

# Механика сплошных сред

Составитель асс. каф БНГС СамГТУ, магистр Никитин В.И.

## Лекция 1. АНАЛИЗ РАЗМЕРНОСТЕЙ

### 1.1. Исторический очерк.

Анализ размерностей возник как результат естественного распространения на физические явления понятий геометрического подобия, отношения и пропорции, знакомых еще грекам. Так, Дж. Фурье (1768—1830) упоминал, что греки знали размерности площади и объема. Сам Фурье впервые установил, что существуют определенные основные единицы измерения, относительно которых каждая физическая величина имеет определенные размерности, которые надо записывать как показатели степеней основных единиц измерения.

Еще Г. Галилей (1564—1642) с помощью анализа размерностей впервые пришел к выводу, что величина безопасной нагрузки на единицу объема обратно пропорциональна длине, и предвосхитил многие другие классические результаты в механике. Затем анализ размерностей применяли Э.Д. Мариотт (1620—1684) и И. Ньютон (1643—1727). Дж.У. Рэлей (1842—1919) всегда ссылался на подобие и динамическое сходство. Позже анализ размерностей с успехом использовали в разных областях науки.

Идеи, лежащие в основе анализа размерностей, по сути очевидны и просты и покоятся на физических законах (связи между физическими величинами), они не зависят от произвола в выборе основных единиц измерения. Из этой идеи на основе простых рассуждений и применения простого математического аппарата

можно вывести важное следствие: функции, выражающие физические закономерности, должны обладать некоторым фундаментальным свойством, которое в математике называется обобщенной однородностью или симметрией. Это свойство позволяет записать искомые закономерности в безразмерном виде, инвариантном относительно выбора систем единиц измерения, с меньшим числом аргументов (уже безразмерных) и тем самым упростить их (закономерностей) нахождение. □

## 1.2. Основные термины.

*Первичная величина* - физическая величина, которая вводится для данного класса явлений безотносительно к другим величинам и численное значение которой определяется посредством прямого измерения (при этом единица измерения выбирается произвольно).

*Вторичная величина* - физическая величина, которая выражается через первичные по определению (на основе физических представлений, законов, т.е. определяющих уравнений).

*Единица измерения* - физическая величина, принятая по соглашению в качестве основы (стандарта) для сравнения всех однородных (т.е. имеющих одну и ту же физическую природу) величин. Единицы измерения физических величин подразделяются на *основные* и *производные*.

*Основная единица измерения* - единица измерения *первичной величины*, то есть единица измерения вводимая из опыта с помощью природных или искусственных эталонов. Так, например, для изучения механических движений известными способами вводятся первичные, или основные, единицы измерения, такие, как длина, время и масса, причем здесь имеется определенный произвол. Так,

для описания тех же механических явлений можно принять эталоны для силы, длины и времени.

*Производная единица измерения* - единица измерения *вторичной величины*, выражаемая через основные единицы с помощью *формулы размерности*. Определение физической величины всегда указывает способ ее измерения, по крайней мере мысленный. Так, плотность, согласно определению, представляет собой отношение массы к величине заключающего ее объема.

*Система единиц* - совокупность основных единиц измерения, построенная на основе определенных единиц для величин, принятых в качестве первичных. Система единиц включает в себя количество единиц достаточное для измерения параметров (характеристик) рассматриваемого класса явлений. В различных областях науки и техники выгодно и удобно выбирать в качестве первичных единиц измерения свои местные системы первичных единиц измерения. Поэтому возникает задача о переходе из одной системы единиц к другой. Так, для измерения характеристик механических явлений до сих пор употребительна в теоретических исследованиях система CGS (СГС: сантиметр-грамм-секунда). В этой системе в качестве первичных единиц измерения приняты сантиметр, грамм и секунда. Производными в системе CGS являются  $см./с.$  (скорость),  $г./см^3$  (плотность).

Другой системой единиц измерения является система MKS, в которой в качестве основных приняты метр, килограмм-сила (кгс) и секунда. Здесь единица силы (кгс) представляет собой силу, сообщаемую массе, равной массе эталона килограмма, ускорение,

равное  $9,80665 \text{ м./с}^2$ . С 1960 года употребляется также Международная система единиц СИ (System International d'Unites), в которой основными единицами измерения являются метр, килограмм-масса и секунда.

Можно усмотреть, что системы единиц CGS и СИ принадлежат к одному и тому же классу систем, система MKS — к другому. *Классом систем единиц измерения* называется совокупность систем единиц измерения, различающихся между собой только величиной, но не физической природой основных единиц измерения.

Таким образом, мы видим, что единицы измерения не являются застывшей системой — всякий новый успех в развитии техники измерений, равно как и открытие новых явлений, может вести к переопределению основных единиц измерения. Неоднократно предлагались другие системы, использование которых оказывалось удобным для определенного круга задач. Так, в астрономии удобно вводить единицу длины, называемую астрономической единицей (а.е.), которая является внесистемной единицей длины и равна среднему расстоянию от Земли до Солнца:

$$1 \text{ а.е.} = 1,49\,597\,870 \cdot 10^8 \text{ км. } (\pm 2 \text{ км.})$$

Таким образом, не существует лучшей или основной системы единиц измерения.

Выражение производной единицы измерения через основные единицы измерения называется ее *размерностью*. *Размерность* выражает качественную сущность физической величины, измеренной с помощью данной системы единиц измерения, и получается автоматически из определения этой величины. Для обозначения

размерности физических величин вводят символы. В системе CGS и СИ символы единиц измерения для основных физических величин будут:  $L$  для единицы длины,  $T$  для единицы времени и  $M$  для единицы массы. Размерность некоторой физической величины  $f$  принято по предложению Максвелла обозначать через  $[f]$ . Важно подчеркнуть, что размерность определяется классом систем единиц измерения и в разных классах систем измерения размерность одной и той же физической величины будет различна. Так, например, размерность силы  $F$  в классе  $MLT$  будет  $[F] = MLT^{-2}$ , а в классе MKS  $[F] = K$ . Таким образом *функция размерности* для какой либо физической величины  $\varphi$  представляет собой степенной одночлен, например в системе СГС или СИ функция размерности будет иметь вид:

$$[\varphi] = M^\alpha L^\beta T^\gamma, \quad (1.1)$$

где аргументы  $L, T, M$  выступают как положительные числа, которые можно перемножать или делить. Величины, численное значение которых одинаково во всех системах единиц измерения внутри данного класса, называются *безразмерными*, то есть для таких величин показатели  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ . Очевидно, что размерность безразмерной величины равна единице, а показатель степени равен 0. Все остальные величины называются *размерными*. *Размерная величина* - величина, численное значение которой зависит от выбора основных единиц измерения, показатель степени не равен нулю.

Говорят, что набор величин  $x_1, x_2, \dots, x_k$  имеет *независимые размерности*, если размерность ни одной из этих величин нельзя

представить в виде произведения степеней размерностей остальных величин. Например, размерности плотности  $[\rho] = ML^{-3}$ , ускорения  $[a] = LT^{-2}$  и силы  $[F] = MLT^{-2}$  *независимы*; размерности длины  $[l] = L$ , скорости  $[v] = LT^{-1}$  и ускорения  $[a] = LT^{-2}$  *зависимы*, так как между размерностями этих последних величин имеет место соотношение  $[l][a] = [v^2]$ .

Механика жидкости и газа использует физические величины. Есть основные величины, через которые выражаются все остальные. Например, сила может быть выражена из второго закона Ньютона

$$F = ma. \quad (1.2)$$

Проанализируем размерность параметров, входящих в это выражение в системе  $M$  (масса),  $L$  (длина),  $T$  (время):

$$[F] = \left[ M \frac{L}{T^2} \right]. \quad (1.3)$$

Таким образом, видно, что сила может быть записана через массу, длину и время. Единицей силы принято считать Ньютон,

$$[H] = \left[ \text{кг} \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right]. \quad (1.4)$$

В системе СИ, массу всегда измеряют в килограммах, а силу в Ньютонах. Вес тела измеряется тоже в Ньютонах

$$P = mg. \quad (1.5)$$

Ускорение свободного падения принято считать  $g = 9.81 \text{ м/с}^2$ . Вообще, эта величина не является константой. На поверхности Земли она принимает значения от  $9.77 \text{ м/с}^2$  на высокой горе и до  $9.83 \text{ м/с}^2$  в океанской впадине.

Наиболее часто используемые приставки СИ (десятичные приставки), указаны в таблице 1.1. Приложения 1. Десятичные приставки служат для сокращения количества нулей в численных значениях физических величин. Основные величины указаны в таблице 1.2. (Приложение 1), в Приложении 2 указаны производные единицы, используемые в механике жидкости и газа.

В нефтегазовой отрасли часто используются американские нефтепромысловые единицы измерения. Однако при проведении инженерных расчётов по всему миру часто используются единицы метрической системы. Переводные коэффициенты для этих двух систем представлены Приложении 3.

*Анализ размерностей* - метод нахождения связи между физическими величинами, существенными для исследуемого процесса или явления, основанный на анализе размерностей величин. Основное положение метода – любое уравнение должно быть размерно однородным.

*Метод размерностей* - метод определения числа и структуры безразмерных степенных комплексов, построенных из величин, существенных для данного процесса, на основе сопоставления размерностей этих величин.