В.И. Никитин

КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Учебное пособие
для студентов заочной формы обучения

Самара 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Аппроксимация. Методы точной интерполяции

Слово «аппроксимация» происходит от латинского approximo — приближаюсь. Аппроксимировать – это означает приближенно заменить. Задачи интерполяции возникают при обработке результатов экспериментов, когда измерения какой-либо величины выполнены в конечном числе точек. Требуется найти промежуточные значения этой функции. Это так называемая задача о восстановлении функции. Кроме того, при проведении расчетов сложные функции удобно заменять (аппроксимировать) алгебраическими многочленами или другими элементарными функциями, которые достаточно просто вычисляются (задача о приближении функции). Методы интерполяции используются для приближенного интегрирования и решения дифференциальных уравнений, а также являются основой компьютерной графики и других современных цифровых технологий.

1.1. Постановка задачи интерполяции

На интервале $[a,b]$ заданы точки x_i, $i=1,...,N$; $a \le x_i \le b$, и значения неизвестной функции в этих точках $f(x_i)=f_i$, $i=1,...,N$. Требуется найти функцию $F(x)$, принимающую в точках x_i те же значения f_i. Точки x_i будем называть *узлами интерполяции*, а условия $F(x_i)=f_i$ – *условиями интерполяции*. При этом $F(x)$ будем искать только на отрезке $[a,b]$. Если необходимо найти функцию вне отрезка, то такая задача называется задачей *экстраполяции*. Мы будем рассматривать только задачи *интерполяции*.

Поставленная задача имеет много решений, т.к. через заданные точки (x_i, f_i), $i=1,...,N$, можно провести бесконечно много кривых, каждая из которых будет графиком функции, для которой выполнены все условия интерполяции. Для практики важен случай аппроксимации функции многочленами, т.е. выражениями вида $F(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_mx^m$, где a_i – постоянные коэффициенты.

Все методы интерполяции можно разделить на *локальные* и *глобальные*. В случае локальной интерполяции на каждом интервале $[x_i, x_{i+1}]$ строится отдельный полином. В случае глобальной интерполяции отыскивается единый полином на всем интервале $[a, b]$. При этом искомый полином называется *интерполяционный полиномом*.

1.2. Кусочно-постоянная интерполяция

При кусочно-постоянной интерполяции интерполяционный многочлен на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ равен константе, а именно, левому или правому значению функции.

Для левой кусочно-постоянной интерполяции $F(x) = f_i$, если $x_i \le x < x_{i+1}$, т.е.

$$F(x) = \begin{cases} f_1, & x_1 \le x < x_2 \\ f_2, & x_2 \le x < x_3 \\ \dots \\ f_{N-1}, & x_{N-1} \le x < x_N \end{cases} \tag{1.1}$$

Для правой кусочно-постоянной интерполяции $F(x) = f_{i+1}$, если $x_i < x \le x_{i+1}$, т.е.

$$F(x) = \begin{cases} f_1, & x_0 < x \le x_1 \\ f_2, & x_1 < x \le x_2 \\ \dots \\ f_N, & x_{N-1} < x \le x_N \end{cases} \tag{1.2}$$

Легко понять, что при таком выборе функции условия интерполяция выполняются. Однако, построенная функция является разрывной, что ограничивает ее применение. Графическое представление для кусочно-постоянной интерполяции можно увидеть на рис. 1.1.

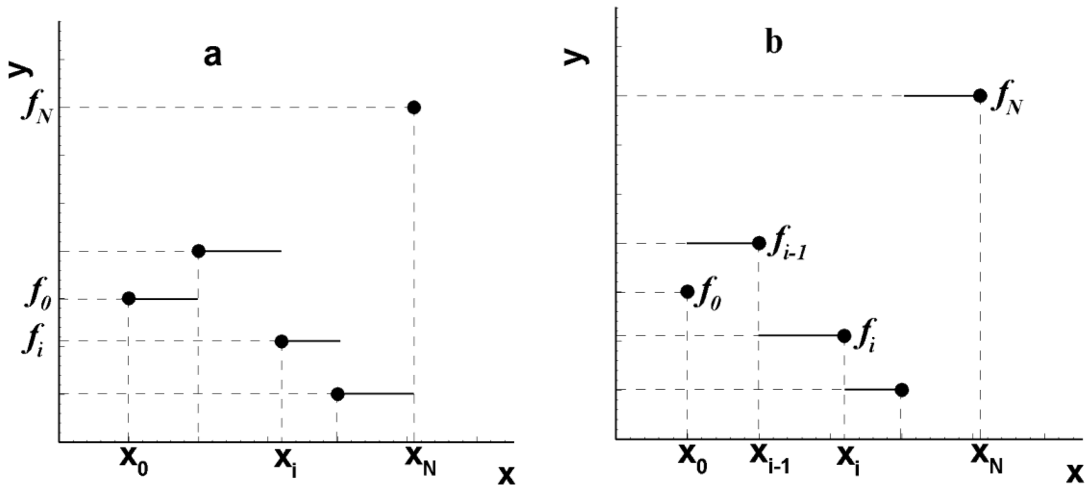

Рис. 1.1. Левая (а) и правая (б) кусочно–постоянная интерполяци

1.3. Кусочно-линейная интерполяция

На каждом интервале $[x_i, x_{i+1}]$ интерполирующая функция является линейной $F_i(x) = k_i x + l_i$. Значения коэффициентов k_i и l_i находятся из выполнения условий интерполяции на концах отрезка $[x_i, x_{i+1}]$: $F_i(x_i) = f_i$, $F_i(x_{i+1}) = f_{i+1}$. С помощью этих условий получаем систему уравнений:

$\begin{cases} k_i x_i + l_i = f_i \\ k_i x_{i+1} + l_i = f_{i+1} \end{cases}$, откуда находим $k_i = \dfrac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}$, $l_i = f_i - \left(\dfrac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}\right) x_i$. Следовательно, функцию $F(x)$ можно записать в виде:

$F(x) = \dfrac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) + f_i$, если $x_{i-1} \le x \le x_i$, т.е.

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f_1, \quad x_1 \le x \le x_2, \\ \dfrac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2}(x - x_2) + f_2, \quad x_1 \le x \le x_2 \\ \dots \\ \dfrac{f_N - f_{N-1}}{x_N - x_{N-1}}(x - x_N) + f_N, \quad x_{N-1} \le x \le x_N \end{cases}. \tag{1.3}$$

При использовании линейной интерполяции сначала нужно определить интервал, в который попадает x, а затем подставить его в формулу. Итоговая функция является непрерывной, но ее производная разрывна в каждом узле интерполяции. Погрешность такой интерполяции будет меньше, чем в случае кусочно-постоянной интерполяции. Иллюстрация кусочно-линейной интерполяции приведена на рис. 1.2.

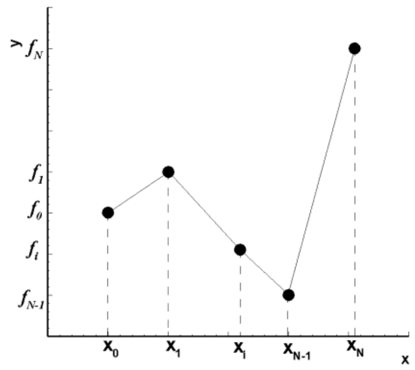

Рис. 1.2. Кусочно-линейная интерполяция

ПРИМЕР 1 (построение кусочно-постоянной и кусочно-линейной интерполяции)

Заданы значений некоторой функции:

x	0	2	3	3,5
f	-1	0.2	0,5	0,8

Требуется найти значение функции при $z=1$ и $z=3{,}2$ при помощи кусочно-постоянной и кусочно-линейной интерполяции.

Решение.

Точка $z=1$ принадлежит первому отрезку $[0{,}2]$, т.е. $i=1$ и, следовательно, по формулам левой кусочно-постоянной интерполяции $F(0)=f_1=-1$, по формулам правой кусочно-постоянной интерполяции $F(2)=f_2=0{,}2$. Теперь воспользуемся формулами кусочно-линейной интерполяции:

$$k_1=\frac{f_2-f_1}{x_2-x_1}=\frac{0{,}2+1}{2}=0{,}6\,,\ l_1=f_1-\left(\frac{f_2-f_1}{x_2-x_1}\right)x_1=0{,}2-\frac{1{,}2}{2}2=-1,$$

Интерполирующая функция на интервале $0\le x\le 2$ получилась $F(x)=0{,}6x-1$ *(проверьте основное условие интерполяции самостоятельно)* и тогда $F(1)=0{,}6\cdot 1-1=-0{,}4$.

Точка $z=3{,}2$ принадлежит третьему интервалу $3\le x\le 3{,}5$, т.е. $i=3$ и, следовательно, по формулам левой кусочно-постоянной интерполяции

$F(3{,}2) = f_3 = 0{,}5$, по формулам правой кусочно-постоянной интерполяции $F(3{,}2) = f_4 = 0{,}8$. Воспользуемся формулами кусочно-линейной интерполяции:

$$k_3 = \frac{f_4 - f_3}{x_4 - x_3} = \frac{0{,}8 - 0{,}5}{3{,}5 - 3} = 0{,}6, \qquad l_3 = f_3 - \left(\frac{f_4 - f_3}{x_4 - x_3}\right)x_3 = 0{,}8 - 0{,}6 \cdot 3{,}5 = -1{,}3,$$

Следовательно, при $3 \le x \le 3{,}5$ $F(x) = 0{,}6x - 1{,}3$ тогда $F(3{,}2) = 0{,}6(3{,}2) - 1{,}3 = 0{,}62$.

1.4. Глобальная интерполяция. Канонический полином

В случае глобальной интерполяции отыскивается единая интерполирующая функция на всем интервале $[a, b]$. Самым распространенным способом является полиномиальная интерполяция.

Канонический полином

Будем искать интерполирующую функцию в виде полинома (многочлена) m-ой степени $P_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$. Какова должна быть степень многочлена, чтобы удовлетворить всем условиям интерполяции? Допустим, что заданы две точки: (x_0, f_0) и (x_1, f_1), т.е. $N = 1$. Через эти точки можно провести единственную прямую, т.е. интерполирующей функцией будет полином первой степени $P_1(x) = a_0 + a_1 x$. Через три точки ($N = 2$) можно провести параболу $P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ и т.д. Рассуждая таким способом, можно предположить, что искомый полином должен иметь степень N.

Для того, чтобы доказать это, выпишем систему уравнений на коэффициенты. Уравнения системы представляют собой условия интерполяции при каждом $x = x_i$:

$$\begin{cases} P_N(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 + \ldots + a_N x_1^N = f_1 \\ P_N(x_2) = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3 + \ldots + a_N x_2^N = f_2 \\ \ldots \\ P_N(x_N) = a_0 + a_1 x_N + a_2 x_N^2 + a_3 x_N^3 + \ldots + a_N x_N^N = f_N \end{cases} \tag{1.4}$$

Данная система является линейной относительно искомых коэффициентов $a_0, a_1, a_2, .., a_N$. Известно, что СЛАУ имеет решение, если ее определитель отличен от нуля.

Таким образом, нахождение полинома сводится к решение системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $a_0, a_1, a_2, .., .a_N$.

Решить систему можно в матричном виде. В матричном виде система имеет вид: $Xa = f$, где X – матрица коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), f – известный вектор из постановки задачи, $a = (a_0, a_1, a_2, .., .a_N)$ - вектор переменных (неизвестных). Решение данной системы можно найти используя обратную матрицу, X^{-1}, тогда $a = X^{-1} f$.

2. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ

2.1. Корреляция

Корреляционный анализ - статистический метод, позволяющий выявить силу или тесноту линейной связи между двумя и более случайными величинами. Корреляционный анализ занимает промежуточное положение между собственно статистическими методами анализа и методами математического моделирования. Корреляционный анализ - совокупность основанных на математической теории корреляции методов обнаружения функциональной зависимости между случайными величинами или признаками.

В отличие от тех статистических методов, предметом которых являются выборки, характеризующие один признак совокупности, предметом корреляционного анализа являются выборки, характеризующие два и более признака. Это могут быть пары случайных величин: y и x.

Корреляция - вероятностная или статистическая зависимость между двумя и более случайными величинами. Корреляционная связь повсеместно встречается в задачах анализа и обработки экспериментальных данных. Поскольку результаты экспериментов по своей природе являются случайными величинами, и содержат в себе погрешности измерений, то функциональная связь, которая соответствует физическому процессу «ухудшается» за счёт случайных воздействий.

Функциональная зависимость – однозначное соответствие элементов из области исходных значений в область значений выходных параметров. Примером графика строго функциональной зависимости является линейная функция $y = bx$, график которой изображен на рис.2.1.

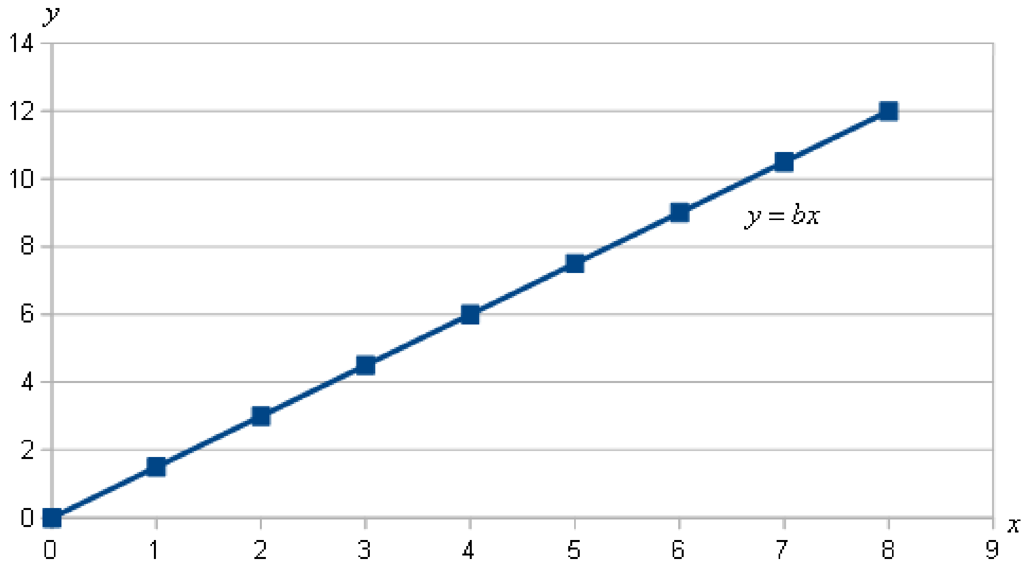

Рис.2.1. Функциональная зависимость $y = bx$

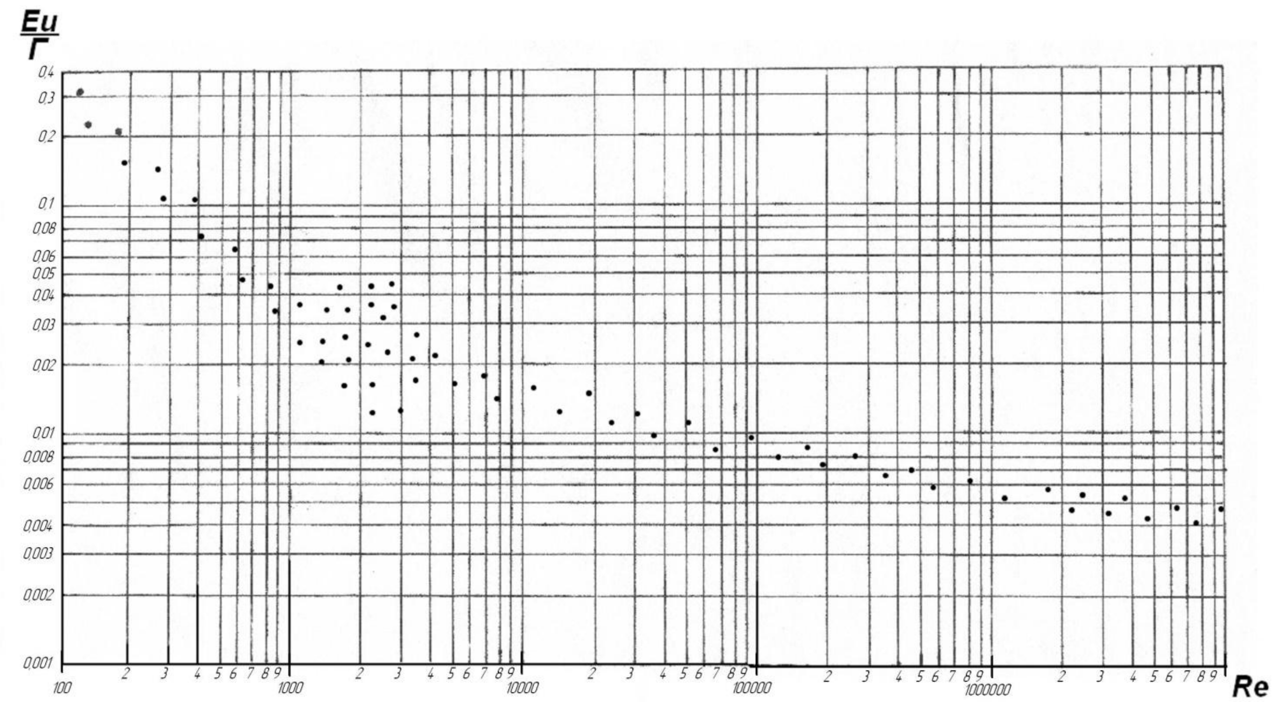

Рис. 2.2. Пример экспериментальной зависимости.

При работе с экспериментальными данными погрешности измерений могут быть абсолютно разными для разных физических процессов. Пример корреляционной связи из задачи гидродинамики представлен на рис. 2.2. Для аппроксимации экспериментальных точек функцией необходимо изначально установить наличие существования зависимости между имеющимися величинами. Для этого необходимо воспользоваться методами корреляционного анализа.

Зачастую исследователь располагает только таблицей результатов эксперимента. Эту таблица корректно назвать - *корреляционной таблицей*. *Корреляционная таблица* - таблица экспериментальных данных или результатов наблюдений, подготовленная для построения графика, предварительного анализа и численной обработки.

Корреляционное поле - система координат *y-x* с нанесёнными на координатную плоскость двумерных выборочных точек. Корреляционное поле, по существу, график экспериментальной зависимости $y=f(x)$.

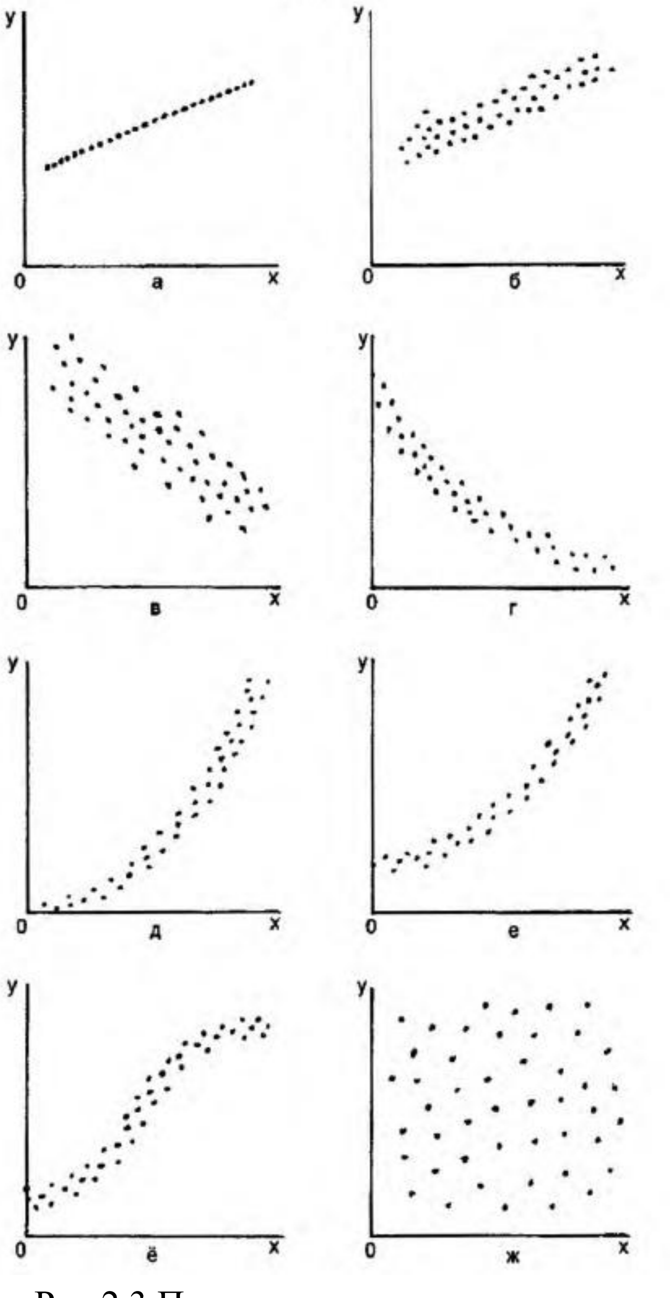

Рис.2.3.Примеры корреляционного поля

В ряде случаев корреляционную зависимость можно зафиксировать визуально, построив корреляционное поле. Визуальная оценка корреляционных полей, представленных на рис.2.3. даёт следующие результаты: а)- почти функциональная зависимость, линейная возрастающая, так как большинство точек ложатся на одну прямую; б) – линейная зависимость видна, строгое возрастание параметра *y* при росте параметра *x;* в) – линейная убывающая, очевидно, что погрешность эксперимента больше чем в б); г) – погрешность эксперимента не велика, но видна тенденция к нелинейной связи убывающей; д), е)- нелинейная возрастающая связь; ё) – нелинейная связь, возрастающая; ж) – линейной связи не наблюдается. При малых погрешностях измерений наличие зависимости очевидно. Значения величины *y* монотонно убывает или возрастает при изменении величины *x.* При изучениях процессов в сложных условиях, при наличии значительных погрешностей измерений корреляционную связь сложно установить при помощью визуальной оценки. В таком случае прибегают к вычислению *коэффициента корреляции*.

2.2. Коэффициент корреляции. Определение силы линейной связи между случайными величинами.

Количественной характеристикой силы или тесноты *линейной связи* между случайными величинами является коэффициент корреляции. Например, характеристикой связи случайных величин *y* и *x* является безразмерный *коэффициент корреляции*. На практике вычисляют выборочный коэффициент корреляции и с его помощью дают оценку силы линейной связи между величинами. Формула для вычисления выборочного коэффициента корреляции:

$$r_{xy} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{\left[n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right] \cdot \left[n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right]}}, \qquad (2.1)$$

где n- обьём выборки.

Число степеней свободы υ для найденного таким путём коэффициента корреляции r_{xy} равно $\upsilon = n - 2$, поскольку вычисление $\bar{x}, \bar{y}$ соответствует наложению на выборку двух связей.

Коэффициент корреляции характеризует не всякую зависимость, а только линейную. Линейная вероятностная зависимость случайных величин заключается в том, что при возрастании одной случайной величины другая имеет тенденцию возрастать или убывать по линейному закону. Коэффициент корреляции характеризует степень тесноты линейной зависимости. Если случайные величины x и y связаны точной линейной функциональной зависимостью $y = b_0 + b_1 x$, то $r_{xy} = \pm 1$. В общем случае, когда величины x и y связаны произвольной вероятностной зависимостью, коэффициент корреляции может иметь значение в пределах $-1 < r_{xy} < 1$, причем чем ближе коэффициент корреляции к 1 или -1 тем сильнее линейная зависимость. Для независимых случайных величин r_{xy} близок к 0.

Иллюстрации примеров возрастающей и убывающей зависимости приведен на рис.2.4.

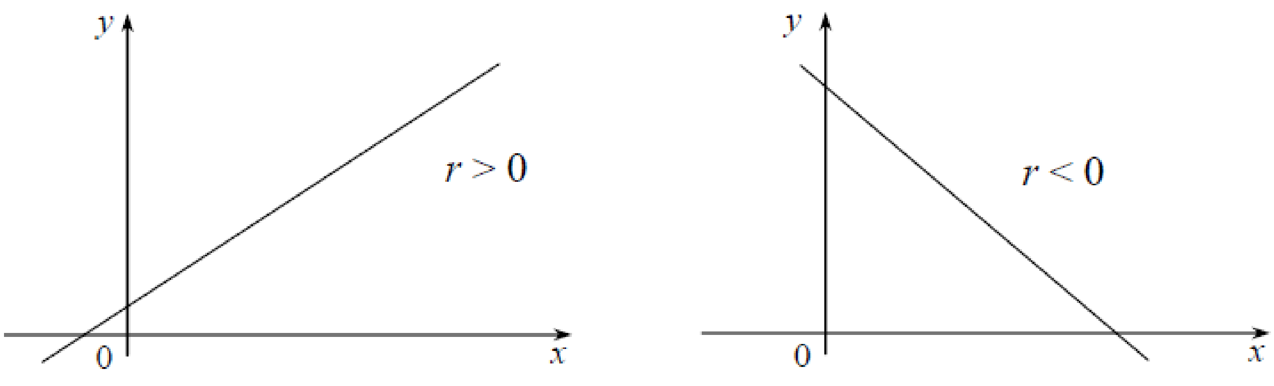

Рис. 2.4. Примеры возрастающей и убывающей линейной зависимости.

В таблице 1. Показана оценка силы линейной связи по коэффициенту корреляции

Теснота связи	Коэффициент корреляции	
	Возрастающая	Убывающая
Линейной связи нет	[0;0.2)	(-0.2;0]
Слабая	[0.2,0.5)	(-0.5;-0.2]
Средняя	[0.5;0.75)	(-0.75;-0.5]
Сильная	[0.75;0.95)	(-0.95;0.75]
Почти функциональная	[0.95;1)	(-1;-0.95)
Функциональная	1	-1

Таблица 1. Оценка силы корреляционной связи.

2.2. Проверка гипотезы о значимости коэффициента корреляции

Наличие или отсутствие линейной связи между случайными величинами *x* и *y* проверяется с помощью коэффициента корреляции r_{xy}. Нулевая гипотеза предполагает, что две переменные независимы и любое ненулевое значение r_{xy} возникло из-за случайных флуктуаций, т.е.

$$H_0 : r_{xy} = 0 \tag{2.2}$$

Другими словами, нулевая гипотеза H_0 является гипотезой об отсутствии различия между коэффициентом корреляции r_{xy} и нулём.

Альтернативной гипотезой будет неравенство:

$$H_0 : r_{xy} \neq 0 \tag{2.3}$$

Правило. в соответствии с которым принимается или отклоняется нулевая гипотеза, заключается в сравнении некоторого комплекса физических величин, вычисленного по данным выборки, с подобным комплексом, вычисляемым независимым путём. Первый называется *опытным критерием*, последний - *статистическим критерием* (табличным критерием). В нашем случае статистическим критерием является опытный критерий Стьюдента, вычисляемый по результатам эксперимента по формуле:

$$t^{on} = \frac{r_{xy}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{xy}^2}}. \qquad (2.2)$$

Для принятия гипотезы о значимости коэффициента корреляции необходимо принимать допустимую вероятность ошибочно принять или отвергнуть истинную гипотезу. Вероятность допущения ошибки называется уровнем значимости α и равняется $\alpha = 1 - P$, где P-доверительная вероятность. Таким образом, критическое значение критерия Стьюдента необходимо принимать в соответствии с принимаемым уровнем значимости α и числа степеней свободы исследуемого параметра. В данном случае исследуемым параметром является коэффициент корреляции r_{xy} ,для которого число степеней свободы равно $\upsilon = n - 2$. Если $t^{on} < t_{\upsilon}^{\alpha}$,то принимается нулевая гипотеза, если $t^{on} > t_{\upsilon}^{\alpha}$, то альтернативная.

ПРИМЕР 2 (Определение силы линейной связи для парной зависимости)

Для результатов экспериментов, представленных таблицей значений *y* и *x* определить силу линейной зависимости. Провести проверку нулевой гипотезы для коэффициента корреляции.

x	2	4	6	8	10	12	14	16	18
y	4	6.5	5	7	9	7.5	11	9.5	11.5

Решение

Удобно вычислять коэффициент корреляции, используя вспомогательные таблицы. Рекомендуется использование электронных таблиц семейства Microsoft Office. Пример расчётной таблицы в программе Excel представлен в таб.2 . Корреляционное поле представлено на рис.2.5. При визуальной оценке корреляционного поля видна возрастающая зависимость *y* от *x*. Коэффициент корреляции $r_{xy} = 0.914217$ подтверждает наличие положительной линейной связи.

Согласно с таб.1. наблюдается сильная линейная связь между случайными величинами *y* и *x*.

Для надежности и теоретического подтверждения полученного результата необходимо проверить нулевую гипотезу $H_0 : r_{xy} = 0$, изложенную в пункте 2.3. Для этого вычислим опытный критерий Стьюдента по формуле (2.2).

$$t^{on} = \frac{r_{xy}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{xy}^2}} = \frac{0.914217\sqrt{9-2}}{\sqrt{1-(0.914217)^2}} = 5.968$$

Критическое значение двустороннего критерия Стьюдента берется из табл. Приложения 1, для числа степеней свободы $\upsilon = n-2 = 7$ и уровня значимости $\alpha = 0.05$. Табличное значение: $t_7^{0.05} = 2.365$

n	*x*	*y*	*x**x*	*y**y*	*x**y*	
1	2,00	4,00	4	16	8	
2	4,00	6,50	16	42,25	26	
3	6,00	5,00	36	25	30	
4	8,00	7,00	64	49	56	
5	10,00	9,00	100	81	90	
6	12,00	7,50	144	56,25	90	
7	14,00	11,00	196	121	154	
8	16,00	9,50	256	90,25	152	
9	18,00	11,50	324	132,25	207	
Суммы	90,00	71,00	1140,00	613,00	813,00	
					r=	0,914217

Таблица 2. Пример расчетной таблицы для вычисления коэффициента корреляции в Microsoft office – Excel

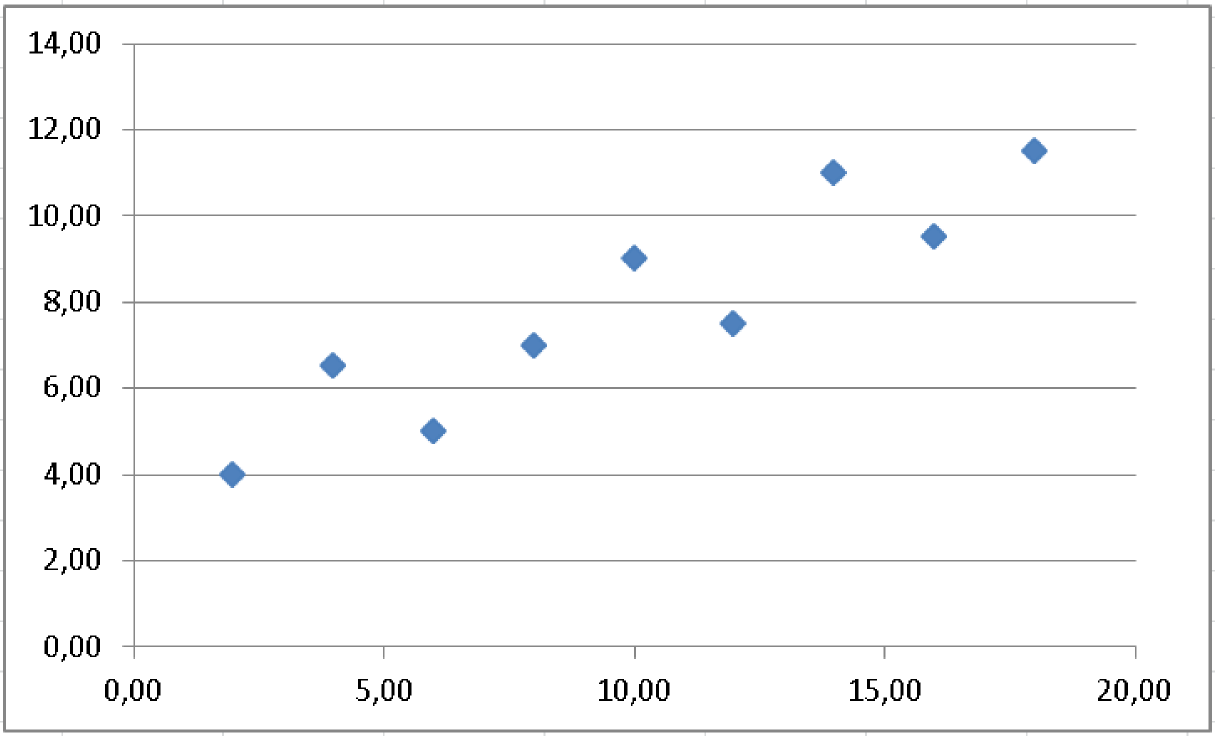

Рис. 2.5. Корреляционное поле

Поскольку опытный критерий Стьюдента больше табличного, $t^{on} = 5.968 > t_7^{0.05} = 2.365$, то гипотеза об отсутствии линейной связи между случайными величинами у и х отклоняется и принимается альтернативная – линейная зависимость между случайными величинами y и x с доверительной вероятностью $P = 0.95$.

3. ПОДБОР ЭМПИРИЧЕСКИХ ФОРМУЛ

3.1. Приближенная интерполяция

При интерполировании функций мы использовали условие равенства значений интерполяционного полинома и данной функции в узлах интерполяции. Если же исходные данные получены в результате опытных измерений, полученных с некоторой погрешностью, точного выполнения условий интерполяции не требуется. Другими словами, при наличии корреляционной связи, при существенной погрешности измерений, некорректно проводить интерполирующую кривую через табличные значения. В этих случаях интерполирующая функция F(x) не должна удовлетворять условиям $F(x_i) = f(x_i)$, i=1, 2, …, N. Это условие означает, что интерполирующая функция $F(x)$ проходит не точно через заданные точки, а в некоторой их окрестности, как, например, показано на рис. 3.1.

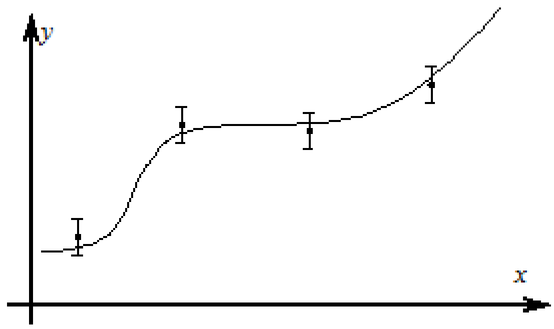

Рис. 3.1. Приближенная интерполяция

Тогда говорят о подборе эмпирических формул, описывающих заданные точки. Построение эмпирической формулы состоит из двух этапов: подбора вида этой формулы $f(x, b_0, b_1, ..., b_m)$, содержащей неизвестные параметры $b_0, b_1, ..., b_m$, и определение наилучших в некотором смысле этих параметров. Вид формулы иногда известен из физических соображений (например, связь между напряжением и деформацией для упругой среды), или выбирается из геометрических соображений. Для этого экспериментальные точки наносятся на график и путем сравнения поведения точек с графиками известных функций подбирается общий вид зависимости. Успех в значительной степени определяется опытом и интуицией исследователя.

Для практики важен случай аппроксимации функции многочленами, т.

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_m x^m. \tag{3.1}$$

После того, как выбран вид эмпирической зависимости, степень близости к эмпирическим данным определяется, используя минимум суммы квадратов отклонений вычисленных и экспериментальных данных.

Самыми простыми эмпирическими видами уравнений для описания физического процесса являются линейные. Например зависимость

$$y = bx \tag{3.2}$$

хорошо описывает зависимость напряжения сдвига от скорости сдвига для Ньютоновской жидкости:

$$\tau = \mu \dot{\gamma} \tag{3.3}$$

Очевидно, что для Бингамовской жидкости формой реологического уравнения

$$\tau = \tau_{\partial} + \eta \dot{\gamma} \tag{3.4}$$

Является уравнение прямой не проходящей через начало координат:

$$y = b_0 + b_1 x \tag{3.5}$$

Для построения эмпирических зависимостей используются методы корреляционного и регрессионного анализа. Они применяются не только для нахождения зависимостей линейного вида, но и показывают хороший результат при подборе нелинейной формы уравнения для описания физического процесса. Работа с нелинейными зависимостями более трудоёмкая и математически сложная, поэтому рекомендуется решение подобных задач с использованием специального программного обеспечения. Одной из таких программ является программа MNK-SUPER, автором алгоритма которой является доцент кафедры «Бурение нефтяных и газовых скважин» к.х.н Цивинский Д.Н.

3.2 . Проверка гипотезы о значимости коэффициентов уравнений регрессии

Оценка значимости коэффициентов уравнения регрессии заключается в проверке соответствующей статистической гипотезы. Подходящей нулевой гипотезой в этом случае будет гипотеза о равенстве коэффициента уравнения нулю. Нулевая гипотеза проверятся для всех коэффициентов уравнения регрессии.

$$H_0 : b_j = 0 \tag{3.6}$$

Другими словами, нулевая гипотеза H_0 является гипотезой об отсутствии различия между коэффициентом уравнения регрессии b_j и нулём. Альтернативной гипотезой будет неравенство:

$$H_0 : b_j \neq 0 \tag{3.7}$$

Правило, в соответствии с которым принимается или отклоняется нулевая гипотеза, заключается в сравнении некоторого комплекса физических величин, вычисленного по данным выборки, с подобным комплексом, вычисляемым независимым путём. Опытный критерий Стьюдента, вычисляемый по результатам эксперимента по формуле:

$$t_{\upsilon}^{\alpha} = \frac{|b_j|}{S_{b_j}} \tag{3.8}$$

Для принятия гипотезы о значимости коэффициента корреляции необходимо принимать допустимую вероятность ошибочно принять или отвергнуть истинную гипотезу. Вероятность допущения ошибки называется уровнем значимости α и равняется $\alpha = 1 - P$, где P -доверительная вероятность.

Таким образом, критическое значение критерия Стьюдента необходимо принимать в соответствии с принимаемым уровнем значимости α числа степеней свободы исследуемого параметра. В данном случае исследуемым параметром является коэффициент уравнения регрессии b_j, для которого число степеней свободы υ равняется числу степеней свободы дисперсии вопроизводимости. Если $t^{on} < t_{\upsilon}^{\alpha}$, то принимается нулевая гипотеза, если $t^{on} > t_{\upsilon}^{\alpha}$, то альтернативная. Для проверки нулевой гипотезы для коэффициента корреляции следует использовать двухсторонний критерий Стьюдента (Положение 1).

3.3. Проверка уравнения регрессии на адекватность.

Адекватность - соответствие, соразмерность, верность, точность, полное соответствие исследуемому предмету. В теории познания термин "*адекватность*" служит для обозначения верного воспроизведения объективных связей и отношений действительности в представлениях. понятиях и суждениях. В этом смысле истина определяется как адекватность мышления бытию. В моделировании адекватность - количественная характеристика соответствия модели оригиналу. Критерием адекватности является однородность дисперсий - дисперсии воспроизводимости S_{on}^2 и дисперсии адекватности $S_{a\partial}^2$:

$$S_{on}^2 = \frac{1}{n_{on}-1}\sum_{i=1}^{n_{on}}\left(y_i - \bar{y}\right)^2, \bar{y} = \frac{1}{n_{on}}\sum_{i=1}^{n_{on}} y_i,$$
$$S_{a\partial}^2 = \frac{1}{n-l}\sum (y_i - \hat{y}_i) \qquad (3.9)$$

где n_{on}- число опытов в выборке на воспроизводимость; n - объём выборки, осуществляемой с целью получения уравнения регрессии; l - число связей, наложенных на выборку (число параметров уравнения, определённых по выборке). $\hat{y}_i$ -рассчитанные по полученной модели значения функции отклика в соответствующих точках x_i

Критерий однородности формулируется следующим образом. Если дисперсии однородны, математическая модель адекватна, если неоднородны - неадекватна. Объективным критерием однородности дисперсий является значение опытного критерия Фишера:

$$F^{on}_{\nu_1,\nu_2} = \frac{S^2_{a\partial}}{S^2_{on}}, если \quad S^2_{a\partial} > S^2_{on}$$

$$F^{on}_{\nu_1,\nu_2} = \frac{S^2_{on}}{S^2_{a\partial}}, если \quad S^2_{a\partial} < S \tag{3.10}$$

где ν_1 - число степеней свободы числителя; ν_2 - число степеней свободы знаменателя. В числителе всегда должна быть большая дисперсия, в знаменателе - меньшая; дисперсия адекватности обычно больше дисперсии воспроизводимости. Это объясняется тем. что дисперсия адекватности включает в себя два вида ошибок - ошибки расчетные, обусловленные приближенным характером математической модели, и ошибки экспериментальные, а дисперсия воспроизводимости (опытная дисперсия) характеризует только ошибки эксперимента. Опытный критерий Фишера сравнивают с табличным значением критерия Фишера F^{α}. взятого с требуемым уровнем значимости α; - если опытный критерий Фишера меньше табличного, то дисперсии однородны и соответственно модель адекватна эксперименту, если больше - дисперсии неоднородны и модель неадекватна. Табличные значения критерия Фишера представлены в Приложении 2.

3.4. Построение уравнений регрессии вида $y = bx$.

1. Для начала следует установить корреляционную связь. При наличии сильной корреляционной связи достаточно построить корреляционное поле и сделать визуальную оценку о наличии связи. Для количественной оценки вычисляется коэффициент корреляции:

$$r_{xy} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{\left[n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right] \cdot \left[n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right]}},$$

2. Вычислить коэффициент уравнения регрессии вида $y = bx$. Согласно методу наименьших квадратов b:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

3. Вычислить дисперсию S_b^2 и квадратичное отклонение S коэффициента b. В вычислениях следует использовать значения опытной выборочной дисперсии $S_{оп}^2$. В случае если $S_{оп}^2$ не известна, то согласно гипотезе о физической сущности моделируемого процесса положить: $S_{оп}^2 = S_{ад}^2$. Дисперсия адекватности для данного уравнения регрессии имеет количество степеней свободы $\upsilon = n - 1$, тогда:

$$S_{ад}^2 = \frac{\sum (y_i - y_{i\,расч})^2}{\upsilon}$$

Вычислим дисперсию S_b^2:

$$S_b^2 = S_{оп}^2 \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

4. Вычислить стандартные границы корреляционного поля и отсеять «выпадающие точки» для уточнения модели. При этом должно произойти уменьшение дисперсий и усиление силы линейной связи в соответствии изменение коэффициента корреляции. Стандартные границы корреляционного поля вычисляются по формулам:

$$y_{i,\min} = (b - S_b)x_i,\ y_{i,\max} = (b + S_b)x_i.$$

Для удобства следует указать границы в табличном виде, а также построить график, на котором следует отразить исходную табличную зависимость (x_i, y_i), верхние и нижние границы $(x_i, y_{i,\min}), (x_i, y_{i,\max})$.

Точки исходной табличной зависимости, не лежащие в границах корреляционного поля, следует отсеять и вычислить параметры модели заново, тем самым более точно рассчитать основные параметры.

5. Для полученной модели следует оценить качество аппроксимации с помощью критерия Стьюдента:

1)Проверить нулевую гипотезу для коэффициента корреляции r_{xy}; (согласно пункту 2.3.)

2)Проверить нулевую гипотезу для коэффициента b уравнения регрессии $y = bx$. Для этого вычислить $t_b^{on} = \dfrac{|b|}{S_b}$ и по критерию Стьюдента сравнить с критическим значением t_υ^α для заданного уровня значимости $\alpha = 0.05$. Число степеней свободы для коэффициента уравнения регрессии $y = bx$ $\upsilon = n - 1$, так как на модель наложена одна связь – вычисление коэффициента b. Метод проверки аналогичен задаче проверки для r_{xy}.

6. Если известна опытная дисперсия S_{on}^2 полученная на этапе проведения экспериментов, то следует проверить на адекватность полученное уравнение по критерию Фишера [1].

Пример выполнения пунктов 1-4 представлен ниже

x	y	x*x	y*y	x*y	урасч	урасч-у	(урасч-у)^2	ymin	ymax
1,00	9,00	1	81	9	3,945054945	-5,05	25,55246951	3,82157	4,06854
3,00	8,00	9	64	24	11,83516484	3,84	14,70848931	11,4647	12,2056
5,00	20,00	25	400	100	19,72527473	-0,27	0,075473977	19,1079	20,3427
7,00	27,00	49	729	189	27,61538462	0,62	0,378698225	26,751	28,4798
9,00	36,00	81	1296	324	35,50549451	-0,49	0,244535684	34,3942	36,6168
11,00	43,00	121	1849	473	43,3956044	0,40	0,156502838	42,0373	44,7539
13,00	52,00	169	2704	676	51,28571429	-0,71	0,510204082	49,6805	52,891
49,00	195,00	455,00	7123,00	1795,00			41,63		
				r=	0,988111573	b=	3,945054945		
3010							Saд2=	6,93773	
3046,215							Sb2=	0,01525	
							Sb=	0,12348	

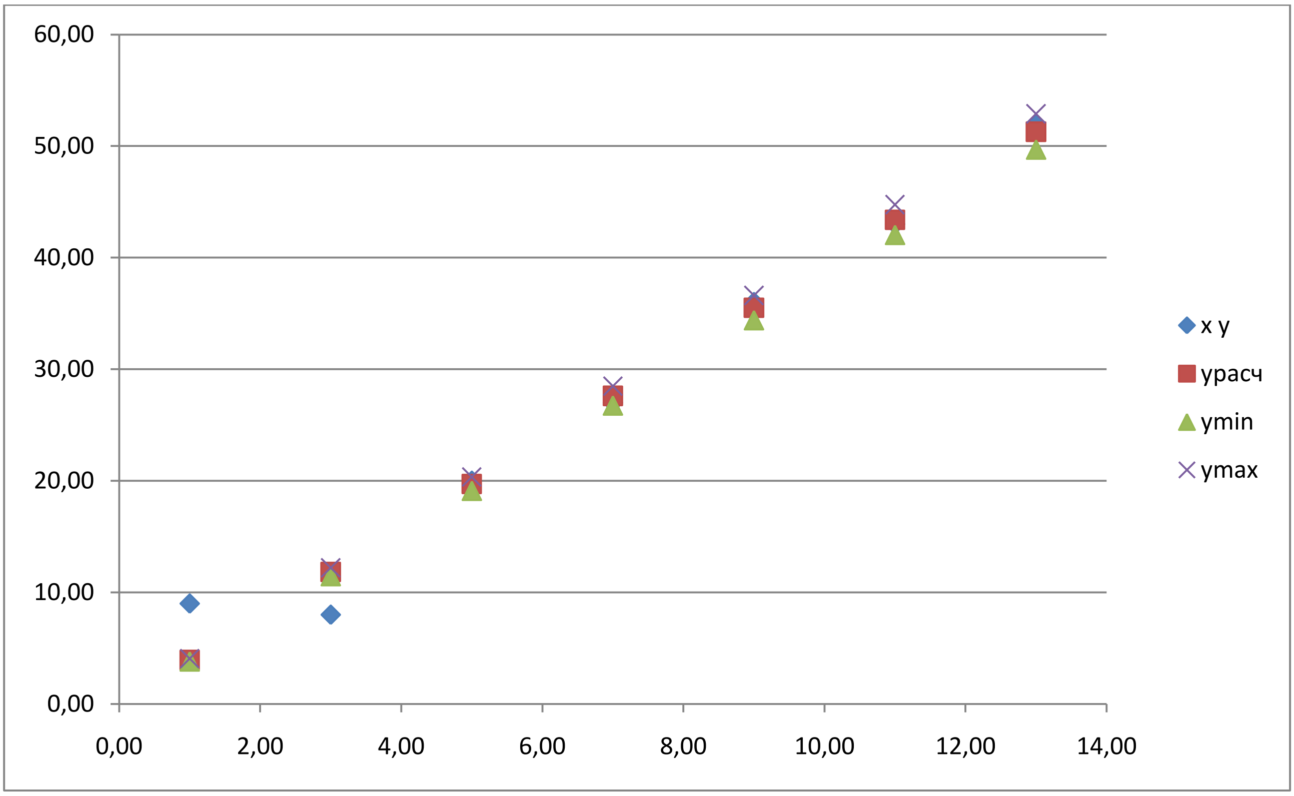

Рис 3.2. расчетная таблица

Рис 3.3. Синий цвет – исходное корреляционное поле.

Красный –построенная модель.

Треугольник – нижняя граница корреляционного поля

Крестик – верхняя граница корреляционного поля.

Задание: на основании полученной расчетной таблицы и построенного графика исключить выпадающие точки, уточнить параметры модели и сделать выводы.

3.5. Построение уравнений регрессии вида $y = b_0 + b_1 x$

1. Для начала следует установить корреляционную связь. При наличии сильной корреляционной связи достаточно построить корреляционное поле и сделать визуальную оценку о наличии связи. Для количественной оценки вычисляется коэффициент корреляции:

$$r_{xy} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{\left[n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right] \cdot \left[n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right]}},$$

Вычислить коэффициент уравнения регрессии вида $y = bx$. Согласно методу наименьших квадратов b_0 и b_1:

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i}{D};$$

$$b_1 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{D},$$

где

$$D = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

2. Вычислить дисперсию S_b^2 и квадратичное отклонение S коэффициента b. В вычислениях следует использовать значения опытной выборочной дисперсии $S_{оп}^2$. В случае если $S_{оп}^2$ не известна, то согласно гипотезе о физической сущности моделируемого процесса положить: $S_{оп}^2 = S_{ад}^2$. Дисперсия адекватности для данного уравнения регрессии имеет

количество степеней свободы $\upsilon = n-2$, т.к. для данной модели вычислялось 2 коэффициента уравнения регрессии b_0 и b_1, тогда:

$$S^2_{ад} = \frac{\sum (y_i - y_{i\,расч})^2}{\upsilon}$$

Вычислим дисперсию коэффициентов $S^2_{b_0}, S^2_{b_1}$ и квадратичные отклонения, соответствующие им:

$$S^2_{b_0} = S^2_{ад} \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{D}, \qquad S^2_{b_1} = S^2_{ад} \frac{n}{D},$$

$$S_{b_0} = \sqrt{S^2_{b_0}}, \qquad S_{b_1} = \sqrt{S^2_{b_1}}.$$

3. Вычислить стандартные границы корреляционного поля и отсеять «выпадающие точки» для уточнения модели. При этом должно произойти уменьшение дисперсий и усиление силы линейной связи в соответствии изменение коэффициента корреляции. Стандартные границы корреляционного поля вычисляются по формулам:

$$y_{i,\min} = \left(b_0 - S_{b_0}\right) + \left(b_1 - S_{b_1}\right)x_i, \; y_{i,\max} = \left(b_0 + S_{b_0}\right) + \left(b_1 + S_{b_1}\right)x_i.$$

Для удобства следует указать границы в табличном виде, а также построить график, на котором следует отразить исходную табличную зависимость (x_i, y_i), верхние и нижние границы $(x_i, y_{i,\min}), (x_i, y_{i,\max})$.

Точки исходной табличной зависимости, не лежащие в границах корреляционного поля, следует отсеять и вычислить параметры модели заново, тем самым более точно рассчитать основные параметры.

4. Для полученной модели следует оценить качество аппроксимации с помощью критерия Стьюдента:

1)Проверить нулевую гипотезу для коэффициента корреляции r_{xy}; (согласно пункту 2.3.)

2)Проверить нулевую гипотезу для коэффициентов b_0 и b_1: уравнения регрессии $y = b_0 + b_1 x$. Для этого вычислить $t_{b_0}^{on} = \frac{|b_0|}{S_{b_0}}$, $t_{b_1}^{on} = \frac{|b_1|}{S_{b_1}}$ и по критерию Стьюдента сравнить с критическим значением t_{υ}^{α} для заданного уровня значимости $\alpha = 0.05$. Число степеней свободы для коэффициента уравнения регрессии $y = b_0 + b_1 x$, $\upsilon = n - 2$, так как на модель наложены две связи – вычисление коэффициентов b_0 и b_1. Метод проверки аналогичен задаче проверки для r_{xy}.

5. Если известна опытная дисперсия S_{on}^2 полученная на этапе проведения экспериментов, то следует проверить на адекватность полученное уравнение по критерию Фишера [1].

КРИТЕРИЙ СТЬЮДЕНТА ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Число степеней свободы υ	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0.10	0.05	0,02	0.01	0,002	0.001
1	6.3138	12.7062	12.7062	63.6567	318.3081	636.6189
2	2.9200	4.3027	4.3027	9.9248	22.3271	31.5991
3	2.3534	3.1824	3.1824	5.8409	10.2145	12.9240
4	2.1318	2.7764	2.7764	4.6041	7.1732	8.6103
5	2.0150	2.5706	2.5706	4.0321	5.8934	6.8688
6	1.9432	2.4469	2.4469	3.7074	5.2076	5.9588
7	1.8946	2.3646	2.3646	3.4995	4.7853	5.4079
8	1.8595	2.3060	2.3060	3.3554	4.5008	5.0413
9	1.8331	2.2622	2.2622	3.2498	4.2968	4.7809
10	1.8125	2.2281	2.2281	3.1693	4.1437	4.5869
11	1.7959	2.2010	2.2010	3.1058	4.0247	4.4370
12	1.7823	2.1788	2.1788	3.0545	3.92%	4.3178
13	1.7709	2.1604	2.1604	3.0123	3.8520	4.2208
14	1,7613	2.1448	2.1448	2,9768	3.7874	4.1405
15	1.7531	2.1314	2.1314	2.9467	3.7328	4.0728
16	1.7459	2.1199	2.1199	2.9208	3.6862	4.0150
17	1.7396	2.1098	2.1098	2.8982	3.6458	3.9651
18	1.7341	2.1009	2.1009	2.8784	3.6105	3.9216
19	1.7291	2.0930	2.0930	2.8609	3.5794	3.8834
20	1.7247	2.0860	2.0860	2.8453	3.5518	3.8495
21	1.7207	2.07%	2.07%	2.8314	3,5272	3.8193
	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0001	0.0005
	Уровень значимости α (односторонняя критическая область)					

Число степеней свободы υ	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0.10	0.05	0.02	0.01	0.002	0.001
22	1.7171	2.0739	2.0739	2.8188	3.5050	3.7921
23	1,7139	2.0687	2.0687	2.8073	3.4850	3.7676
24	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969	3.4668	3.7454
25	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874	3.4502	3.7251
26	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787	3.4350	3.7066
27	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707	3.4210	3.68%
28	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633	3.4082	3.6739
29	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564	3.3962	3.6594
30	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500	3.3852	3.6460
35	1.6896	2.0301	2.4377	2.7238	3.3400	3.5911
40	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045	3.3069	3.5510
45	1.6794	2.0141	2.4121	2.6896	3.2815	3.5203
50	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778	3.2614	3.4960
60	1.6706	2.0003	2.3901	2.6603	3.2317	3.4602
70	1.6669	1.9944	1.3808	2.6479	3.2108	3.4350
80	1.6641	1.9901	2.3739	2.6387	3.1953	3.4163
90	1.6620	1.9867	2.3685	2.6316	3.1833	3.4019
100	1.6602	1.9840	2.3642	2.6259	3.1737	3.3905
120	1.6577	1.9799	2.3578	2.6174	3.1595	3.3735
200	1.6525	1.9719	2.3451	2.6006	3.1315	3,3398
	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758	3.0902	3.2905
	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0001	0.0005
	Уровень значимости (односторонняя критическая область) α					

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Критические значения распределения Фишера F^{α} для уровня значимости $\alpha=0{,}05$

ν_2	Число степеней свободы числителя ν_1																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	243,9	245,9	248,0	249,1	250,1	251,1	252,2	253,3	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,3	19,33	19,35	19,37	19,33	19,40	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8 70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
4	7,71	8,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,55	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,35
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,33	3,34	3,30	3,27	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,60	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,43	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,43	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2 72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,50	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31:	2,27	2,22	2,18	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,5S	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,09
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,39	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,38	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,60	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,69	1,84	1,79	1,73
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,71
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,13	2,06	1,97	1,93	1,89	1,84	1,79	1,73	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,23	2,22	2,18	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,69	1,62
40	4,08	3,23	2,64	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,03	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,89	1,64	1,58	1,51

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Критические значения распределения Фишера F^{α} для уровня значимости α =0,025

ν_2	Число степеней свободы числителя ν_1																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4052	499,5	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39	99,40	99,42	99,43	99,45	99,46	99,47	99,47	99,48	99,49	99,50
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,35	27,23	27,05	26,87	26,69	26,60	26,50	28,41	26,32	26,22	26,13
4	21,20	18,00	18,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,37	14,20	14,02	13,93	13,84	13,75	13,65	13,56	13,46
5	16,28	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,89	9,72	9,55	9,47	9,39	9,29	9,20	9,11	9,02
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,72	7,56	7,40	7,31	7,23	7,14	7,08	6,97	6,88
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,47	6,31	6,16	6,07	5,99	5,91	5,82	5,74	5,65
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,67	5,52	5,36	5,28	5,20	5,12	5,03	4,95	4,86
9	10,56	8,02	8,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,11	4,96	4,81	4,73	4,65	4,57	4,48	4,40	4,31
10	10,04	7,58	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,71	4,56	4,41	4,33	4,25	4,17	4,08	4,00	3,91
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,40	4,25	4,10	4,02	3,94	3,86	3,78	3,69	3,60
12	9,33	8,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,16	4,01	3,86	3,78	3,70	3,62	3,54	3,45	3,36
13	9,07	8,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	3,96	3,82	3,68	3,59	3,51	3,43	3,34	3,25	3,17
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,89	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,80	3,66	3,51	3,43	3,35	3,27	3,18	3,09	3,00
15	8,88	6,36	5,42	4,89	4,53	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,67	3,52	3,37	3,29	3,21	3,13	3,05	2,96	2,87
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,55	3,41	3,26	3,18	3,10	3,02	2,93	2,84	2,75
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,46	3,31	3,16	3,08	3,00	2,92	2,83	2,75	2,65
18	8,29	6,01	5,09	4,59	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,37	3,23	3,08	3,00	2,92	2,84	2,75	2,66	2,57
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,30	3.15	3,00	2,92	2,84	2,76	2,67	2,59	2,49
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,58	3,46	3,37	3,23	3,09	2,94	2,86	2,78	2,69	2,61	2,52	2,42
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31	3,17	3,03	2,88	2,80	2,72	2,64	2,55	2,46	2,33
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,12	2,98	2,83	2,75	2,67	2,58	2,50	2,40	2,31
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	3,07	2,93	2,78	2,70	2,62	2,54	2,45	2,35	2.26
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,03	2,89	2,74	2,68	2,58	2,49	2,40	2,31	2,21
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	2,99	2,85	2,70	2,62	2,54	2,45	2,36	2,27	2,17
28	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09	2,96	2,81	2,66	2,58	2,50	2,42	2,33	2,23	2,13
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06	2,93	2,78	2,63	2,55	2,47	2,38	2,29	2,20	2,10
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03	2,90	2,75	2,60	2,52	2,44	2,35	2,26	2,17	2,06
29	7,60	5.42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00	2,87	2,73	2,57	2,49	2,41	2,33	2,23	2,14	2,03
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,64	2,70	2,56	2,47	2,39	2,30	2,21	2,11	2,01
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,68	2,52	2,37	2,29	2,20	2,11	2,02	1,92	1,80
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,50	2,35	2,20	2,12	2,03	1,94	1,84	1,73	1,60
120	8,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47	2,34	2,19	2,03	1,95	1,86	1,76	1,66	1,53	1,38
∞	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,60	2,64	2,51	2,41	2,32	2,18	2,04	1,88	1,79	1,70	1,59	1,47	1,32	1,00

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Критические значения распределения Фишера F^{α} для уровня значимости $\alpha = 0{,}001$

ν_2	Число степеней свободы числителя ν_1																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4053*	5000*	5404*	5825*	5764*	5859*	5929*	5981*	6023*	8056*	6107*	6156*	6209*	6235*	6261*	6287*	6313*	6340*	6366*
2	998,5	999,0	999,2	999,2	999,3	999,3	999,4	999,4	999,4	999,4	999,4	999,4	999,4	999,5	999,5	999,5	999,5	999,5	999,5
3	167,0	148	141,1	137,1	134,6	132,8	131,6	130,6	129,9	129,2	128,3	127,4	126,4	125,9	125,4	125,0	124,5	124,0	123,5
4	74,14	61,25	56,18	53,44	51,71	50,53	49,66	49,00	48,47	48,05	47,41	46,76	46,10	45,77	45,43	45,09	44,75	44,40	44,05
5	47,18	37,12	33,20	31,09	29,75	28,84	29,16	27,64	27,24	26,92	26,42	25,91	25,39	25,14	24,87	24,60	24,33	24,06	23,79
6	35,51	27,00	23,70	21,92	20,81	20,03	19,46	19,03	18,69	18,41	17,99	17,58	17,12	16,89	16,67	16,44	16,21	15,99	15,75
7	29,25	21,69	18,77	17,19	16,21	15,52	15,02	14,63	14,33	14,08	13,71	13,32	12,93	12,73	12,53	12,33	12,12	11,91	11,70
8	25,42	18,49	15,83	14,39	13,49	12,86	12,40	12,04	11,77	11,54	11,19	10,84	10,48	10,30	10,11	9,92	9,73	9,53	9,33
9	22,88	16,39	13,90	12,56	11,71	11,13	10,70	10,37	10,11	9,89	9,57	9,24	8,90	8,72	8,55	8,37	8,19	6,00	7,81
10	21,04	14,91	12,55	11,28	10,48	9,92	9,52	9,20	8,96	8,75	8,45	8,13	7,80	7,64	7,47	7,30	7,12	6,94	6,76
11	19, 69	13,81	11,58	10,35	9,58	9,05	8,66	8,36	8,12	7,92	7,63	7,32	7,01	6,85	6,68	6,52	6,35	6,17	6,00
12	18,64	12,97	10,80	9,63	8,89	8,38	8,00	7,71	7,48	7,29	7,00	6,71	6,40	6,25	6,09	5,93	5,76	5,59	5,42
13	17,81	12,31	10,21	9,07	8,35	7,86	7,49	7,21	6,98	6,80	6,52	6,23	5,93	5,78	5,63	5,47	5,30	5,14	4,97
14	17,14	11,78	9,73	8,62	7,92	7,43	7,08	6,80	6,58	6,40	6,13	5,85	5,56	5,41	5,25	5,10	4,94	4,77	4,60
15	16,59	11,34	9,34	8,25	7,57	7,09	6,74	6,47	6,26	6,09	5,81	5,54	5,25	5,10	4,95	4,80	4,64	4,47	4,31
16	16,12	10,97	9,00	7,94	7,27	6,81	6,46	6,19	5,98	5,81	5,55	5,27	4,99	4,85	4,70	4,54	4,39	4,23	4,06
17	15,72	10,88	8,73	7,68	7,02	6,56	6,22	5,96	5,75	5,59	5,32	5,05	4,78	4,63	4,48	4,33	4,18	4,02	3,85
18	15,38	10,39	8,49	7,46	6,81	8,35	6,02	5,76	5,56	5,39	5,13	4,87	4,59	4,45	4,30	4,15	4,00	3,84	3,67
19	15,08	10,16	8,29	7,26	6,62	6,18	5,85	5,59	5,39	5,22	4,97	4,70	4,43	4,29	4,14	3,99	3,84	3,68	3,51
20	14,82	9,95	8,10	7,10	6,46	8,02	5,69	5,44	5,24	5,08	4,82	4,56	4,29	4,15	4,00	3,86	3,70.	3,54	3,38
21	14,59	9,77	7,94	6,95	6,32	5,89	5,56	5,31	5,11	4,95	4,70	4,44	4,17	4,03	3,88	3,74	3,58	3,42	3,26
22	14,38	9,81	7,80	6,81	6,19	5,76	5,44	5,19	4,99	4,83	4,58	4,33	4,06	3,92	3,78	3,63	3,48	3,32	3;15
23	14,19	9,47	7,67	6,69	6,08	5,85	5,33	5,09	4,89	4,73	4,48	4,23	3,96	3,82	3,68	3,53	3,38	3,22	3,05
24	14,03	9,34	7,55	6,59	5,98	5,55	5,23	4,99	4,80	4,64	4,39	4,14	3,87	3,74	3,59	3,45	3,29	3,14	2,97
25	13,88	9,22	7,45	6,49	5,88	5,48	5,15	4,91	4,71	4,58	4,31	4,06	3,79	3,66	3,52	3,37	3,22	3,06	2,89
26	13,74	9,12	7,36	6,41	5,80	5,38	5,07	4,83	4,64	4,48	4,24	3,99	3,72	3,59	3,44	3,30	3,15	2,99	2,82
27	13,81	9,02	7,27	8,33	5,73	5,31	5,00	4,76	4,57	4,41	4,17	3,92	3,66	3,52	3,38	3,23	3,08	2,92	2,75
23	13,50	8,93	7,19	6,25	5,66	5,24	4,93	4,69	4,50	4,35	4,11	3,86	3,60	3,46	3,32	3,18	3,02	2,86	2,69
29	13,39	8,86	7,12	6,19	5,59	5,18	4,87	4,64	4,45	4,29	4,05	3,80	3,54	3,41	3,27	3,12	2,97	2,81	2,64
30	13,29	8,77	7,05	6,12	5,53	5,12	4,82	4,58	4,39	4,24	4,00	3,75	3,49	3,36	3,22	3,07	2,92	2,76	2,59
40	12,81	8,25	6,80	5,70	5,13	4,73	4,44	4,21	4,02	3,87	3,64	3,40	3,15	3,01	2,87	2,73	2,57	2,41	2,23
60	11,97	7,76	6,17	5,31	4,76	4,37	4,09	3,87	3,69	3,54	3,31	3,08	2,83	2,69	2,55	2,41	2,25	2,08	1,89
120	11,38	7,32	5,79	4,95	4,42	4,04	3,77	3,55	3,39	3,24	3,02	2,78	2,53	2,40	2,26	2,11	1,95	1,76	1,54
∞	10,83	6,91	5,42	4,62	4,10	3,74	3,47	3,27	3,10	2,96	2,74	2,51	2,27	2,13	1,99	1,84	1,66	1,45	1,00

РЕКОМЕНДОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА К КУРСУ

1. Цивинский Д.Н. Разнообразие форм уравнений парной регрессии: Учебное пособ.- : Самар.гос.техн.ун-т, 2002.- 80 с.
2. Цивинский Д.Н. применение метода пассивного эксперимента в нефтегазовом деле. Учебное пособ. - : Самар.гос.техн.ун-т, 2002.- 84 с.
3. Цивинский Д.Н. Применение статистического метода анализа в нефтегазовом деле:Учеб. Пособ. – Самара: Самар.гос.техн.ун-т, 2013. – 377 с.
4. Цивинский Д.Н. Выборочное оценивание линейной регрессии с одним параметром. Задания для самостоятельной работы студентов.- : Самар.гос.техн.ун-т, 2015.- 17 с.
5. В.И. Киреев А. В. Пантелеев - Численные методы в примерах и задачах (Прикладная математика для ВТУЗов) – 2008
6. Руев Г.А., Федорова Н.Н., Федорченко И.А. Методы вычислений и их реализация в Excel. Учебное пособие, НГАСУ, 2008. - 105 с.

Вопросы к зачету по дисциплине «Компьютерные методы моделирования» для студентов заочной и дистанционной формы обучения

АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ

1. Понятие аппроксимации. Задача о восстановлении функции.
2. Постановка задачи интерполяции. Условие интерполяции.
3. Локальная и глобальная интерполяция. Примеры.
4. Кусочно-постоянная интерполяция.
5. Кусочно-линейная интерполяция.
6. Интерполяция каноническим полиномом.

ПОДБОР ЭМПИРИЧЕСКИХ ФОРМУЛ

Основы методов статистического анализа

7. Необходимость и случайность.
8. Детерминизм, детерминированный процесс, Детерминистичность математической модели, Детерминированно-стохастический процесс.
9. Наблюдение и эксперимент, совокупность, выборочная совокупность , её объемом.
10. Случайное событие, Случайные величины дискретные и непрерывные.
11. Определение вероятности, её свойства.
12. Функция распределения дискретной, непрерывной случайной величины.
13. Непрерывные системы случайных величин в НГД.
14. Плотность вероятностей, её график, геометрическое истолкование, примеры.
15. Математическое ожидание непрерывной, дискретной случайной величины, его оценки (мода, медиана, среднее)
16. Дисперсия непрерывной, дискретной случайной величины, квадратичное отклонение.
17. Воспроизводимость, дисперсия воспроизводимости.

Корреляционный и регрессионный анализ

18. Постановка задачи регререссионого анализа как моделирования физических процессов.

19. Понятие регрессии, регрессор, уравнение регрессии.
20. Функция отклика, факторное пространство, поверхность отклика.
21. Адекватность, дисперсия адекватности, критерий адекватности.
22. Корреляция, корреляционный анализ. Коэффициент корреляции, его смысл. Корреляционное поле, его границы.
23. Доверительная вероятность, доверительный интервал, уровень значимости. Правило двух(трёх) сигм.
24. Понятие статистической гипотезы. Гипотеза о наличии линейной связи. Гипотеза о физической сущности физического(моделируемого) процесса.
25. Парная корреляция, метод наименьших квадратов.
26. Формы линейной парной регрессии. Примеры.
27. Нелинейная парная регрессия. Линеаризация.
28. Выбор оптимальной формы парной регрессии.
29. Построение стандартных границ корреляционного поля.

Студент должен уметь пользоваться алгоритмом решения задач по построению интерполиционых функций и построения уравнений регрессии.