \, \Phi(\pi_{k+1}, ..., \pi_n)$$

Иными словами, *число аргументов в искомой зависимости (1.6), записанной в безразмерном виде (1.12), сокращается на число, равное числу определяющих параметров с независимыми размерностями.* Этот общий вывод и составляет главное содержание анализа размерностей, известное в научной литературе как $\pi-$*теорема*. В нем, собственно, и заключается источник полезных приложений метода теории размерностей к исследованию физических задач.

Сделаем два дополнительных замечания к П-теореме.

1. Анализ размерностей не дает в общем случае способа определения функции Ф в (1.12) или (1.13) от n - k аргументов, которая в случае k = n превращается в константу. Для окончательного установления искомой зависимости (1.13) на этом этапе необходимо обращаться либо к эксперименту, либо к теории, решая соответствующую математическую задачу.
2. Основным и первоначальным этапом в постановке задач является выбор модели и схематизация свойств искомого решения. Если задача сформулирована как математическая (имеются система уравнений, начальные и краевые условия, дополнительные условия на искомое решение), то всегда легко выписать полную таблицу аргументов в искомых функциях вида (1.6). Опыт показывает, что схематизация и отыскание рациональной постановки задачи и указание существенных определяющих параметров представляют собой наибольшие из всех трудностей при применении анализа размерностей для решения задач. Не пропустить важные

определяющие параметры и не включать в этот список малосущественные параметры — вот что здесь главное. Само использование рецептуры анализа размерностей ($\pi-$*теоремы*) просто.

<u>*Примечание*</u> Если в (1.6) x и аргументы функции f представлены независимыми размерностями, то определить связь между параметрами методами анализа размерностей не представляется возможным. Также важно отметить, что в части литературы зависимость вида (1.6) представляют со смещенными индексами, например $x_1 = f(x_2, x_3, ..., x_n)$, тогда формулировка $\pi-$*теоремы* представляется в следующем виде:

Пусть имеется функциональная связь

$$x_1 = f(x_2, x_3, ..., x_n), \tag{1.14}$$

где $n-$общее количество переменных. Пусть эта связь не зависит от выбора системы единиц измерения (величина x_1 – искомая, а остальные – задаваемые). Из них k переменных являются независимыми, т.е. первичными. Тогда можно составить $m=(n-k)$ безразмерных комбинаций (групп), таких, что исходная зависимость f будет эквивалентна зависимости между k безразмерными величинами

$$\pi_1 = F(\pi_2, ...\pi_k). \tag{1.15}$$

Основной смысл $\pi-$теоремы состоит в том, что всякое физическое соотношение между размерными величинами можно сформулировать как соотношение между безразмерными величинами. Этот факт лежит в основе теории подобия, играющей важную роль в механике сплошной среды.

Пример.

При медленном стационарном движении сферы в вязкой жидкости величина сопротивления F зависит от вязкости μ жидкости, скорости v и радиуса r сферы. Т.е. известно что

$$F = f(\mu, v, r).$$

Установить зависимость между переменными.

Решение.

Проанализируем размерности: $n = 4$,

$$[F] = [MLT^{-2}], \quad [r] = [L], \quad [v] = [LT^{-1}], \quad [\mu] = [ML^{-1}T^{-1}]$$

Независимых величин $k = 3$, следовательно можно составить 1 безразмерную комбинацию:

Выберем в качестве величин с независимыми переменными, μ, v, r, тогда безразмерная комбинация всех переменных будет следующая:

$$\frac{F}{\mu v r} = const,$$

а следовательно, $F = const \cdot \mu v r$. Экспериментальным путём доказано, что константа $const = 6\pi$, что подтверждается гидродинамическим решением данной задачи.

Вопросы и задания.

1. Основное положение метода анализа размерностей?
2. Чем полезен анализа размерностей при решении физических задач?
3. Если сила, длина и время выбраны в качестве основных единиц измерения, то какую размерность будет иметь масса?
4. Используя $\pi -$теорему сгруппируйте в безразмерную величину плотность, скорость, диаметр и динамическую вязкость.
5. Можно ли при решении задач осуществлять переход от размерных единиц к безразмерным? Возможен ли обратный переход?